УДК 519.5: 539.145:

[1]**Минаев Ю.Н.,** д.т.н.,
[2]**Филимонова О.Ю.,** к.т.н.,
[2]**Минаева Ю.И.,** к.т.н.

ПОДМНОЖЕСТВА УПОРЯДОЧЕННЫХ ПАР, ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПРИНЦИПОВ, И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ КАК НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

[1]**Национальный авиационный університет**
[2]**Киевский национальный университет строительства и архитектуры**

min_14@ukr.net

Показано, что представление универсального множества $X=\{x_i\}_{i=1}^{n}$, *n=m·m, на котором определено стандартное нечеткое множество* $\tilde{A}=\{a/\mu^a\}$, $\mu^a \to [0,1]$, $\tilde{A} \in X$ *в виде тензор-гранулы* $T_{\tilde{A}}^{X}$ *= reshape =(X, m, m) позволяет на основании сингулярной декомпозиции [u s v] =* $\mathrm{svd}(T_{\tilde{A}}^{X})$ *определить подмножество* f_{norm} *= [abs(u(:,1))*s(1,1)*max(abs(v(:,1))) abs(v(:,1))/max(abs(v(:,1)))] упорядоченных пар в виде левого и правого сингулярных векторов, обладающих свойствами близкими или совпадающими со свойствами нечеткого множества, функция принадлежности которого определена эвристически. Приведены примеры, показывающие возможность решения задач управления в условиях неопределенности без назначения функции принадлежности , располагая только универсальным множеством*

Ключевые слова: нечеткое множество, экстремальные принципы, сингулярная декомпозиция

Введение

Управление в условиях неопределенности, неполной (недостаточной) информации, слабой формализованности задачи – проблема, не имеющая, к сожалению, даже формального определения. Считается, что к этому классу задач относятся все те задачи, которые невозможно представить в виде корректной математической модели. Предложено характеризовать такой класс задач общим термином – нечеткость, отчетливо понимая абсолютную неизбежность разночтений и различного понимания проблемы, т.к. смысл термина нечеткость многозначен.

Трудно претендовать на исчерпывающее определение этого понятия, поэтому рассматривают некоторые его компоненты, к которым, в частности, в работе отнесены:

- многозначность входов;
- неточность представления данных, в частности, интервал;
- неполнота представленных данных, в частности, многомерные массивы (тензоры), имеющие пропуски данных, зашумленные данные и пр.

Утверждение Л.Заде, что «… нечеткость может быть ключом к пониманию способности человека справляться с задачами, которые слишком сложны для решения на ЭВМ» явилось основой для создания теории нечетких множеств (ТНМ), легшей в основу новых методов решения задач управления в условиях неопределенности. ТНМ путем введения функции принадлежности (ФП) позволила раскрывать (уменьшать) неопределенность, присваивая некоторым элементам множества дополнительно определенные значения, смысл и величины которых определялись эвристически, в частности, на основании логики здравого смысла, правдоподобных рассуждений и др. Введение дополнительной информации позволяет недостаточно формализованную задачу представить математически корректной, решение которой возможно стандартными методами.

Главным доводом в пользу введения ФП в ТНМ служит то, что, с одной стороны, она (ФП) как продукт интеллектуальной деятельности человека моделирует работу мозга, с другой стороны, позволяет при предельном переходе получать дополнительную поддержку в виде мат. статистики, фактически превращаясь в эту отрасль знаний.

Существующий уровень исследований

Работы последних лет, в частности, работы Д.Поспелова [1] и др. представителей советской и российской школ ИИ, а также зарубежных ученых [2] показали возможность формирования НМ без ФП в том виде, как ее предложил Л.Заде. Актуальной в этом плане является задача рассмотрения понятия информация и неопределенность с биологических позиций, наиболее свойственных человеческому и искусственному интеллекту. Наиболее полно эти вопросы рассмотрены в работах А.Хазена [3], в которых информацию предложено рассматривать как устранённую неопределённость для достижения цели.

