

## ОПТИМІЗАЦІЯ МОДЕЛЕЙ НЕСТАЦІОНАРНОГО ПОЛІНОМІАЛЬНОГО ТРАФІКУ КОМП'ЮТЕРНОЇ МЕРЕЖІ

Національний авіаційний університет

[nn05@ukr.net](mailto:nn05@ukr.net)

*Запропоновано метод оптимізації моделей випадкового нестационарного поліноміального трафіка комп'ютерних мереж*

**Ключові слова:** нестационарний трафік, комп'ютерна мережа, метод оптимізації

### Вступ

Проблема оптимального управління трафіком в комп'ютерних мережах знаходяться в центрі уваги дослідників. Залишаються актуальними задачі аналізу нестационарного поліноміального трафіку, оптимального моделювання динаміки нестационарного трафіку та інші [1, 2].

### Мета дослідження

Метою дослідження є розробка методу оптимізації параметрів моделей випадкового нестационарного поліноміального трафіку в телекомунікаційних і комп'ютерних мережах.

Для досягнення мети ставляться і розв'язуються наступні задачі:

- обґрунтувати і вибрати критерії оптимальності та керовані змінні в задачах оптимізації параметрів моделей випадкового нестационарного трафіку;
- розв'язати задачі оптимізації моделей трафіку з  $n$  станами.

### Постановка задачі дослідження

Розглянемо вибір критеріїв оптимізації з використанням метрик просторів Евкліда і Гільберта, які дозволяють оптимально вибрати числові характеристики керованих змінних для дискретного та неперервного випадків. У просторі Евкліда критерій оптимізації вибору квантованих значень трафіку може бути представлений у вигляді:

$$\varepsilon^2(Z_1, Z_n) = \sum_{t_k=0}^N [m(t_k) - M(t_k, Z_1, Z_n)]^2, \quad (1)$$

де  $N$  – загальне число моментів спостере-

ження за трафіком;  $t_k$ ,  $k$  – ий момент спостережень за математичним сподіванням трафіку;  $n$  – число станів трафіку ( $n = 2, 3, 4$ );  $m(t_k)$  – значення математичного сподівання еталону трафіку в момент  $t_k$ ;  $M(t_k, Z_1, Z_n)$  – значення математичного сподівання моделі трафіку;  $Z_1, Z_n$  – квантовані значення трафіку.

Аналогічно вибирається критерій оптимізації дисперсії моделі трафіку

$$\varepsilon^2(d_1, d_n) = \sum_{t_k=0}^N [D_0(t_k) - D_M(t_k, d_1, d_n)]^2, \quad (2)$$

де  $N$  – загальне число моментів спостереження за дисперсією трафіку,  $t_k$ ,  $k$  – ий момент спостережень за дисперсією трафіку,  $n$  – число станів трафіку,  $D_0(t_k)$  – значення дисперсії еталону трафіку в момент часу  $t_k$ ,  $D_M(t_k, d_1, d_n)$  – значення дисперсії моделі трафіку в момент часу  $t_k$ ,  $d_1, d_n$  – параметри дисперсії моделі трафіку, що розглядаються як змінні оптимального управління.

Оптимальні квантовані значення трафіку визначають із системи рівнянь оптимізації  $n$ -го порядку, яку отримують класичним методом пошуку екстремумів функцій. Система рівнянь оптимізації  $n$ -го порядку відносно невідомих  $Z_i$  має вигляд:

$$\frac{d\varepsilon^2(Z_i)}{dZ_i} = 0, \quad i = 1, n, \quad (3)$$

Аналогічно визначаються оптимальні значення параметрів дисперсії моделі трафіку із системи рівнянь оптимізації:

$$\frac{d\varepsilon^2(d_i)}{dd_i} = 0, \quad i = 1, n, \quad (4)$$

**Виклад основних результатів дослідження.**

Використовуючи прийняті апроксимації математичного сподівання для еталону і моделі, отримуємо наступну форму критерію оптимізації математичного сподівання у вигляді

$$\varepsilon^2(Z_1, Z_n) = \sum_{t_k=0}^N [t_k (m_1 - m_2 t_k) - \sum_{i=1}^n Z_i P_i(t_k)]^2, \quad (5)$$

