

НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Национальная Академия Авиации (Азербайджан)

agassi.melikov@rambler.ru

В работе предложен метод расчета характеристик многоканальной системы массового обслуживания с чистыми потерями и обратной связью. Обратная связь проявляется мгновенным возвращением части вызовов для получения повторного обслуживания. Рассматриваются две схемы возвращения вызовов. В одной из них вероятность возвращения зависит от числа первичных вызовов в каналах, а в другой она зависит от числа повторных вызовов в каналах. Приводятся результаты численных экспериментов

Ключевые слова: системы передачи и обработки информации, мульти-агентные системы

Введение

На практике часто встречаются системы передачи и обработки информации, в которых некоторые обработанные вызовы могут требовать повторную обработку в зависимости от некоторых факторов (например, в зависимости от качества обработки, от времени пребывания в системе и т.д.). Такие ситуации имеют место в мульти-агентных системах, где запросы, получившие удовлетворительное обслуживание могут потребовать повторное обслуживание у этих агентов [1-3]. Потому при разработке математических моделей таких систем необходимо учитывать эффект обратной связи с системой.

Основной аппарат, используемый для разработки математических моделей системы передачи и обработки информации, является теория систем массового обслуживания (СМО). В этой связи следует отметить, что в известных моделях СМО считается, что после завершения обслуживания вызовы окончательно покидают системы, и в дальнейшем не влияют на их работу. Следовательно, они не могут быть использованы для математического анализа системы передачи и обработки информации, в которых появляется

эффект обратной связи. Потому для адекватного описания работы систем передачи и обработки информации с обратной связью необходимо разработать новые модели СМО, позволяющие учитывать этот эффект.

Отметим, что модели СМО с обратной связью в доступной литературе почти не исследованы. Так, в работах [4-6], посвященных изучению моделей с обратной связью изучены модели одноканальных СМО с бесконечными [4-5] и конечными очередями [6]. При этом в них предполагается, что первичные и повторные вызовы являются идентичными относительно времени их обслуживания. Вместе с тем, модели многоканальных СМО с чистыми потерями, в которой первичные и повторные вызовы отличаются друг от друга по времени занятия канала не изучены. Учет этих моментов существенным образом расширяет области приложения моделей СМО с обратной связью.

В настоящей работе изучаются модели многоканальных СМО с чистыми потерями и разнотипными (с точки зрения времени их обработки) вызовами, где возможно повторное обслуживание части первичных вызовов. Для расчета их стационарного распределения

используется метод балансовых уравнений.

Описание модели

На вход системы, содержащей $N > 1$ идентичных каналов, поступает пуассоновский поток первичных вызовов (p -вызовы) с интенсивностью λ . Времена обработки этих вызовов являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. Предположим, что функция распределения (ф.р.) указанных случайных величин для всех p -вызовов являются экспоненциальными с общим средним $1/\mu_p$. Времена обработки повторных вызовов (r -вызовы) также являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. При этом ф.р. этих случайных величин для всех r -вызовов являются экспоненциальными с общим средним $1/\mu_r$. Предполагается, что, вообще говоря, $\mu_p \neq \mu_r$.

После окончания процесса обработки p -вызов с некоторой вероятностью может мгновенно требовать повторную обработку. Здесь рассматриваются две схемы определения указанной вероятности. В первой схеме она зависит от числа p -вызовов в каналах (при этом учитывается и закончивший только, что обслуживание p -вызов), а во второй схеме эта вероятность зависит от числа повторных вызовов (r -вызовов) в каналах.

Проблема состоит в определении характеристик рассматриваемой модели. При этом основными характеристиками системы являются вероятности потери первичных вызовов (P_p), а также среднее число первичных (N_p) и повторных (N_r) вызовов в каналах.