Определение информации как устранённой неопределённости [3] автоматически и исчерпывающе обобщает и формализует многочисленные обиходные определения информации. Отметим в этой связи, что устранение неопределенности также связано с обнаружением скрытой информации (интеллектуальный анализ данных (ИАД)). Показано [4-5], что тензорные декомпозиции, в т.ч. сингулярная декомпозиция, представляют собой инструмент ИАД и кроме стандартных условий применения - предварительная обработка высокоразмерных БД, матричные аппроксимации и др., могут быть также использованы для извлечения новых знаний, что может явиться серьезным подспорьем в решении задач управления в условиях неопределенности.

Благодаря своей многомерной природе, тензоры обеспечивают мощные инструментальные средства для анализа и обработки сверх больших данных вместе с математическим аппаратом для обнаружения сложных структур данных, являющихся скрытыми. В работе [6] показано, что в условиях неопределенности решение разнообразных задач управления возможно на основании экстремальных принципов, обладающих (по сравнению с др. принципами функционирования объектов живой природы) большей обобщающей и эвристической силой. Изложим основные положения этой работы, чтобы пояснить переход к моделированию неопределенности на уровне ТНМ.

Раскрытие (или скорее, сокращение) неопределенности при помощи методов ТНМ, может рассматриваться как процесс определения состояния объекта, обладающего определенными (чаще всего экстремальными) свойствами. Например, для УМ, заданного в виде интервала, НМ с треугольной ФП является наиболее вероятным (субъективно) или даже наиболее устойчивым состоянием с точки зрения здравого смысла. Поиск выделенных – реально осуществляющихся – состояний объектов (систем) среди всех потенциально возможных в методологии экстремальных принципов требует, во-первых, умения каким-либо образом упорядочить состояния между собой на шкале "больше-меньше", "сильнее-слабее" и т.п. и, во-вторых – выбора экстремального из этих состояний в полученном упорядочении. На языке математических структур такой поиск означает умение упорядочить структурированные множества, описывающие систему, и выбрать наиболее "сильную" (или наиболее "слабую") структуру в качестве той, что выделяет реализующееся состояние из всех возможных. В работе [6] сформулированное утверждение названо "принципом экстремальной структуры".

Количество допустимых структурой системы преобразований зависит от двух характеристик структурированного множества: количества элементов в нем и заданной на множестве структуры. В рамках поставленной задачи по поиску экстремального принципа последовательность шагов, возникших в ходе исследования, такова [6]:

- следует отыскивать экстремальное состояние системы;
- для системы, моделируемой структурированными множествами, следует отыскивать состояние с экстремальной (например, с наиболее "сильной") структурой;
- следует отыскивать состояние системы, обладающее наибольшим (удельным) количеством допустимых структурой системы преобразований;
- следует отыскивать состояние, обобщенная энтропия которого максимальна.

Еще одна принимаемая предпосылка утверждает, что допустимые изменения системы всегда ограничены нехваткой каких-либо ресурсов. Из-за этого в экстремальном принципе, порождающем закон изменчивости*,* экстремум обязательно должен быть условным. Соответствующая формулировка экстремального принципа звучит так: из заданного состояния система переходит в такое состояние, для которого потребление ограничивающих рост ресурсов минимально в пределах, задаваемых необходимой степенью структурированности системы

Часто для определения ФП предлагается итерационный алгоритм согласования экспертных оценок, при этом собственно ФП предварительно назначается экспертно. Анализ показывает, что практически во всех работах явно или неявно полагают, что сами функции принадлежности или информация для их построения задаются экспертами на основе субъективных предпочтений, др. словами, не носят случайного характера.

Отметим, что НМ всегда задается на универсальном множестве, из элементов которого образованы все остальные множества, в т.ч. НМ, в качестве УМ могут быть, например, множество всех целых чисел, множество всех гладких функций, заданных на действительной оси, и др. На практике в качестве УМ, как правило, использовано множество действительных чисел, реже – множество вербальных значений, отражающих качественные значения. Более строго [7], НМ $\tilde{x}$ - совокупность упорядоченных пар $\{x/\mu(x)\}$, где элементы x-носители НМ, а $\mu(x)$ – ФП вида $\mu(x) \to [0,1]$, ФП определяет субъективную степень уверенности эксперта в том, что рассматриваемый носитель соответствует содержательному смыслу данного НМ, это определение считается универсальным.

