

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕДУЩЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Национальный авиационный университет

[vladimir\\_antonov\\_50@mail.ru](mailto:vladimir_antonov_50@mail.ru)

*Показано, что путем задания устойчивого уравнения для ведущей переменной, и последующего его обращения в тождество путем выбора управления на решениях исследуемой подлежащей стабилизации системы, достигается приемлемое инженерное решение задачи стабилизации*

**Ключевые слова:** задача о перевернутом маятнике, система сравнения, ведущая переменная

### Введение

История задачи о перевернутом маятнике имеет «два начала», обозначенных соответственно в работах [1,2] и [3,4]. В первых двух работах А. Стефенсон показал, что малые принудительные быстрые вибрирующие движения точки подвески приводят к медленным колебаниям маятника. В работах П.Л. Капицы этот неожиданный механический эффект получил объяснение, им был построен регулятор и впечатляющая демонстрационная установка – перевернутый маятник, который автор рекомендовал для лекционных демонстраций, что дополним пожеланием демонстраций будущим абитуриентам. Большинство последующих работ посвящены нахождению стабилизирующих регуляторов, в том числе и данная статья. Используем модель перевернутого маятника и иллюстрации к ней из работы [5].

Рассмотрим перевернутый маятник, изображенный на рис. 1. Ось маятника монтируется на тележке, которая может перемещаться в горизонтальном направлении. Тележка приводится в действие мотором, который в момент времени  $t$  прикладывает к тележке силу  $u(t)$ .

Рассматривая отдельно маятник и тележку (рис. 2), запишем уравнения их движения. Поскольку тележка может двигаться только по горизонтальной плоскости, достаточно рассмотреть проекции действующих на нее сил на ось  $x$ .

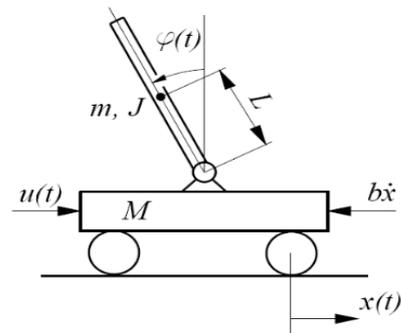


Рис. 1. Перевернутый маятник

$M$  - масса тележки [кг];

$m$  - масса маятника [кг];

$b$  - коэффициент вязкого трения при движении тележки [нс/м];

$L$  - расстояние между осью маятника и центром его масс [м];

$u(t)$  – управляющая сила [н];

$x(t)$  - координата тележки [м];

$\varphi(t)$  - угол отклонения маятника от вертикали [рад].

Система описывается уравнениями:

$$m \frac{d^2}{dt^2} [x(t) - L \cdot \sin \varphi(t)] = H(t), \quad (1)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} [L \cdot \cos \varphi(t)] = V(t) - mg, \quad (2)$$

$$J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = L \cdot H(t) \cos \varphi(t) + L \cdot V(t) \sin \varphi(t), \quad (3)$$

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = u(t) - H(t) - b \frac{dx(t)}{dt}. \quad (4)$$

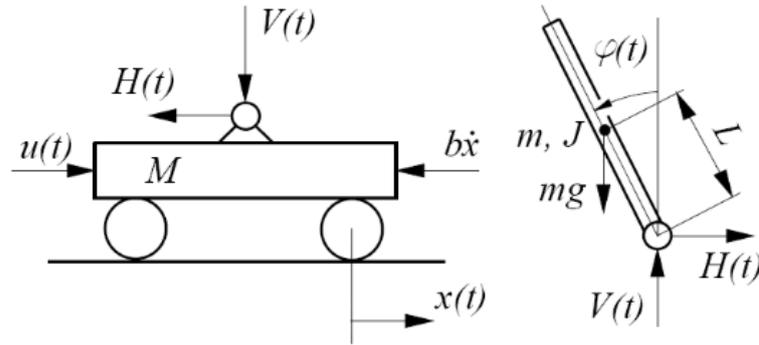


Рис. 2. Силы, действующие на перевернутый маятник

Здесь обозначены:

$H(t)$  - горизонтальная сила реакции на оси маятника [н],

$V(t)$  - вертикальная сила реакции на оси маятника [н],

$g$  - ускорение свободного падения [ $m/c^2$ ].

Вязкость трения, учитываемая коэффициентом  $b$  в уравнении (4), является обстоятельством, упрощающим решение задачи, поскольку в его отсутствие разгон

тележки в переходном процессе стабилизации вертикального положения маятника до некоторой установившейся скорости приводит в силу первого закона Ньютона к ее неограниченному удалению от начального положения. Поэтому положим  $b = 0$ , чтобы трение не помогало нам решать задачу - останавливать тележку.