Метод расчета

Состояние этой системы в произвольный момент времени определяется двумерным вектором (n_p, n_r) , где n_p (n_r) означает число p -

вызовов (r -вызовов) в каналах. Множество возможных состояний системы, т.е. фазовое пространство состояний (ФПС) задается так:

$$S = \{(n_p, n_r): n_p, n_r = 0, 1, \dots, N; n_p + n_r \leq N\}. \quad (1)$$

Исходя из вида функций распределения случайных величин, участвующих в формировании модели, заключаем, что математической модели изучаемой СМО при обеих схемах определения вероятностей возвращения p -вызовов являются двумерные цепи Маркова. Вместе с тем, инфинитезимальные матрицы (Q -матрицы) этих цепей отличаются друг от друга. Потому рассмотрим эти схемы в отдельности.

Сначала рассмотрим первую схему. Определим возможные переходы между состояниями модели в ФПС (1) при использовании данной схемы.

Пусть система находится в некотором состоянии $(n_p, n_r) \in S$. В начале рассмотрим возможные выходы из этого состояния. Если поступает некоторый p -вызов, то осуществляется переход из данного состояния в состояние $(n_p + 1, n_r) \in S$. Интенсивность такого перехода равна λ , и он возможен, если в исходном состоянии $(n_p, n_r) \in S$ выполняется условие $n_p + n_r < N$; иначе поступивший p -вызов теряется. Если в исходном состоянии $(n_p, n_r) \in S$ после завершения обслуживания p -вызова, он возвращается в систему, то осуществляется переход из данного состояния в состояние $(n_p - 1, n_r + 1) \in S$

Интенсивность такого перехода равна $n_p \mu_p \sigma(n_p)$. Если в исходном состоянии $(n_p, n_r) \in S$ после завершения обслуживания p -вызова, он уходит из системы окончательно, то осуществляется переход в состояние $(n_p - 1, n_r) \in S$. Интенсивность такого перехода равна $n_p \mu_p (1 - \sigma(n_p))$.

Резюмируя сказанное, можно определить возможные выходы из состояния $(n_p, n_r) \in S$. Построит таблицу 1, согласно которой

Табл. 1. Возможные выходы из состояния $(n_p, n_r) \in S$.

Следующее состояние	Условие перехода	Интенсивность перехода
$(n_p + 1, n_r)$	$n_p + n_r < N$	λ
$(n_p - 1, n_r + 1)$	$n_p > 0$	$n_p \mu_p \sigma(n_p)$
$(n_p - 1, n_r)$	$n_p > 0$	$n_p \mu_p (1 - \sigma(n_p))$

Теперь рассмотрим возможные входы в состояние $(n_p, n_r) \in S$. В это состояние можно попасть из состояния $(n_p - 1, n_r) \in S$. Интенсивность такого перехода равна λ , и он возможен, если в конечном состоянии $(n_p, n_r) \in S$ выполняется условие $n_p > 0$. Если после завершения обслуживания p -вызова в состоянии $(n_p + 1, n_r) \in S$, он уходит из системы окончательно, то осуществляется переход в состояние $(n_p, n_r) \in S$. Интенсивность такого перехода равна

$n_p \mu_p (1 - \sigma(n_p + 1))$. Если после завершения обслуживания p -вызова в состоянии $(n_p + 1, n_r - 1)$ он возвращается в систему, то осуществляется переход из данного состояния в состояние $(n_p, n_r) \in S$. Интенсивность такого перехода равна $n_p \mu_p \sigma(n_p + 1)$.

Резюмируя сказанное, можно построить таблицу 2, согласно которой определяются возможные входы в состояние $(n_p, n_r) \in S$.

Табл. 2. Возможные входы в состояние $(n_p, n_r) \in S$.

Предыдущее состояние	Условие перехода	Интенсивность перехода
$(n_p - 1, n_r)$	$n_p > 0$	λ
$(n_p + 1, n_r - 1)$	$n_r > 0$	$n_p \mu_p \sigma(n_p)$
$(n_p + 1, n_r)$	$n_p + n_r < N$	$n_p \mu_p (1 - \sigma(n_p + 1))$

Интенсивность перехода из состояния (n_p, n_r) в состояние (n'_p, n'_r) обозначим $q((n_p, n_r), (n'_p, n'_r))$. Тогда