де  $m_1 = 2$  – математичне сподівання випадкового параметру  $a_1$  еталону,  $t_k$ ,  $k$  – ий момент часу спостережень,  $m_2 = -1$  – математичне сподівання випадкового параметру  $a_2$  еталону,  $P_i(t_k)$  – ймовірність перебування трафіку у  $i$ -му стані.

Еталон випадкового нестационарного трафіку задається в поліноміальній канонічній формі

$$Z(t, a_1, a_2) = a_2 t^2 + a_1 t, \quad (6)$$

де випадкові величини мають відомі математичні сподівання і дисперсії

$$M[a_1] = m_1, \quad M[a_2] = m_2, \quad (7)$$

$$D[a_1] = D_1, \quad D[a_2] = D_2 \quad (8)$$

Для оптимізації дисперсії моделі використовується критерій

$$\varepsilon^2(d_1, d_n) = \sum_{t_k=0}^N [D_2 t_k^4 + D_1 t_k^2 - \sum_{i=1}^n d_i P_i^2(t_k)]^2, \quad (9)$$

де  $d_1, d_n$  – параметри дисперсії моделі, значення яких оптимізується із умови найкращого наближення дисперсії еталону трафіку.

Аналогічно виконується оптимізація параметрів моделей трафіку з використанням метрики простору Гільберта

$$\varepsilon^0(Z_1, Z_n) = \int_0^1 [t_k (2 - t_k) - \sum_{i=1}^n Z_i P_i(t_k)]^2 dt_k \quad (10)$$

Для оптимізації параметрів дисперсії моделі в просторі Гільберта використовується критерій

$$\varepsilon^2(d_1, d_n) = \int_0^1 [D_2 t_k^4 + D_1 t_k^2 - \sum_{i=1}^n d_i P_i^2(t_k)]^2 dt_k \quad (11)$$

Критерії оптимізації середніх квантованих значень  $Z_1, Z_n$  у вигляді функціоналів (10-11) визначаються класичним методом пошуку мінімуму цих функціоналів  $Z_{1opt}, Z_{nopt}$ :

$$\min_{Z_1, Z_n} \varepsilon^2(Z_1, Z_n) = \varepsilon_{min}^2(Z_{1opt}, Z_{nopt}), \quad (12)$$

Беручи похідні по параметрам  $Z_1, Z_n$

від функціоналів (10-11), дорівнюючі їх нулю, одержуємо систему з  $n$  рівнянь оптимізації щодо невідомих значень  $Z_1, Z_n$ .

Для дискретного випадку:

$$\sum_{t_k=0}^N [t_k (2 - t_k) - \sum_{i=1}^n Z_i P_i(t_k)] P_j(t_k) = 0, \quad j=1, n. \quad (13)$$

Для неперервного випадку:

$$\int [t_k (2 - t_k) - \sum_{i=1}^n Z_i P_i(t_k)] P_j(t_k) dt_k = 0, \quad j=1, n. \quad (14)$$

За логічним смислом ці рівняння є балансними рівняннями виду:

$$\sum_{t_k=0}^N [t_k (2 - t_k)] P_j(t_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{t_k=0}^n Z_i P_i(t_k) P_j(t_k), \quad j=1, n.$$

$$\int [t_k (2 - t_k) P_j(t_k)] dt_k = \int \sum_{i=1}^n Z_i P_i(t_k) P_j(t_k) dt_k, \quad j=1, n.$$

Системи рівнянь приводяться до канонічної форми систем з  $n$  лінійних алгебраїчних рівнянь

$$AZ = B \quad (15)$$

де елементи матриці  $A$  складаються з коефіцієнтів при невідомих координатах  $Z_1, Z_n$  вектора  $Z$ , а праві частини рівнянь створюють вектор  $B$ .