Выполним дифференцирование в (1) и (2), и найдем силы  $H(t)$  и  $V(t)$ .

$$H(t) = m(\ddot{x} + L(\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi})); \tag{5}$$

$$V(t) = m(g - L(\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\ddot{\varphi})). \tag{6}$$

Подставим (5) и (6) в (3) и (4).

$$J\ddot{\varphi} = Lm(\ddot{x} + L(\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi}))\cos\varphi + Lm(g - L(\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\ddot{\varphi}))\sin\varphi; \tag{7}$$

$$(M + m)\ddot{x} = u(t) - L(\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi}). \tag{8}$$

Подставим (8) в (7) и разрешим (7) относительно  $\ddot{\varphi}$ .

$$\ddot{\varphi} = \frac{Lm\left(\frac{1}{M+m}\cos\varphi u(t) - \frac{L}{M+m}\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + g\sin\varphi\right)}{J - L^2m\left(\left(\frac{1}{M+m} - 1\right)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}. \tag{9}$$

Назначим образцовое уравнение, описывающее желаемое поведение угла отклонения маятника.

$$\ddot{\varphi} + a_1\dot{\varphi} + a_2\varphi = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) выполняет роль системы сравнения (образцового (эталонного, вспомогательного) уравнения), налагающей ограничения на поведение угла  $\varphi$  - главной или ведущей переменной в нашей задаче. Система (10) линейна, и ее поведение определяется коэффициентами

$a_1$  и  $a_2$ , которые зададим из условия аперидичности и скорости переходного процесса, например чтобы собственные числа (10) были действительными отрицательными (возможно кратными). Техника использования этого уравнения состоит в подстановке в него  $\ddot{\varphi}$  из (9), и нахождения из получившегося таким образом уравнения управляющего воздействия. Находим выражение для управления - регулятор.

$$u(t) = \frac{-(a_1\dot{\varphi} + a_2\varphi)\left(J - L^2m\left(\left(\frac{1}{M+m} - 1\right)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\right) + Lm\left(\frac{L\dot{\varphi}^2}{M+m}\sin\varphi\cos\varphi + g\sin\varphi\right)}{Lm\cos\varphi}. \quad (11)$$

Проведем численное интегрирование уравнений ((7) или (9)) и (8), замкнутых регулятором (11), методом Эйлера с шагом 0,001 с. при трех наборах значений коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ : (1:  $a_1 = 1; a_2 = 0,25$ ), (2:  $a_1 = 2; a_2 = 1$ ) и (3:  $a_1 = 4; a_2 = 4$ ), которым соответствуют собственные числа системы сравнения (10): (1:  $p_1 = -0,5; -0,5$ ), (2:  $p_1 = -1; p_2 = -1$ ) и (3:  $p_1 = -2; p_2 = -2$ ). Начальное от-

клонение зададим  $\varphi(0) = 0,1 [rad]$ .  $J, M$  и  $m$  зададим равными единице.

На рис. 3 приведены графики изменения во времени  $t [c]$  углового отклонения  $\varphi [rad]$  и скорости его изменения  $\dot{\varphi} [rad/c]$  для трех случаев значений коэффициентов вспомогательного уравнения (10). На рис.4 - графики управляющей силы  $u [H]$ . На рис.5 - графики линейного отклонения тележки  $x [M]$ , и скорости его изменения  $\dot{x} [M/c]$ .

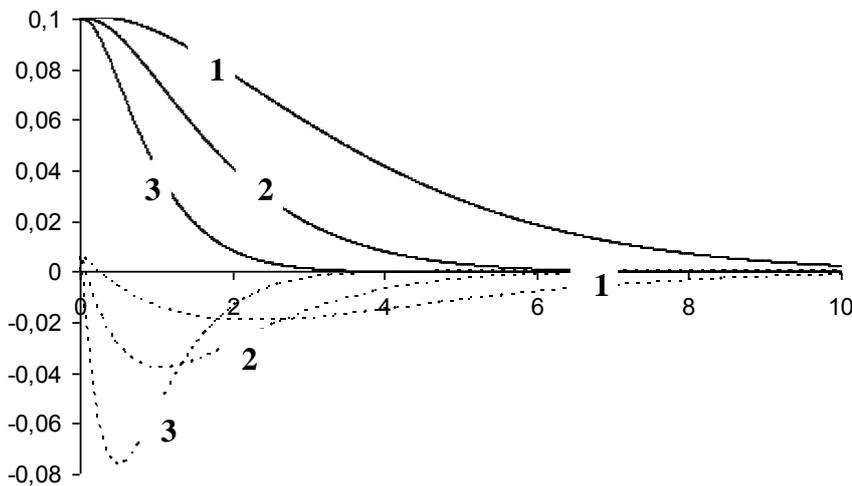


Рис.3. Графики изменения во времени  $t [c]$  углового отклонения  $\varphi [rad]$  (сплошные линии), и скорости его изменения  $\dot{\varphi} [rad/c]$  (пунктирные линии)