Отметим неисследованность вопроса, насколько ФП, формализуя неопределенность, раскрывает (или уменьшает) ее, кроме того, насколько оправданы эвристики при ее назначении, могут ли они быть ошибочными, т.к. здравый смысл, положенный в их основу, не всегда является таковым. Имеется целый ряд работ, в которых показана негативная роль субъективно назначенной ФП [2]. В работе [8] показано, что в настоящее время большинство научных публикаций, имеющих дело с НМ, появляются без использования ФП. При этом как аксиома всегда предполагается наличие многозначных входов.

Наделение характеристической функции свойствами непрерывности позволило рассматривать подмножество упорядоченных пар как новый объект, позволяющий выделить скрытые знания, другими словами, раскрыть неопределенность, зафиксированную в универсальном множестве (УМ), на котором определено данное НМ.

НМ рассматривается в виде $\tilde{A}=\{a/\mu^a\}$ $\mu^a \to [0,1]$, $\tilde{A} \in X$, $X=\{x\}$, μ^a -ФП, $X=\{x\}$ - УМ (стандартное четкое множество), все основные результаты ТНМ получены именно в такой постановке [7]. В работах [2, 8] показано, что ТНМ не обязана развиваться в направлении безусловного дальнейшего использования ФП, целесообразность, использования которой определена практически исключительно ее визуализационными свойствами. В работе будет показано, что УМ позволяет получить скрытые знания относительно унифицированной ФП. В работах А.Левича [6] сформулирован принцип экстремальной структуры: из заданного состояния система переходит в такое состояние, для которого обобщенная энтропия максимальна в пределах, задаваемых доступными системе ресурсами.

ТНМ молчаливо предполагает, что неопределенность представлена в виде УМ $X=\{x\}$, раскрытие неопределенности (формализация и др.) обусловлено назначением ФП $\mu^a \to [0,1]$ и последующим формированием подмножества упорядоченных пар $\{a/\mu^a\}$, следовательно, состояние объекта характеризуется максимальной неопределенностью, когда он известен только на уровне УМ, каждый элемент которого может принимать любое значение в интервале $[x^{min}, x^{max}]$; $x^{min}, x^{max} \in X$, т.е. с энтропией H^X (энтропия интервала, не обязательно связываемая с вероятностью [6]), в то время как искусственно сформированное НМ – подмножество упорядоченных пар, повышает определенность, располагая известными ФП, имеет энтропию $H^{\tilde{A}}$, $H^X > H^{\tilde{A}}$.

Сравнивая структуры гранул [9] УМ и НМ, можно сделать вывод о том, насколько изменилась информация (появление скрытой информации) после введения ФП, независимо от способа ее получения. Рассматривая вопрос, что есть экстремальным для систем, в работе [6] показано, что главный компонент любой динамической теории – закон изменчивости исследуемой системы, т.е. свод правил, позволяющий выбрать из всех допустимых состояний системы те, что реализуются в действительности, и указать "траекторию" системы в ее "пространстве состояний". В нашем случае пространство состояний ограничено состояниями УМ - $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$, т.е. система, располагая информацией, скрытой в УМ, переходит в НМ на основании реализации некоторых экстремальных принципов.

Общая постановка задачи

Существует исходное множество данных (ИМД) –А, необходимо определить НМ - подмножество упорядоченных пар таких $\tilde{A} = f\left(\underbrace{B}_{Зн} / \underbrace{C}_{ФП}\right)$, где $\underbrace{B}_{Зн}$- значение, $\underbrace{C}_{ФП}$ - ФП такие , что $\|\mathbf{A}\text{-}\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}\|_F^2 \to \min$, возможно с дополнительными ограничениями. Может быть такая постановка задачи: в условиях неопределенности известно только множество возможных значений объекта. В простейшем случае набор чисел, который рассматривают как УМ $X=\{x_1:\Delta x:x_n\}$, X – начальное состояние (объект, заданный с априорным объемом информации), устранение неопределенности состоит в том, чтобы найти подмножество упорядоченных пар

$$\tilde{x}=\{x_1/\mu^{x_1}, \ldots \quad ,x_m/\mu^{x_m}\},\ \tilde{x}\in X$$

таких, что:

- μ^{x_j}, j=1,n; обладает формальными свойствами ФП $(\forall j)$ $\mu^{x_j}>0$, $\mu^{x_j}\to[0,1]$, при этом μ^{x_j} может в общем случае не означать семантически степень принадлежности элемента с четким значением x_j УМ X, $x_j \in X$;

- $\tilde{x}$ и X допускают представление в виде матричных гранул:

$$\tilde{x}=\left[x_1\ \mu^{x_1};\cdots;x_m\ \mu^{x_m}\right]^T, X=\left[x_1;\cdots;x_n\right]^T$$

или $X=\left[x_1 \quad 1;\cdots;x_n \quad 1\right]^T$; $\tilde{x}$ получено из условия $\min\limits_{X}\|X\text{-}\tilde{x}\|_F^2$ [11].

Ближайшие Кронекеровы произведения, получение новой скрытой информации на основе тензорных декомпозиций УМ. В работе [7] показано, что ближайшим четким множеством по отношению к заданному нечеткому $\tilde{x}=\{x/\mu^x\}$,

$\mu^x \to \ \to [0,1], \tilde{x} \in U$, т.е. расположенном на наименьшем евклидовом (или другом) расстоянии от данного НМ, $dist(\tilde{x}, X) \to min$, является множество с наименьшей нормой, т.е. оно получено из условия $\min\limits_{x \in X} \|\tilde{x}\text{-}x\|_F^2$ и представляет собой обычное множество с характеристиками:

$$\mu^X = \{0, \text{если } (x_i) < 0.5; 1, \text{если } (x_i) > 0.5; 0 \text{ или } 1, \text{если } (x_i) = 0.5.$$

Отметим, что, во-первых, для получения выводов [7] задача $\min\limits_{x \in X} \left\|\tilde{x}\text{-}x\right\|_F^2$ должна решаться с целым рядом дополнительных ограничений, о которых мало упоминают, а норму НМ $\tilde{x} = \{x/\mu^x\}$, $\mu^x \to \ [0,1], \tilde{x} \in U$ можно определить, только представив его в виде формализованного объекта - вектора, матрицы или др., в частности, тензорной НМ-гранулы (матрица $n \times n$).

Процедура определения ближайшего четкого множества может рассматриваться как процедура выявления новых (скрытых) знаний и аналогично ей определим объект, ближайший по норме к УМ. С этой целью приведем результаты [10], положенные в основу алгоритма решения поставленной задачи.

Лемма 2.2. Если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, тогда существуют ортогональные матрицы $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такие, что

$$U^T AV = \mathrm{diag}([\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_p]) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

где $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge ... \ge \sigma_p \ge 0$ и $p = min(m,n)$.

Задача

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^m, \\ y \in \mathbb{R}^n}} \left\|A\text{-}xy^T\right\|_2 = \left\|A\text{-}\sigma_1 u_1 v_1^T\right\|_2 = \sigma_2,$$

где u_1, v_1 - первые колонки матриц U и V.

$$\left\|A\text{-}xy^T\right\|_{F[robenius]}^2 = tr\left[(A\text{-}xy^T)^T (A\text{-}xy^T)\right] = tr(A^T A)\text{-}2y^T A^T x + x^T xy^T y.$$

Пусть $x=\alpha u_1$ $y=\beta v_1$, тогда последнее выражение преобразуется в выражение вида $\left\|A\text{-}xy^T\right\|_F^2 = \ = tr(A^T A)\text{-}2\alpha\beta\sigma_1 + (\alpha\beta)^2$ и минимум достигается при $i=1$ и $\alpha\beta=\sigma_1$.