При  $n = 2$  СЛАР має вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} Z_1 + a_{12} Z_2 &= b_1 \\ a_{21} Z_1 + a_{22} Z_2 &= b_2 \end{aligned}, \quad (16)$$

де елементи матриці  $A$ , наприклад для неперервного випадку, розраховуються за наступними формулами:

$$a_{11} = \int_0^1 P_1(t_k) P_1(t_k) dt_k \quad (17)$$

$$a_{12} = \int_0^1 P_1(t_k) P_2(t_k) dt_k \quad (18)$$

$$a_{21} = \int_0^1 P_2(t_k) P_1(t_k) dt_k \quad (19)$$

$$a_{22} = \int_0^1 P_2(t_k) P_2(t_k) dt_k \quad (20)$$

$$b_1 = \int_0^1 P_1(t_k) [t_k (2 - t_k)] dt_k \quad (21)$$

$$b_2 = \int_0^1 P_2(t_k) [t_k (2 - t_k)] dt_k \quad (22)$$

**Приклад 1.** Визначаються оптимальні квантовані значення трафіку при наступних початкових даних:  $P_{10} = 0.95, P_{20} = 0.05, \eta = 3.4141$ .

Використовуючи стандартну процедуру *MathCAD Isolve (A,B)* отримуємо:

$$a_{11} = 0.1320, a_{12} = 0.1370, b_1 = 0.1076$$

$$a_{21} = 0.1370, a_{22} = 0.5938, b_2 = 0.5589$$

$$Z_{1opt} = -0.2127; Z_{2opt} = 0.9904.$$

Аналогічно розв'язуються задачі для інших  $n$  станів. Зі збільшенням розмірності моделі розширюються можливості оп-

тимального управління точністю апроксимації еталонного трафіку.

Оптимальні квантовані значення керування змінних одержують по правилу Крамера :

$$Z_{10} = \frac{|A1|}{|A|}, Z_{20} = \frac{|A2|}{|A|}, Z_{30} = \frac{|A3|}{|A|}, Z_{40} = \frac{|A4|}{|A|} \quad (23)$$

де  $|A|, |A1|, |A2|, |A3|$  - визначники системи рівнянь (15) при  $n=3$ ,  $|A|, |A1|, |A2|, |A3|, |A4|$  - визначники системи рівнянь (15) при  $n=4$ .

Шляхом підстановки цих значень у функціонали (11) при  $n=3$  і  $n=4$ , знаходяться мінімальні значення (12).

Оптимальні квантовані значення за формулою (23) практично рівні:

$$\text{Для дискретного випадку} \\ Z_{10} = 0.293 \quad Z_{20} = 0.246 \quad Z_{30} = 1.054 \quad (24)$$

$$\text{Для неперервного випадку} \\ Z_{10} = 0.071 \quad Z_{20} = 0.481 \quad Z_{30} = 1.046. \quad (25)$$

Мінімальні значення цільових функціоналів і середнє квадратичних похибок моделювання математичного очікування еталонного трафіку мають наступні значення:

$$\begin{aligned} &\text{- для дискретного випадку} \\ &\varepsilon_{\min}^2(Z_1, Z_2, Z_3) = 9.22304 \times 10^{-14} \\ &\sigma_{\min} = \sqrt{9.22304 \times 10^{-14}} = 3.03694 \times 10^{-7} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &\text{- для неперервного випадку} \\ &\varepsilon_{\min}^2(Z_1, Z_2, Z_3) = 1.369 \times 10^{-4} \\ &\sigma_{\min} = \sqrt{1.369 \times 10^{-4}} = 0,0117 = 1,17\% \end{aligned} \quad (27)$$

Для дискретного випадку мінімальне значення похибки значно менше ніж в неперервному випадку, контроль адекватності дискретних моделей виконується

всього лише в  $N$  точках.