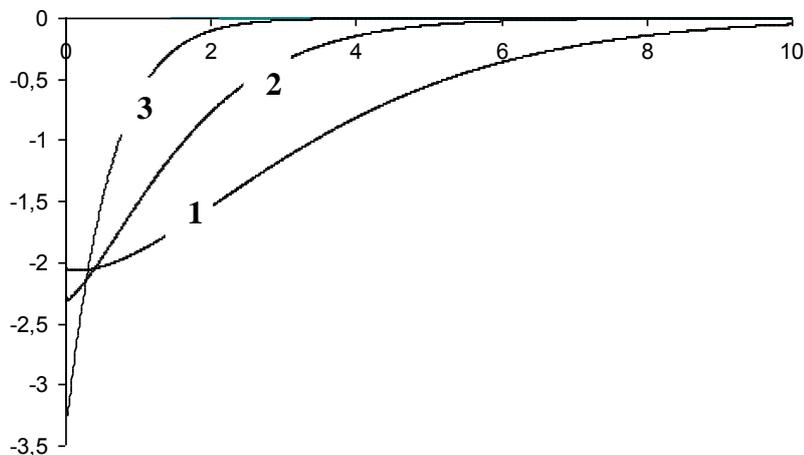


Рис.4. Графики изменения во времени  $t [c]$  управляющей силы  $u [H]$  для трех случаев значений коэффициентов вспомогательного уравнения

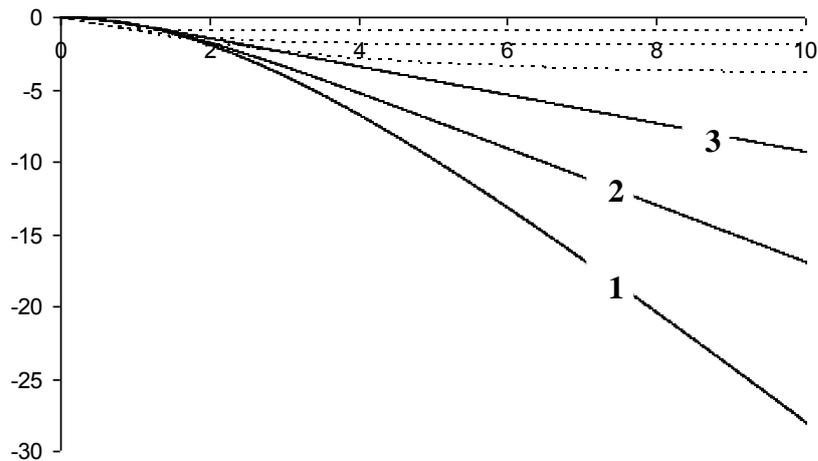


Рис.5 Графіки зміни за часом  $t$  [с] лінійного відхилення тележки  $x$  [м] (сплошні лінії), і швидкості його зміни  $\dot{x}$  [м/с] (пунктирні лінії)

Из графиков видно, что отсутствие мнимых составляющих в собственных числах системы (10) приводит к монотонным апериодическим процессам, протекающим быстрее при их удалении от мнимой оси. Увеличение быстродействия сопровождается более резким импульсивным силовым воздействием, и уменьшением интеграла по времени от него – и следующим уменьшением ухода тележки.

Направляющие рельсы для тележки можно сделать образующими круг (в горизонтальной или вертикальной плоскости), тогда, согласно рис. 5, тележка не будет уходить в бесконечность.

Если коэффициенты в (10) задать соответствующими колебательным процессам, т.е. имеющими большие мнимые составляющие, переходные процессы теряют монотонность, но существенно уменьшается уход тележки, что связано с переменностью знака силы и уменьшением интеграла от нее, и что подтверждают численные эксперименты.