Отметим, что $xy^T \equiv x \otimes y^T$, $m=n$; x,y интерпретируются как значение и ФП соответственно, $x \otimes y^T$-тензорная (Кронекерова) гранула, для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ определен vec-оператор, определяемый как

$$vec(A) = (a_{11}, ..., a_{m1}, a_{12}, ..., a_{m2}, ... a_{1n}, ..., a_{mn})^T$$

любая вектор-строка может быть матрицирована, т.е. представлена матрицей $m \times n$, в частности, путем использования процедуры МатЛаб *reshape* (параметры), т.е. *A=reshape*(*vec(A), m, n*).

Исходная задача рассматривается в виде $\|R\text{-}A \otimes B\|_F^2 = \left\|\hat{R}\text{-}ab^T\right\|_F^2$, где $a=vec(A)$, $b=vec(B)$ и $\hat{R}=vec(R)$. Решение этой проблемы есть производным от матричной сингулярной декомпозиция (*SVD*). Ближайшая *rank-p* матрица к данной матрице есть первые *p* термов в усеченном *SVD* в диадической форме $\sum_{i=1}^{p} \sigma_i U_i V_i^T$, где σ_i является наибольшим по величине сингулярным числом $\hat{R}$, U_i и V_i являются соответствующими левым и правым сингулярными векторами. Таким образом *SVD* для $\hat{R}$ реализовано так, что $a=abs(U_1)\sigma_1$ и $b=abs(V_1)$, где σ_1 - наибольшее сингулярное число $\hat{R}$ и U_1 и V_1 являются соответственно левым и правым сингулярными векторами.

НМ-интерпретация сингулярного разложения

Известно из курса линейной алгебры, что СР раскладывает М на три простых преобразования: поворот V^*, масштабирование Σ вдоль вращающихся координатных осей и второй поворот *U*.

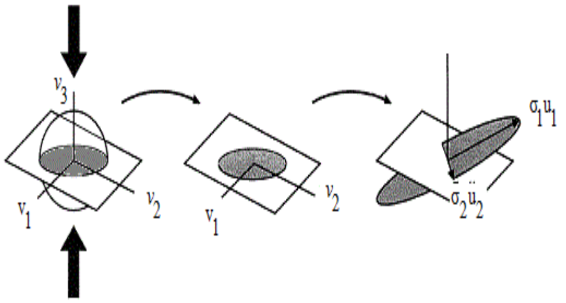

Рис.1. Иллюстрация процесса деформирования пространства $\mathbb{R}^n$ матрицей M

Длины σ_1 и σ_2 полуосей эллипса и есть сингулярные значения M. Геометрическая интерпретация сингулярного разложения, когда матрица M рассматривается как оператор, приведена ниже:

Пусть матрица M будет квадратной, т.е. рассматриваем случай представления НМ в виде тензор-гранулы, в этом случае имеем:

(i) только $u(:,1) \otimes v(:,1) \approx M$;

(ii) $(\forall i=1,n)\ 0 \le abs(v_{1,i}) \le 1, (v_{1,i}) = v(:,1)$;

(iii) $\sum_i v_{1,i}^2 = 1$.

Пример 1. Матрица $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$ имеет сингулярное разложение [u Σ v]=svd(**M**)		
u =	s =	v =
-0.58 -0.82	5.46 0	-0.40 0.91
-0.82 0.58	0 0.37	-0.91 -0.40

Легко видеть, что матрицы u и v ортогональны, $\mathbf{uu}^T = \mathbf{u}^T\mathbf{u} = \mathbf{I}$, также $\mathbf{vv}^T = \mathbf{v}^T\mathbf{v} = \mathbf{I}$ и сумма значений квадратов стол-бцов равна 1, т.е. $0.4^2+0.91^2=1$

Подмножество упорядоченных пар имеет вид: M_1= [abs(u(:,1)*s(1,1)) abs(v(:,1))] → $\begin{pmatrix}3.15 & 0.40\\4.47 & 0.91\end{pmatrix}$ или после нормировки

$$\left(\begin{pmatrix}3.15\\4.47\end{pmatrix}*0.91 \quad \begin{pmatrix}0.40\\0.91\end{pmatrix}/091\right)=\begin{pmatrix}2.87 & 0.44\\4.06 & 1.00\end{pmatrix}, \text{ т.е. } \mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\to\tilde{\mathbf{M}}=\{2.87/0.44\ ,4.06/1.00\}.$$