Мінімальне значення середнього коефіцієнту варіації похибки на інтервалі нестационарності становить:

$$\begin{aligned} &\text{- для дискретного випадку} \\ &V_{\min} = \frac{\sigma_{\min}}{m_0} = \frac{3.03694 \times 10^{-7}}{0,667} = 4.553132 \times 10^{-7} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\text{- для неперервного випадку} \\ &V_{\min} = \frac{\sigma_{\min}}{m_0} = \frac{0.0117}{0,667} = 1.8\% \end{aligned} \quad (29)$$

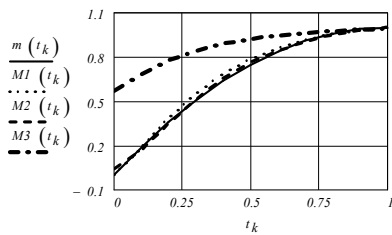
На рис. 1 показані результати моделювання математичного очікування еталонного нестационарного трафіку  $m(t_k)$  оптимізованою в просторі Гільберта  $M(t_k)$  з параметрами (24), і показником точності моделювання (28), оптимізованою в просторі Евкліда моделлю  $M_1(t_k)$ , а також моделлю  $M_2(t_k)$ , в якій в ролі квантованих значень використані середні значення квантів. Порівнюючи графіки неважко відмітити, що оптимізована в просторі Гільберта модель  $M(t_k)$  з параметрами (25), і показником точності моделювання (29) дає найкращі результати моделювання еталонного трафіку.

Визначимо вплив інтенсивності переходів на оптимальні рішення. Представимо цільові функціонали як функції інтенсивності  $\eta_{11}$ :

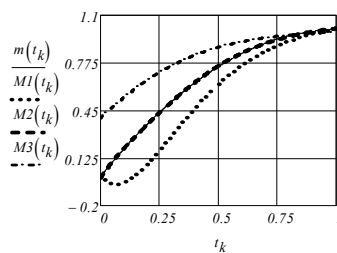
$$\begin{aligned} &\text{- для дискретного випадку} \\ &F5(\eta_{11}, t_k) = \sum_{t_k=0}^1 [t_k (2-t_k) - (\sum_{i=1}^n Z_{iopt} P_i(t_k, \eta_{11}))]^2 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &\text{- для неперервного випадку} \\ &F5(\eta_{11}, t_k) = \int [t_k (2-t_k) - (\sum_{i=1}^n Z_{iopt} P_i(t_k, \eta_{11}))]^2 dt_k \end{aligned} \quad (31)$$

де ймовірності позначені як функції інтенсивності  $\eta_{11}$ .



а)  $n = 3$

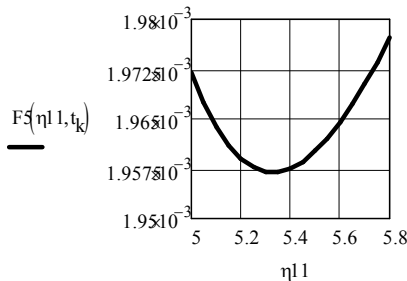


б)  $n = 4$

Рис. 1. Порівняння моделей нестационарного трафіку з еталоном

Знайдемо графічним методом мінімум функціонала по  $\eta_1$  (рис. 2) при оптимальних квантованих значеннях трафіку. Для дискретного випадку одержимо  $\eta_{1opt} = 5.31$ ; для неперервного випадку одержимо  $\eta_{1opt} = 5.45$ .