В случаях незначительности ухода тележки (в связи с инженерным анализом задачи) результат можно считать оконча-

$$\ddot{\varphi} + a_1 \dot{\varphi} + a_2 (\varphi + k_x x + k_{\dot{x}} \dot{x}) = 0; \quad k_x < 0; \quad k_{\dot{x}} < 0. \quad (12)$$

В этом случае значения дополнительных коэффициентов  $k_x$  и  $k_{\dot{x}}$  по мо-

дельным. Если же мы имеем дело с неустойчивым объектом, например вертолетом, зависающим при действии боковых порывов ветра над палубой судна, одной его угловой стабилизации оказывается недостаточно. В этих случаях, когда у объекта «не должно быть траектории центра масс», задание системы сравнения хотя и усложняется, но не существенно. Препятствующим фактором в этом случае является неизбежно необходимое (да еще и ускоренное) движение тележки, поскольку только через него осуществляется связь между управлением и положением маятника. Поэтому сверхзадача «полного отсутствия траектории» не имеет решения. Но ситуация не безнадежна. Можно попробовать заставить систему сравнения частично справляться с уходом, при этом делая малым (по сравнению с ее возможностями по быстродействию) ущерб угловому положению. Простой способ соответствующей модификации системы (10) состоит во введении дополнительных членов, содержащих уход и его скорость. Заддим систему сравнения в виде:

дулю ограничены сверху и (в зависимости от коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ ) не должны

препятствовать системе сравнения выполнять свои «прямые обязанности».

Зададим в (12)  $a_1=20$ ;  $a_2=100$ ;  $k_x=-0,05$ ;  $k_{\dot{x}}=-0,05$ ;  $\varphi(0) = 0,3[rad]$ , и проведем моделирование, введя в управлении (11) в первом сомножителе в числителе добавку так, что он имеет вид  $(a_1\dot{\varphi} + a_2(\varphi + k_x x + k_{\dot{x}}\dot{x}))$ .

На рис. 6 представлены графики отклонения маятника  $\varphi [rad]$  и его скорости  $\dot{\varphi} [rad/c]$ . На рис. 7 представлен график управляющей силы  $u [н]$ . На рис. 8

представлены графики линейного отклонения тележки  $x [м]$  и его скорости  $\dot{x} [м/с]$ . На рис. 9 представлен фазовый портрет линейного отклонения  $x [м]$  и его скорости  $\dot{x} [м/с]$ . На рис. 10 представлен фазовый портрет углового отклонения  $\varphi [rad]$  и его скорости  $\dot{\varphi} [rad/c]$ . На рис. 11 представлен увеличенный фрагмент фазового портрета углового отклонения  $\varphi [rad]$  и его скорости  $\dot{\varphi} [rad/c]$ , содержащий петлю.

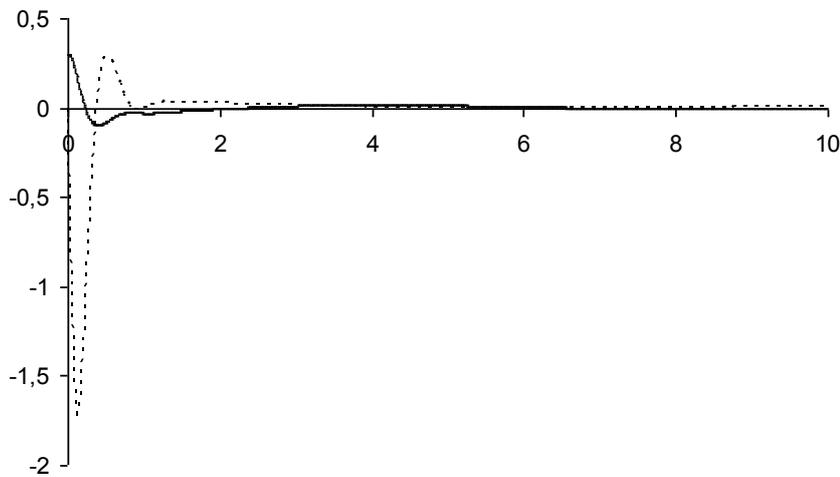


Рис. 6. Графики изменения во времени  $t [с]$  углового отклонения  $\varphi [rad]$  (сплошные линии), и скорости его изменения  $\dot{\varphi} [rad/c]$  (пунктирные линии)