БКП, вычисленное на элементах тензор-гранулы

$$(u(:,1)*s(1,1))\otimes\ (v(:,1)) = \begin{pmatrix}1.27 & 2.88\\1.81 & 4.09\end{pmatrix}\approx$$

$\approx\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$ близко к исходному множеству. Отметим, что матричные декомпозиции, как например, SVD, широко используются в числовом анализе [11], хотя в НМ-анализе практически не используются. SV-разложение позволяет начальную матрицу представить в виде составных частей как суммы ранг-1 матриц, I×J матрица представлена как минимальная сумма ранг-1 матриц:

$$\mathbf{A} = \underbrace{(u_1\circ(\otimes)v_1)}_{A_1} + \underbrace{(u_2\circ(\otimes)v_2)}_{A_2} + \cdots + \underbrace{(u_r\circ(\otimes)v_r)}_{A_r},$$

где $u_i \in \mathbb{R}^I$ i $v_i \in \mathbb{R}^J$ для всех i, j = 1, 2,…, r. Оператор $\circ(\otimes)$ обозначает внешнее (или Кронекерово) произведение

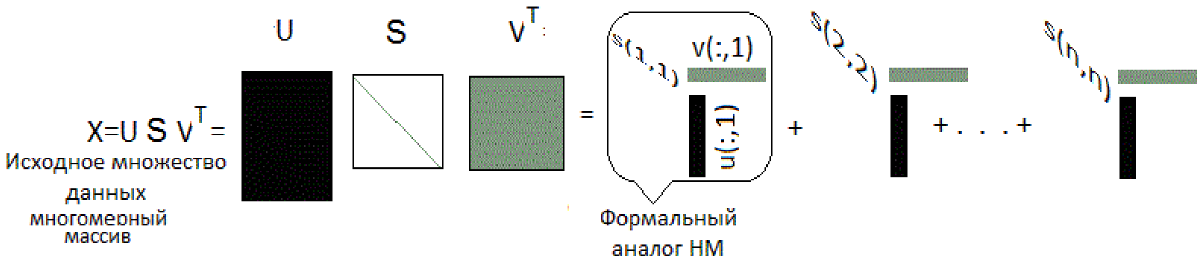

Рис.2. Сингулярная декомпозиция ИМД и использование сингулярных векторов как подмножества упорядоченных пар $\underbrace{(u_1 \otimes v_1)}_{\tilde{A}}$ (БКП)

Главным преимуществом декомпозиций есть то, что становится реальным базовый случай, когда $\mathbf{A} \cong \mathbf{A_1}$, что позволяет существенно упростить задачу и получать контролированный результат. В работе модель $\mathbf{A} \cong \mathbf{A_1}$ рассматривается как основная. Если учесть, что НМ $\tilde{a}=\{a/\mu^a\}, \mu^a \to [0,1]$, $\tilde{a} \in A$ имеет представление в виде тензор-гранулы $a \otimes \mu^a$, то можно утверждать, что множество упорядоченных пар

$$\hat{u}_{SV} = \left[abs(u(:,1)*s(1,1)\quad abs(v(:,1))\right],$$

где $\hat{u}_{SV}(:,1)$ выполняет роль значения, а $\hat{u}_{SV}(:,2)$ - ФП гораздо в большей степени отвечает определению НМ, чем НМ из [Коф], то объект $\hat{u}_{SV}$ будем называть *унифицированным НМ* (УНМ). Его особенностью является то, что он по крайней мере может быть сопоставлен условиям неопределенности абсолютно с теми же правами, что и эвристически сформированное НМ, а в большинстве случаев заменить НМ. В общем случае рационально провести параллельно расчет с НМ и квази НМ, и сравнить (проанализировать) полученные результаты.

Пример.