При даних значеннях інтенсивності



досягаються мінімальні значення відповідних функціоналів:

- для дискретного випадку

$$F5(z_1, z_2, z_3, \eta_{1opt})_{min} = 1.28 \cdot 10^{-4} > 9.22 \cdot 10^{-14} \quad (32)$$

- для неперервного випадку

$$F5(z_1, z_2, z_3, \eta_{1opt})_{min} = 1.97 \cdot 10^{-1} < 1.36 \cdot 10^{-4} \quad (33)$$

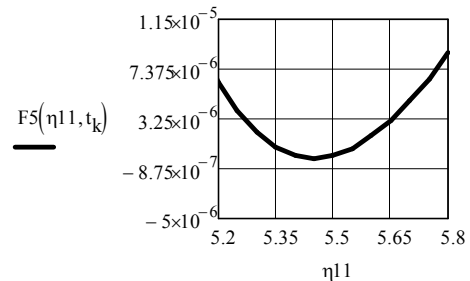


Рис. 2. Пошук оптимальних значень  $\eta_{11}$

Отже, для дискретного випадку підбором  $\eta_1$  оптимальне рішення поліпшити не вдається.

Представимо цільові функціонали як функції інтенсивності  $\eta_2$ :

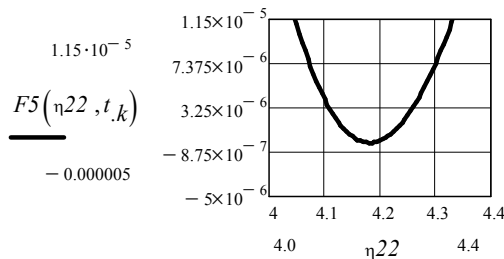
- для дискретного випадку

$$F5(\eta_{22}, t_k) = \sum_{t_k=0}^l [t_k (2 - t_k) - (\sum_{i=1}^n Z_{iopt} P_i(t_k, \eta_{22}))]^2 \quad (34)$$

- для неперервного випадку

$$F5(\eta_{22}, t_k) = \int [t_k (2 - t_k) - (\sum_{i=1}^n Z_{iopt} P_i(t_k, \eta_{22}))]^2 dt_k \quad (35)$$

Для дискретного випадку



Для неперервного випадку

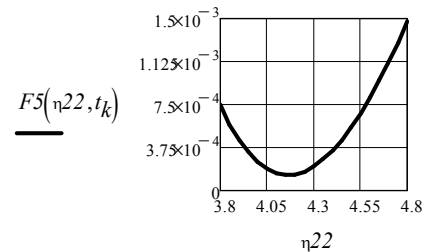


Рис. 3. Пошук оптимальних значень  $\eta_{22}$

Знайдемо графічним методом мінімуми функціоналів по  $\eta_2$  при оптимальних квантованих значеннях трафіку.  $\eta_{2opt} = 4.182$ ; для неперервного випадку одержимо  $\eta_{2opt} = 4.17$ . При цьому значенні інтенсивності мінімальні значення функціоналів становлять:

- для дискретного випадку

$$F5(\eta_{22}, t_k)_{min} = 1.22 \cdot 10^{-10} > 9.22 \cdot 10^{-14} \quad (36)$$

- для неперервного випадку

$$F5(\eta_{22}, t_k)_{min} = 1.35 \cdot 10^{-4} < 1.36 \cdot 10^{-4} \quad (37)$$

Отже, в дискретному випадку підбором  $\eta_2$  оптимальне рішення також поліпшити не можна, що обумовлено нелі-

нійною залежністю цільових функціоналів від  $\eta_2$ .

Розглянемо вплив початкової ймовірності  $P_{10}$  на оптимальні рішення. Представлення цільового функціонала у вигляді функції параметра  $P_{11}$ :

- для дискретного випадку

$$F6(P_{11}) = \sum_{t_k=0}^l [t_k(2-t_k) - ((Z_{1opt}P_1(t_k, P_{10}) + Z_{2opt}P_2(t_k) + Z_{3opt}P_3(t_k)))^2] \quad (38)$$

- для неперервного випадку

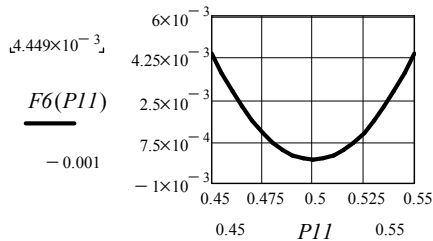
$$F6(P_{11}) = \int [t_k(2-t_k) - ((Z_{1opt}P_1(t_k, P_{10}) + Z_{2opt}P_2(t_k) + Z_{3opt}P_3(t_k)))^2] dt_k \quad (39)$$