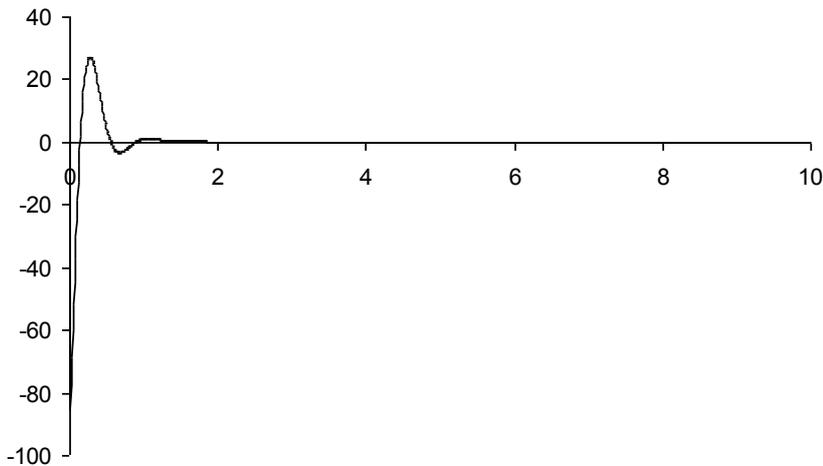


Рис.7. График изменения во времени  $t [с]$  управляющей силы  $u [н]$

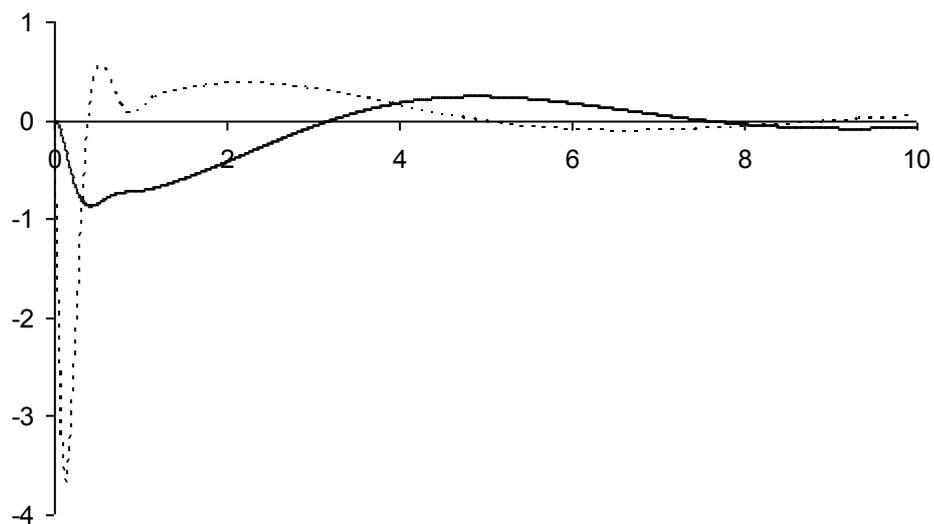


Рис. 8. Графики изменения во времени  $t$  [с] линейного отклонения тележки  $x$  [м] (сплошные линии), и скорости его изменения  $\dot{x}$  [м/с] (пунктирные линии)