используя таблиц 1 и 2, получаем, что указанные параметры определяются так:

$$q((n_p, n_r), (n'_p, n'_r)) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n'_p = n_p + 1, n'_r = n_r, \\ n_p \mu_p \sigma(n_p), & \text{если } n'_p = n_p - 1, n'_r = n_r + 1, \\ n_p \mu_p (1 - \sigma(n_p)), & \text{если } n'_p = n_p - 1, n'_r = n_r, \\ n_r \mu_r, & \text{если } n'_p = n_p, n'_r = n_r - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $p(n_p, n_r)$ означает стационарную вероятность состояния $(n_p, n_r) \in S$. Эти вероятности удовлетворяют следующую систему уравнений равновесие (СУР), которая составляется на основе соотношений (2):

$$\begin{aligned}
 & p(n_p, n_r) (\lambda I(n_p + n_r < N) + n_p \mu_p + n_r \mu_r) = \\
 & = \lambda p(n_p - 1, n_r) I(n_p > 0) + (n_p + 1) \mu_p I(n_p + n_r < N) \times \\
 & \times ((1 - \sigma(n_p + 1)) p(n_p + 1, n_r) + \sigma(n_p + 1) p(n_p + 1, n_r - 1) I(n_r > 0)) + \\
 & + (n_r + 1) \mu_r p(n_p, n_r + 1) I(n_p + n_r < N),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $I(A)$ – индикаторная функция события A .

Уравнения нормировки имеет следующий вид:

$$\sum_{(n_p, n_r) \in S} p(n_p, n_r) = 1 \tag{4}$$

После нахождения решение СУР характеристики изучаемой системы определяются как маргинальные распределения данной двумерной ЦМ. Так, поскольку p -вызовы теряются, если в

где $\xi_x(k) = \sum_{(n_p, n_r) \in S} p(n_p, n_r) \delta(n_x, k)$, $x \in \{p, r\}$; $\delta(i, j)$ – символы Кронекера.

Относительно метода решения СУР (3-4), отметим, что не удастся найти ее аналитическое решение или разработать эффективный рекурсивный алгоритм. Потому для ее решение необходимо использовать известные численные методы линейной алгебры. Отметим, что для решения подобных СУР наиболее часто используется метод Гаусса-Зейделя.

Теперь рассмотрим вторую схему. Здесь предполагается, что вероятность возвращения p -вызовов зависит от текущего числа r -вызовов в каналах. Пространство состояний модели при данной схеме также определяется с помощью (1). Интенсивности переходов между состояниями определяются аналогично соотношениям (2), но при этом во второй и третьей строке в правой части указанной формулы параметры $\sigma(n_p)$ заменяются параметрами $\sigma(n_r)$. Соответствующие изменения необходимо внести также в СУР (3). Поскольку эти замены и составления соответствующей СУР не представляется никаких

моменты их поступления все каналы системы заняты, то вероятность потери вызовов данного типа определяются так:

$$P_p = \sum_{(n_p, n_r) \in S_d} p(n_p, n_r) \tag{5}$$

где $S_d = \{(n_p, n_r) \in S : n_p + n_r = N\}$.

Среднее число разнотипных вызовов определяются так:

$$N_x = \sum_{k=1}^N k \xi_x(k) \tag{6}$$

трудностей, то из-за ограничений на объема работы указанная СУР здесь не приводится. Характеристики модели в данной схеме определяются также из (5) и (6).

Как и в случае первой схемы, здесь также не удастся найти аналитическое решение соответствующей СУР. Потому для ее решение целесообразно использовать указанные выше численные методы линейной алгебры.

Численные результаты

Разработанный метод позволяет изучить поведения характеристик системы при обеих схемах возвращения первичных вызовов. При этом их можно исследовать относительно изменения как структурных, так и нагрузочных параметров модели. Вместе с тем, с учетом ограничений на объем статьи, здесь приводятся лишь анализ характеристик системы относительно изменения закона поступления повторных вызовов.