Создадим УНМ и рассмотрим его характеристики, с этой целью реализуем алгоритм:

1^0. Процедура матрицизации УМ: x=[3:0.5:7], t=reshape(x,3,3);

2^0. Формирование УНМ, подмножества упорядоченных пар, полученных на основе сингулярного разложения матрицы п. 1^0.

2.1. [u s v]=svd(t);

2.2. f=[abs(u(:,1))*s(1,1) abs(v(:,1))];

2.3. fnorm=[abs(u(:,1))*s(1,1)*max(abs(v(:,1))) abs(v(:,1))/max(abs(v(:,1)))]

Имеем:

$$\overbrace{X}^{УМ} = [3:0.5:7] = \overbrace{\begin{pmatrix} 3.00 & 4.50 & 6.00 \\ 3.50 & 5.00 & 6.50 \\ 4.00 & 5.50 & 7.00 \end{pmatrix}}^{t} \to \overbrace{\begin{pmatrix} 8.07 & 0.39 \\ 8.92 & 0.56 \\ 9.76 & 0.73 \end{pmatrix}}^{f} \overbrace{\begin{pmatrix} 5.88 & 0.54 \\ 6.49 & 0.77 \\ 7.11 & 1.00 \end{pmatrix}}^{f_{norm}}$$

Нормы: [norm(t,'fro') norm(f,'fro') norm(f_{norm},'fro')] $\to$ 15.49 15.52 11.36

Как видно, нормы заданного НМ и УНМ, полученных на основании сингулярного разложения УМ и последующего вычисления БКП, практически совпадают.

3^0. Дефадзификация УНМ:

3.1. по методу ЦТ:

Defuz f= sum(f(:,1).*f(:,2))/sum(f(:,2)) = 9.08;

Defuz f_{norm}= sum(fnorm(:,1).*fnorm(:,2))/sum(fnorm(:,2)) = 6.61;

3.2. След БКП:

tfk=kron(f(:,1),f(:,2)')	tfkn=kron(fnorm(:,1),fnorm(:,2)')
tfk = 3.18 4.53 5.88 3.51 5.00 6.49 3.84 5.47 7.11 trace(tfk)/3 = 5.10	tfkn = 3.18 4.53 5.88 3.51 5.00 6.49 3.84 5.47 7.11 trace(tfkn)/3= 5.10

Стандартное НМ $\tilde{5}_{trimf}$ примерно 5

x=[3:1/2:7]

x = 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00 5.50 6.00 6.50 7.00

μ^x=trimf(x,[3 5 7])

y = 0 0.25 0.50 0.75 1.00 0.75 0.50 0.25 0

yd=defuzz(x, μ^x,'centroid') = 5.00 дефадзификация НМ $\tilde{5}_{trimf}$, заданного в стандартной для ТНМ форме

yd=sum(z(:,1).*z(:,2))/sum(z(:,2)) = 5.00 дефадзификация НМ $\tilde{5}_{trimf}$, заданного в виде НМ-гранулы

norm([x' y'],'fro') = 15.58 представление НМ-гранулы $\tilde{5}_{trimf}$ для всего УМ

norm([3 0;5 1; 7 0],'fro') = 9.1652 усеченное представление НМ-гранулы $\tilde{5}_{trimf}$

Табл. 1. Таблица сравнительных оценок

$\tilde{5}_{trimf}$ примерно 5= timf(x,[3 5 7]), НМ $\tilde{5}_{trimf} \in$ x=[3:1/2:7]			Квази НМ x=[3:0.5:7], t=reshape(x,3,3);			
Фадзифицированное значение	Норма	Норма усеченного представления	Фадзифицированное значение тензор-гранулы	След тензор-гранулы	Норма тензор-гранулы	Норма усеченного представления
5	15.58	9.16	6.61	5.10	15.49 ÷15.52	11.36

Как видно из приведенной выше таблицы, квази НМ, полученное на основе сингулярного разложения УМ, дало результаты или практически совпадающие с результатами, полученными для эвристически сформулированной НМ, или сопоставимые с ними.