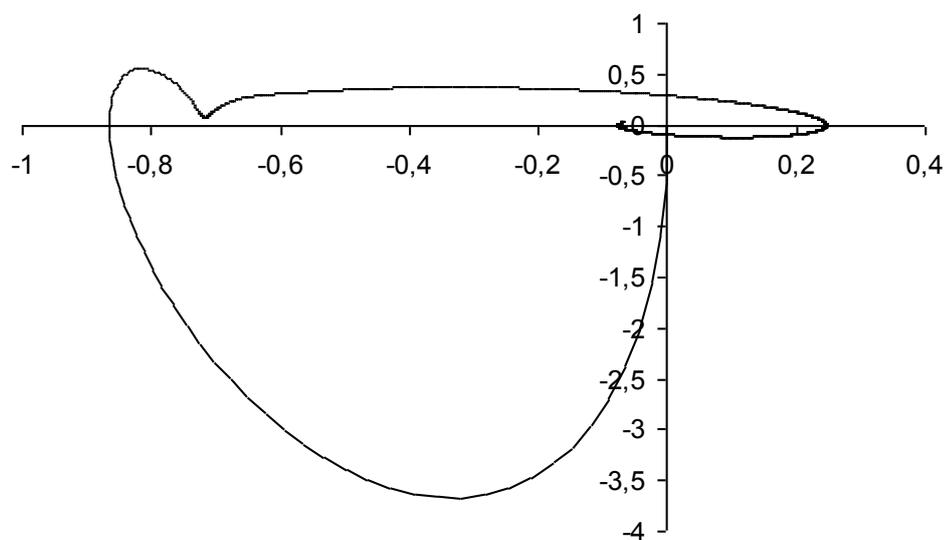
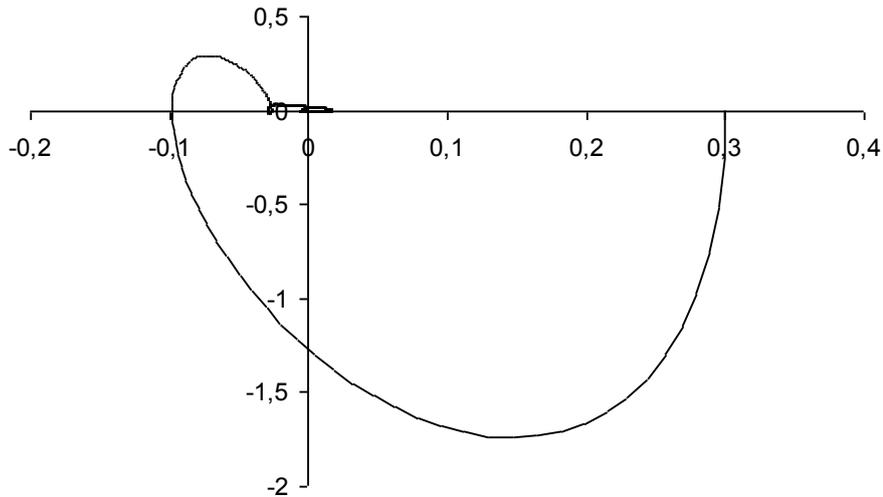
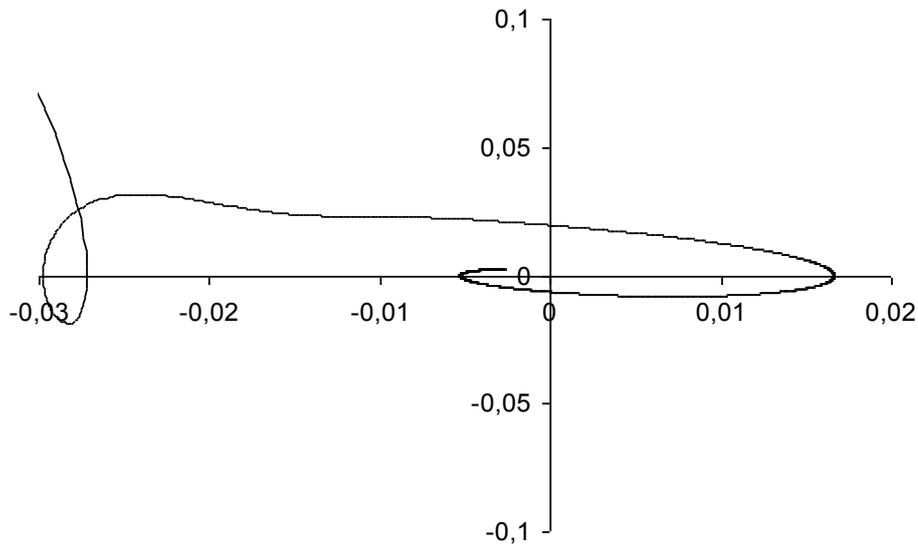


Рис. 9. Фазовый портрет  $(x, \dot{x})$

Рис. 10. Фазовый портрет  $(\varphi, \dot{\varphi})$ Рис.11. Фазовый портрет  $(\varphi, \dot{\varphi})$  с увеличением – область петли

Из графиков и фазовых портретов рис. 6–рис. 11 видно, что переходные процессы по всем координатам несколько утратили регулярность. В частности на фазовом портрете рис. 10 и рис. 11 появилась петля, характеризующая локальную невозможность удерживать под контролем противоборствующие тенденции. Новое дополнительное качество отсутствия по окончании процессов линейного ухода несколько ослабило свойство угловой стабилизации. Но этот «недостаток» подобен неспособности и невозможности одной фразой изложить две различные

мысли, в отличие от чего нам удалось одной системой сравнения обеспечить итоговую совместность противодействующих в системе факторов.

Рассмотрим поведение квадратичной формы координат. На рис.12 приведен график изменения во времени суммы квадратов координат системы

$$V_0(t) = \varphi^2(t) + \dot{\varphi}^2(t) + x^2(t) + \dot{x}^2(t). \quad (13)$$

На рис. 13 приведен портрет взаимного изменения суммы квадратов производных координат (вертикальная ось) и

суммы квадратов координат системы (13) (горизонтальная ось).

$$V_1(t) = \dot{\varphi}^2(t) + \ddot{\varphi}^2(t) + \dot{x}^2(t) + \ddot{x}^2(t) \quad (14)$$

На рис. 14 приведен портрет взаимного изменения суммы квадратов произ-

водных координат (вертикальная ось) от суммы квадратов координат:

$$V_2(t) = \dot{\varphi}^2(t) + \dot{x}^2(t) \quad (15)$$

$$V_3(t) = \varphi^2(t) + x^2(t) \quad (16)$$

(горизонтальная ось).