Визначимо вплив зміни початкових значень ймовірності  $P_{11}$  на оптимальне рішення. Графіки (рис. 4а) ілюструють

поведінку функціонала (38) в околиці точки  $P_{11} = 0.5$ , а рис. 4,б - поведінку функ-

ціонала (39) при  $P_{11} = 0.5$ . Оптимальне рішення одержано при  $P_{10} = 0.5$ .

Для дискретного випадку, а



Для неперервного випадку, б

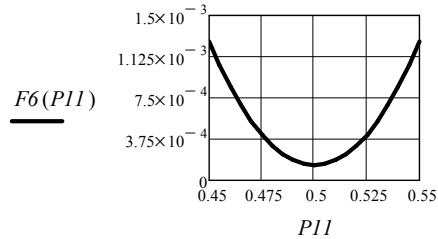
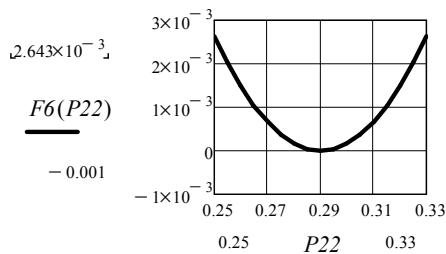


Рис. 4. Вплив зміни параметра  $P_{11}$  на оптимальні рішення

На рис. 5 аналогічно показано вплив параметра  $P_{22}$  на оптимальні рішення.

Для дискретного випадку, а



Для неперервного випадку, б

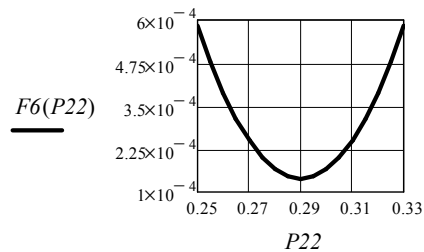


Рис. 5. Вплив зміни параметра  $P_{22}$  на оптимальне рішення

Таким чином, через лінійність рівнянь оптимізації відносно  $P_{11}$ ,  $P_{22}$ , одержане оптимальне рішення є оптимальним і по параметрам  $P_{10}$ ,  $P_{20}$ ,  $P_{30}$ .

### Висновки

За результатами порівняльного аналізу параметрів модельного і еталонного трафіку при різних значеннях  $n$  можна зробити наступні висновки:

1. Зі зростанням порядку моделей нестационарного трафіку  $n$  збільшується точність моделювання трафіку. Цей ефект особливо проявляється у випадках, коли порядок моделей перевищує порядок еталонного поліному. При  $n=4$  досягається практично повна адекватність моделювання математичного сподівання і дисперсії нестационарного трафіку, зокрема в неперервному випадку.

2. Моделі нестационарного трафіку, що оптимізовані в просторі Евкліда, поступаються по точності моделям, оптимізованим у просторі Гільберта. Проте вони можуть знайти широкі застосування в

практичних додатках, оскільки їх побудова вони не вимагає значних об'ємів початкових даних та високої швидкодії систем вимірювання і управління.

Результати роботи можуть бути теоретичною основою для організації оптимального управління трафіком в телекомунікаційних і комп'ютерних мережах.

### Список літератури

1. Поповский В.В., Звягольская Г.В. Методы оценки нестационарного состояния телекоммуникационных систем // Радиотехника: Всеукр. межведом. научн-техн. сб. – 2007. – Вып.147. – С. 5–9.
2. В.О. Ігнатов, О.В. Андреев, В.І. Андреев Метод двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестационарних сигналів на тлі завад // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. праць – К.: НАУ, 2010. – Вип. 4(32). – С.41–46.

Статтю подано до редакції 06.10.2014