Здесь для краткости рассматриваются лишь два варианта определения вероятностей возвращения p -вызовов в каналы:

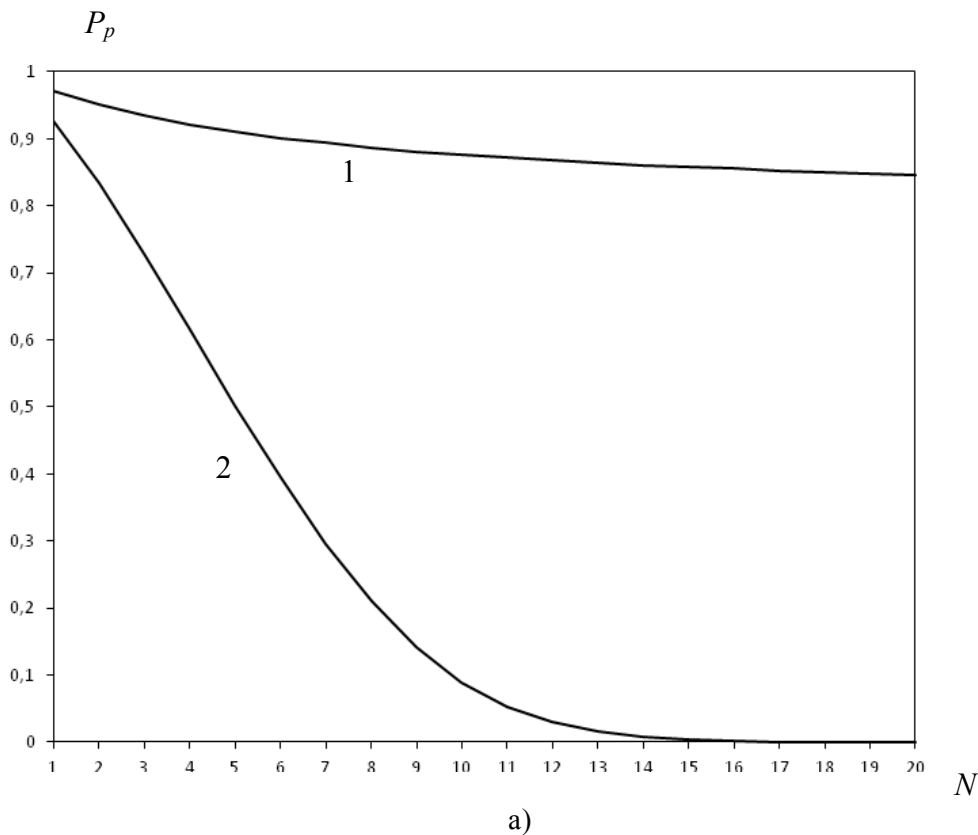
$$1) \sigma(x) = \frac{x+1}{x+2}; 2) \sigma(x) = \frac{1}{x+2}.$$

Иными словами, в первом варианте предполагается, что вероятность возвращения в каналы является возрастающей функцией, а во втором варианте она является убывающей функцией относительно аргумента x .

Ниже во всех экспериментах принимается, что $\lambda = 10$ вызовов/сек, $\mu_p = 2$ вызовов/сек, $\mu_r = 1$ вызовов/сек.

Сначала рассмотрим результаты для первой схемы. Они показаны на рис. 1. На рис. 1, а показана зависимость характеристики P_p (вероятность потери первичных вызовов) относительно изменения число каналов при обоих вариантах возвращения вызовов в каналы.

Из этого графика видно, что вероятность потери первичных вызовов, оказывается существенно меньше и уменьшается с очень большой скоростью, если используется второй вариант для определения схемы возвращения первичных вызовов. Этого следовало ожидать, так как во втором варианте с ростом число первичных вызовов они с малой вероятностью возвращаются для повторного обслуживания, и тем самым, уменьшается общая нагрузка каналов. Последнее обстоятельство приводит к уменьшению вероятности потери первичных вызовов. С ростом числа каналов эта вероятность уменьшается и при первом варианте возвращения вызовов в каналы, но в этом случае она уменьшается с очень малой скоростью. При этом абсолютные значения изучаемой функции являются достаточно высокими.