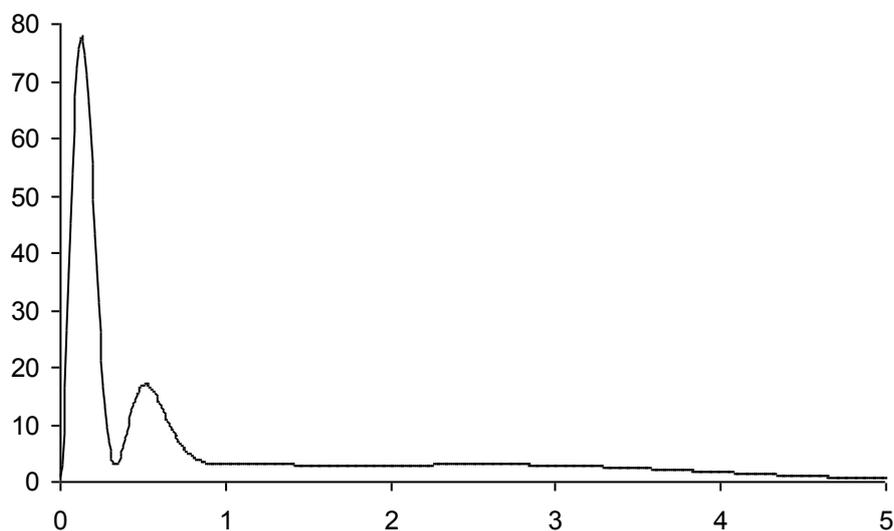


Рис.12. Изменение во времени суммы квадратов координат системы

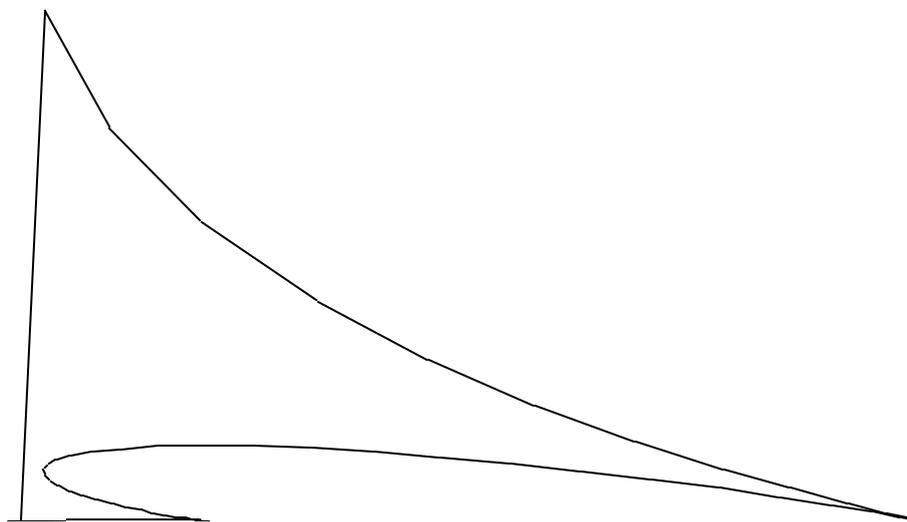


Рис. 13. Фазовый портрет (сумма квадратов координат  $V_0(t)$ ) – (сумма квадратов производных по времени от координат  $V_1(t)$ ).

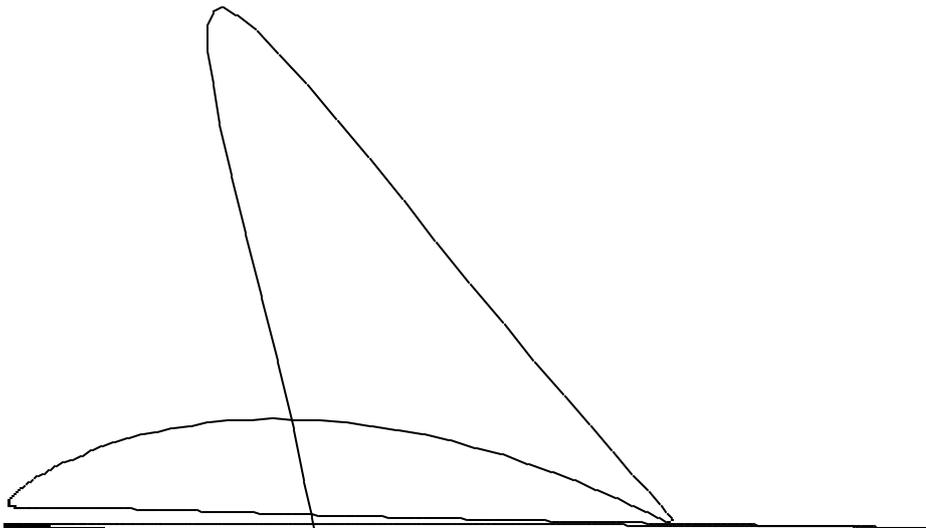
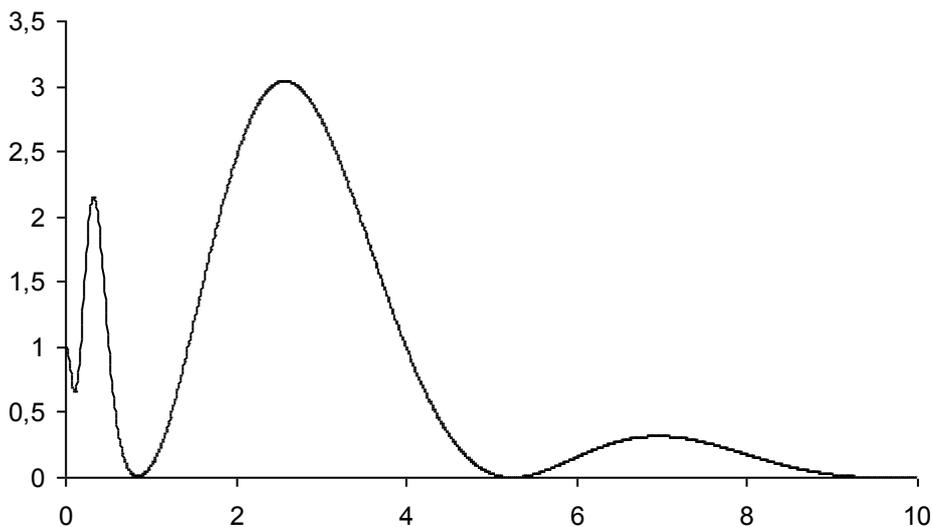