Выводы

1. ТНМ позволила раскрывать (уменьшать) неопределенность, присваивая некоторым элементам множества дополнительно определенные значения, смысл и величины которых определялись эвристически. Введение дополнительной информации позволяет недостаточно формализованную задачу представить математически корректной, решение которой возможно стандартными методами.

Исследования показывают, что в условиях неопределенности решение разнообразных задач управления возможно на основании экстремальных принципов, обладающих (по сравнению с др. принципами функционирования объектов живой природы) большей обобщающей и эвристической силой.

2. Тензорные декомпозиции, в т.ч. сингулярная декомпозиция, представляют собой инструмент ИАД и кроме стандартных условий применения - предварительная обработка высокоразмерных БД, матричные аппроксимации и др., могут быть также использованы для извлечения новых знаний, что может явиться серьезным подспорьем в решении задач управления в условиях неопределенности.

Если учесть, что НМ $\tilde{a}=\{a/\mu^a\}$, $\mu^a \to[0,1]$, $\tilde{a} \in A$ имеет представление в виде тензор-гранулы $a \otimes \mu^a$, то можно утверждать, что множество упорядоченных пар– УНМ

$$\hat{u}_{sv} = \begin{pmatrix} abs(u(:,1) * s(1,1) & abs(v(:,1)) \end{pmatrix},$$

где $\hat{u}_{sv}(:,1)$ выполняет роль значения, а $\hat{u}_{sv}(:,2)$ - ФП как объект гораздо в большей степени отвечает определению НМ, чем НМ из [7]. Его особенностью, является то, что он по крайней мере может быть сопоставлен условиям неопределенности абсолютно с теми же правами, что и эвристически сформированное НМ, а в большинстве случаев заменить НМ. В общем случае рационально провести параллельно расчет с НМ и УНМ, и сравнить (проанализировать) полученные результаты.

3. Унифицированное НМ, полученное на основе сингулярного разложения УМ, дало результаты или практически совпадающие с результатами, полученными для эвристически сформулированной НМ, или сопоставимые с ними.

Список литературы

1. Аверкин А.Н., Блишун А.Ф., Поспелов Д.А.,Тарасов В.Б. Круглый стол «Нужны ли функции принадлежности в будущей теории нечетких множеств?». – Новости ИИ. – 2001. – №2-3. – 36 с.
2. Hemanta K. Baruah. The Theory of Fuzzy Sets: Beliefs and Realities. International Journal of Energy, Information and Communications. Vol. 2, Issue 2, May 2011, 1.
3. Хазен А.М. Разум природы и разум человека. М.: НТЦ Университетский. 2000. (Рецензия Л.А. Блюменфельда. Биофизика. Т. 47. №2. С. 382. 2002.).
4. Cichocki A. Tensor Decompositions: A New Concept in Brain. Data Analysis? arXiv: 1305.0395v1 [cs.NA] 2 May 2013. –19 pp.
5. F Rama Devi Y., Venu Gopal P., and Sai Prasad PSVS. Fuzzy Rough Data Reduction Using SVD. – International Journal of Computer and Electrical Engineering, Vol. 3, No. 3, June 2011. P. 384- 389.
6. Левич А.П. Почему выполняются экстремальные принципы для энтропии и времени?Интернет-ресурс: http://elib.org.ua
7. Кофман А. Введение в ТНМ: пер. с франц. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
8. Dombi J.. Membership function as an evaluation Reseach Group of Theory of Automata.Интернет-ресурс:http://www.Dopti.com/~dombi/publications/1988-J.Dombi-Mem ber-ship_function_as_an_evaluation.pdf.
9. Handbook of Granular Computing. Edited by Witold Pedrycz, Andrzej Skowron and Vladik Kreinovich C _2008 John Wiley & Sons, Ltd. – 1116 pp.
10.Pitsianis N. P. The Kronecker product in approximation and fast transform generation., PhD,Cornell University,1997.– 205 pp.
11.Тыртышников Е.Е.Тензорные аппроксимации матриц, порожденных асимптотически гладкими функциями. Мат. сборник, Т. 194, №6, 2003. – С. 147-162.

Статью представлено в редакцию 5.09.2014