а)

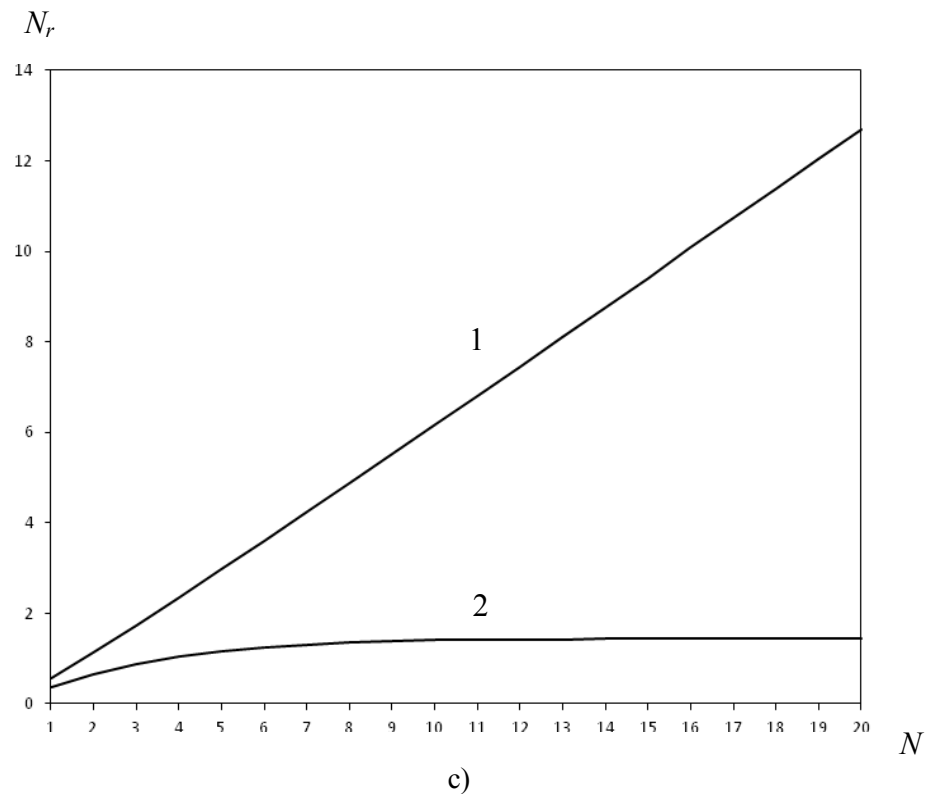
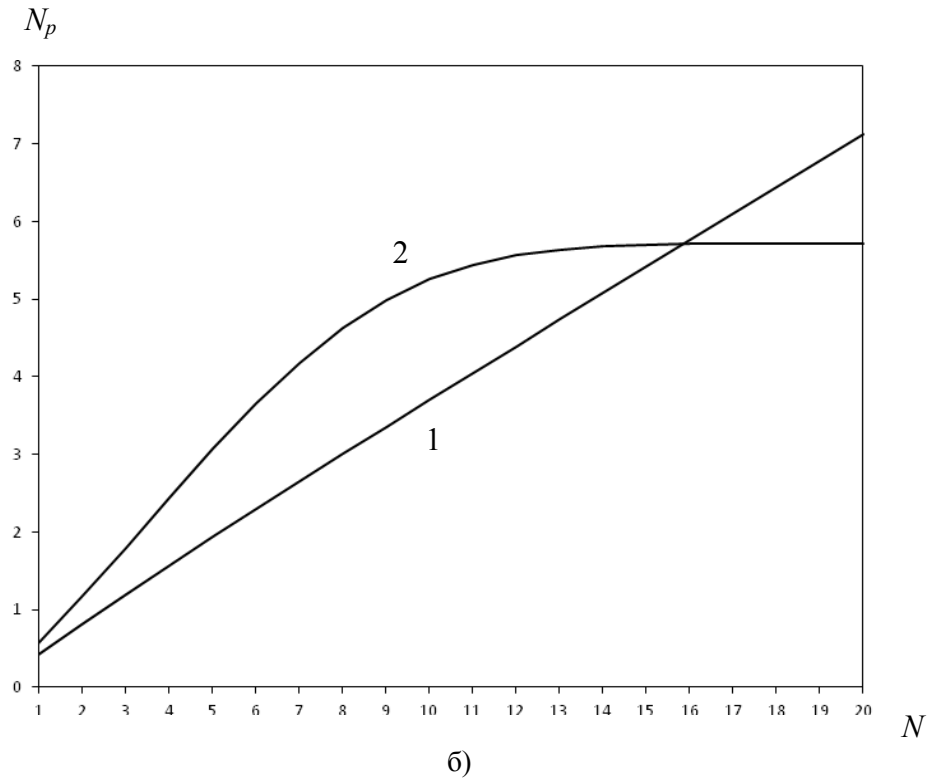