Рис. 14 Портрет взаимного изменения функций (15) и (16)

Из графика рис.12 и портретов рис.13 и рис.14 видно, что в системе имеет место особый тип устойчивости, характеризуемый изменением текущего содер-

жания цели управления. На рис.15 приведен график изменения во времени функции  $V_3(t)$ .

Рис. 15. График изменения во времени функции  $V_3(t)$ 

На первый взгляд ее поведение, противоречащее требованию отрицательности производной по времени, указывает на противоречие со вторым методом Ляпунова. Но на самом деле минимумы этой функции не равны нулю, и поэтому можно подобрать некоторую функцию времени, произведение которой с  $V_3(t)$  дает функцию Ляпунова.

Дальнейшее возможное развитие предлагаемого подхода к построению регуляторов состоит в совершенствовании структуры системы сравнения. В качестве возможных приведем примеры ее построения:

$\ddot{\varphi} + a_1\dot{\varphi} + a_2\varphi^{2n+1} = 0$  - с нечетной степенью при ведущей переменной;

$\ddot{\varphi} + a_1 \dot{\varphi}^{2p+1} + a_2 \varphi^{2n+1} = 0$  - и по ее производной;

$\ddot{\varphi} + a_1 \dot{\varphi}^{2p+1} + a_2 \varphi^{2n+1} + k_x x + k_{\dot{x}} \dot{x} = 0$   
- с дополнительным линейным членом;

$\ddot{\varphi} + a_1 \dot{\varphi}^{2p+1} + a_2 \varphi^{2n+1} + X^T Q X^2 = 0$   
- с дополнительным членом – комбинацией произведений координат в нечетной степени.

$$\frac{d}{dt^2} \ln(\varphi^{2n+1} + 1) + a_1 \frac{d}{dt} \ln(\varphi^{2n+1} + 1) + a_2 \ln(\varphi^{2n+1} + 1) = 0 ;$$

или кратной (двух и более) логарифмической функции

$$\frac{d}{dt^2} \ln(\ln(\varphi^{2n+1} + 1) + 1) + a_1 \frac{d}{dt} \ln(\ln(\varphi^{2n+1} + 1) + 1) + a_2 \ln(\ln(\varphi^{2n+1} + 1) + 1) = 0 .$$

#### **Список литературы:**

1. А. Stephenson. On an induced stability. Phil. Mag. 1908, 15, pp. 233 – 236.
2. А. Stephenson. On an induced stability. Met. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc. 1908, 52, P. 1 – 10.
3. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. ЖЭТФ, 1951, 21. – С. 588-597.
4. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом. УФН, 1951, 44. – С. 7-20.

Возможно построение системы сравнения по типу (10) относительно нечетной степени ведущей переменной, например с использованием логарифмической функции:

$$\frac{d}{dt^2} \varphi^{2n+1} + a_1 \frac{d}{dt} \varphi^{2n+1} + a_2 \varphi^{2n+1} = 0 ,$$

5. Золотов А.В. Разработка интеллектуального алгоритма управления объектами типа перевернутый маятник, Вестник Московского государственного горного университета №8 (29), 08.2011.

Статью представлено к публикации 21.01.2015