Рис.1. Зависимость вероятности потери (а), среднее число первичных (б) и повторных (с) вызовов от числа каналов при первой схеме

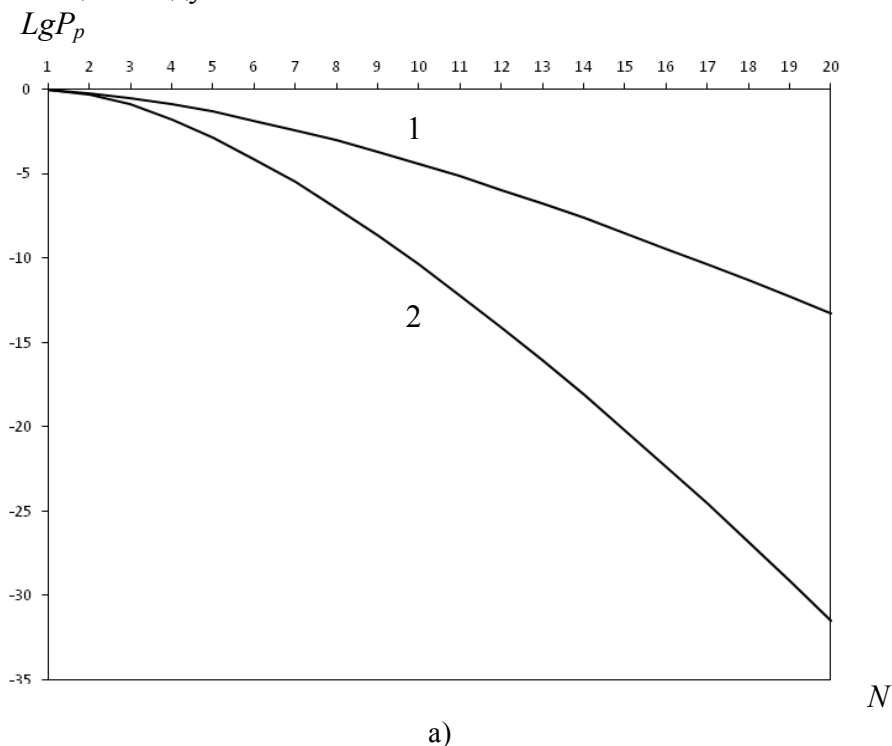
Большие значения вероятностей потери при первом варианте объясняется тем, что при использовании этого варианта суммарное число вызовов обоих типов достаточно высокое, т.е. имеет место высокая загруженность каналов

(рис. 1, б и в). Здесь же отметим, что при использовании первого варианта число вызовов обоих типов в каналах растут с достаточно высокой скоростью. При этом для повторных вызовов первый вариант всегда является предпочтительным (рис. 1, в), в то время как, для первичных вызовов первый вариант оказывается предпочтительным лишь при $N > 17$ (рис. 1, б).

Теперь рассмотрим результаты для второй схемы. На рис. 2, а показана зависимость вероятность потери первичных вызовов относительно изменения число каналов при обоих вариантах их возвращения в каналы. Важно отметить, что имеются существенные (иногда даже чрезвычайные) отличия между значениями этой функции при использовании различных схем. Так, по сравнению первой схемы, здесь диапазон изменения этой функции достаточно широкий и она принимает существенно меньшие значения. Например, в первой схеме минимальное значение этой функции при использовании первого варианта приблизительно равно 0.85, и то время как, здесь она приблизительно равно 10^{-12} . Разница между значениями

этой функции при различных схемах оказываются существенно большими даже при малых значениях число каналов (рис. 1, а и рис. 2, а). Следовательно, для этой функции вторая схема оказывается предпочтительной при обоих вариантах изменения вероятностей возвращения первичных вызовов.

Достаточно низкие значения вероятностей потери в данной схеме объясняется тем, что при ее использовании суммарное число вызовов обоих типов очень малое, т.е. имеет место низкая загруженность каналов (см. рис. 2, б и в). Здесь же отметим, что в обоих вариантах изменения вероятностей возвращения первичных вызовов число вызовов каждого типа в каналах растут с очень малой скоростью лишь при начальных значениях число каналов (т.е. при $N \leq 4$, а затем они становятся почти постоянными. При этом для повторных вызовов первый вариант всегда является предпочтительным (см. рис. 2, в), в то время как, для первичных вызовов первый вариант оказывается предпочтительным лишь при $N \geq 4$ (рис. 2, б).



а)

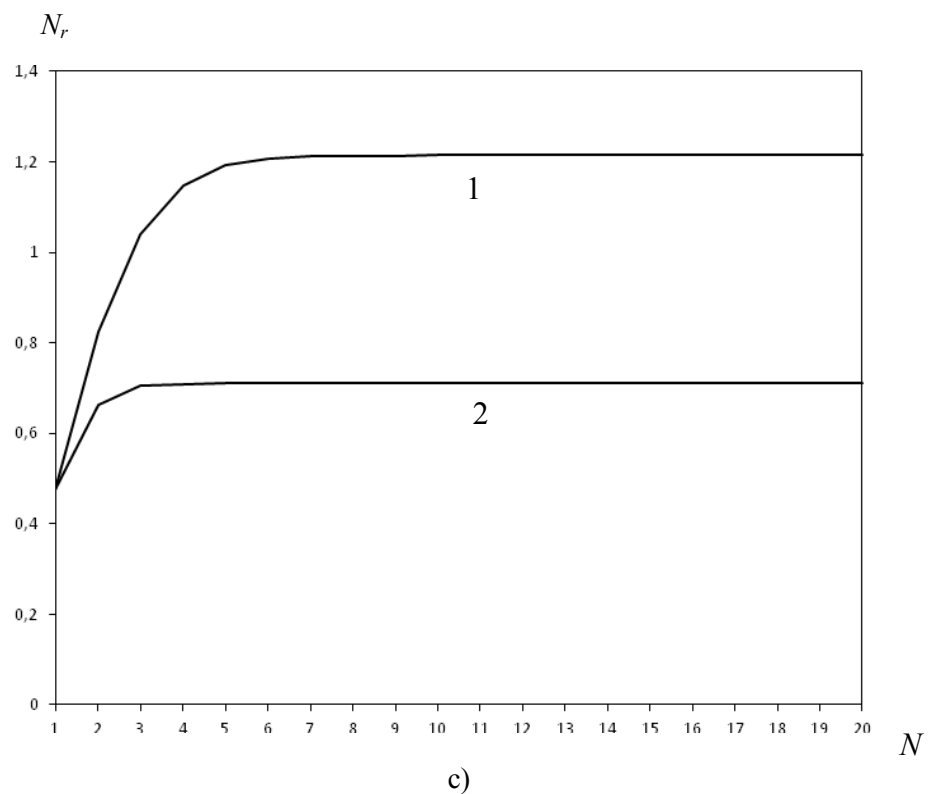
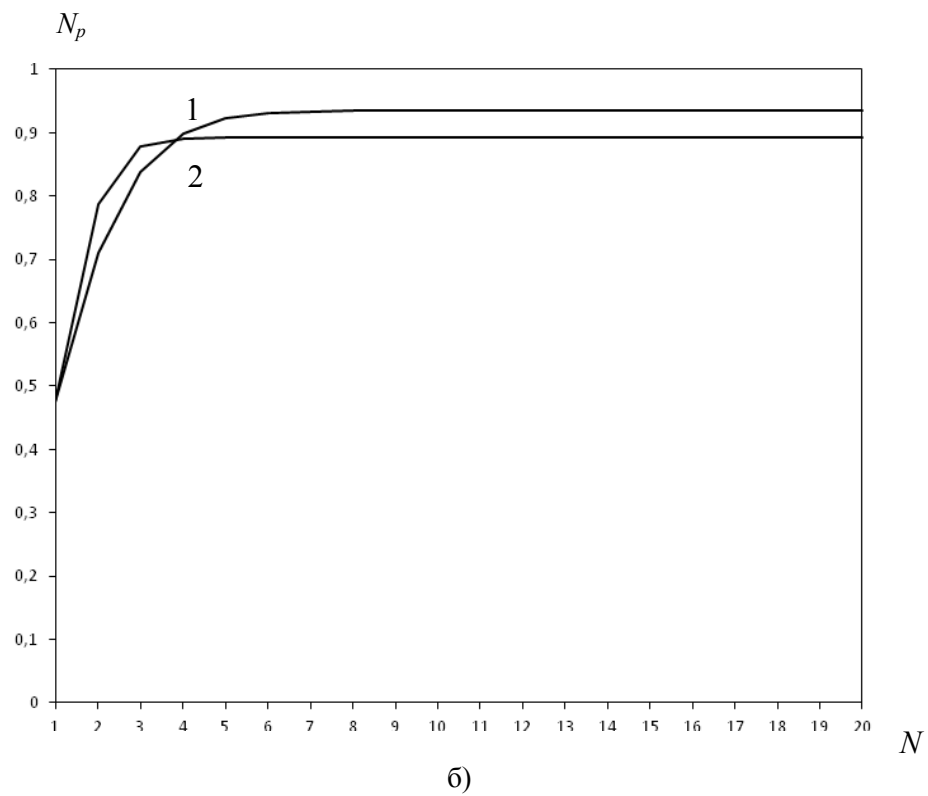


Рис. 2. Зависимость вероятности потери (а), среднее число первичных (б) и повторных (с) вызовов от числа каналов при второй схеме

Таким образом, сравнительный анализ характеристик системы при различных схемах вероятностей возвращения первичных вызовов показал, что для выбранных исходных данных вторая схема оказывается предпочтительной. При этом она оказывается лучшей при каждом варианте изменения вероятностей возвращения первичных вызовов. Вместе с тем, результаты численных экспериментов также показывают, что надлежащая схема вероятностей возвращения первичных вызовов существенным образом зависит от структурных и нагрузочных параметров модели.

Выводы

В работе предложен метод расчета характеристик математической модели многоканальной СМО с чистыми потерями и обратной связью. Исследованы две схемы возвращения первичных вызовов в каналы. В одной из них эта вероятность зависит от числа первичных вызовов в каналах, а в другой она определяется исходя из числа повторных вызовов в каналах. Предложенный метод основан на использовании систему уравнений равновесия для вероятностей состояний.

Список литературы

1. Lee M.H., Birukou A., Dudin A., Klimenok V., Kostyukova O., Choe C-H. Queueing model of a single-level single-mediator with cooperation of the agents // In

“Agent and Multi-Agent Systems: Technology and Applications” (Nguyen N.T. Ed). Springer, 2007. P. 447-455.

2. Gnanasambandam N., Lee S., Gautam N., Kumara S.R.T., Peng W., Manikonda V., Brinn M., Greaves M. Reliable MAS performance prediction using queueing models // IEEE 1st Symposium on Multi-Agent Security and Survivability. 2004. P. 55-64.

3. Gnanasambandam N., Lee S., Kumara S.R.T. An autonomous performance control framework for distributed multi-agent systems: A queueing theory based approach // AAMAS'05 July 25-29, 2005, Utrecht, Netherlands. P. 1313-1314.

4. Takacs L. A single-server queue with feedback // Bell System Technical Journal. 1963. Vol. 42. P. 505-519.

5. Takacs L. A queueing model with feedback // Operations Research. 1977. Vol. 11. No.4. P. 345-354.

6. Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U. The queueing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment // Austrian Journal of Statistics. 2005. Vol. 34. No.2. P. 101-110.

Статью представлено к печати 27.09.2014