

УДК 517.11+519.92

Минаев Ю.Н., д.т.н.,
Филимонова О.Ю., к.т.н.,
Минаева Ю.И., к.т.н.

КРОНЕКЕРОВЫ (ТЕНЗОРНЫЕ) МОДЕЛИ НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ГРАНУЛ

Национальный авиационный университет

minaev@ramber.ru

Рассматриваются вопросы, связанные с гранулированием информации и гранулярными вычислениями (гранулированный компьютеринг) при представлении НМ-гранулы в виде Кронекерова произведения. Показана универсальность предложенной модели. Приведены примеры, показывающие эффективность применения тензорных информационных гранул, полученных как для НМ, так и для исходных множеств данных, представленных в виде многомерных массивов

Ключевые слова: тензор, нечеткое множество, Кронекерово произведение, норма, информационная гранула, SVD-разложение

Введение

Гранулирование информации и гранулярные вычисления (гранулированный компьютеринг) обусловлены необходимостью повышения эффективности решения задач управления в условиях неопределенности. Нечеткое множество (НМ) $\tilde{X} = \{x/\mu^x\}$ как информационная гранула (ИГр или просто Гр)-примитив играет важную роль в решении этой проблемы, но способ представления НМ как подмножества упорядоченных пар, наделенных субъективной функцией принадлежности (ФП), в ряде случаев - серьезное препятствие на этом пути. Многообразии ФП оказалось не востребовавшимся, практическое большинство задач управления обходится треугольной ФП, нечеткая математика, базируясь на принципе нечеткого расширения и интервального анализа, страдает целым рядом необоснованных предположений, что естественно не повышает доверия к ее результатам, в частности, необоснованные эвристики при определении обратных величин для НМ (по умножению и сложению) весьма ощутимы в достаточно сложных задачах.

Хотя НМ рассматривается как Гр (НМ-Гр), ее свойства изучены недостаточно, в самом определении НМ и Гр заложено противоречие. В данной работе

рассматривается возможность определения новых свойств НМ-Гр, представленных в тензорно-матричной форме. Отметим, что ИГр играют ведущую роль в представлении и обработке знаний когнитивными агентами: выделение скрытых знаний, определение новых свойств информационных объектов на основе методов интеллектуального анализа данных (ИАД), например, интеллектуальный кластерный анализ в условиях неопределенности [1] и др. задачи успешно решаются при использовании гранулярной парадигмы.

Современное состояние проблемы, основные определения.

Первой работой, в которой поставлен вопрос гранулирования нечеткой информации и определения способов ее обработки, была работа Л.Заде [2], в которой Гр определена как группа объектов (или точек), которые представлены (изображены) вместе на основе не/различимости, сходства, близости. Последующее развитие идеи гранулирования нечеткой информации получили в работе [3]. В работе [4] приведены примеры, показывающие, что гранулирование, в сущности, есть иерархическим. Практически все авторы отмечают, что основная идея ГрК – использование групп, классов, или кластеров элементов, называемых

гранулами, в силу того, что они не могут быть определены более подробно. Необходимость рассматривать Гр возникает тогда, когда возникает необходимость скрыть в них (Гр) неопределенность, неполноту или недостоверность информации, типичный пример - теория грубых множеств [5]. Кроме того, даже в ситуациях, где имеется подробная и доступная информация, может быть достаточно оснований использовать Гр, чтобы получить эффективное и практичное решение, т. к. фактически для многих прикладных проблем точные решения не требуются.

В работе [3] приведено определение Гр как формальной группировки объектов, определенных обобщенным ограничением, там же представлена Декартова Гр, определяемая как Декартово произведение Гр, например, $A_i \times B_j$. Термины гранула и гранулирование своим появлением обязаны проблемам ИАД, попытка моделирования информационных систем на уровне моделей искусственного интеллекта неизбежно приводит к ИГр, т.к. их наличие есть атрибут естественного интеллекта. При построении Гр возникает вопрос: что должно быть минимальной Гр, из которой должны создаваться крупные Гр, уровень грануляции (размер и структура Гр) имеет существенное значение для описания проблемы и выбора стратегии ее решения, следовательно, во всех ли случаях НМ с треугольной ФП достаточно для построения сложных Гр.

Отметим важную особенность Гр – целостность динамической информационной структуры и ее целенаправленность, размер Гр является проблемно-ориентированным и зависящим от задачи и предполагаемого способа ее решения, преобразование Гр – проблема в гранулированном вычислении. В работе [9] показано, что природа человеческого разума такова, что вся воспринимаемая мозгом информация является гранулированной, величину гранулированности можно определять, используя ширину Гр, если Гр есть НМ, представленное в координатах <значение/ФП>. Такой подход позво-

ляет полагать, что в пределе при уменьшении степени гранулированности имеем Гр бесконечно малой ширины – точку, т.е. такой объект, который используется в стандартной математике. Отметим, что здесь допущена неточность – стандартная математика нормально работает не только с числом, но и множеством чисел, когда в роли числа выступает матрица, поэтому гранула должна рассматриваться не только как результат предельного перехода, т.е. в виде точки.

Интерпретации и классификации Гр даны в работах [2-3]. Относительно классификации Гр, следует отметить, прежде всего, их многообразие: Гр могут отличаться по своей природе, сложности, размеру, уровню абстрактности-детализации, термин «Грануляция» предполагает процессы композиции (формирование более крупных Гр или объединение группы элементов) и декомпозиции (формирование более мелких Гр). В цитированных работах Л.Заде приведены типичные модели Гр, отметим те, которые связаны с рассматриваемой задачей: интервалы; НМ; лингвистические переменные; кластеры.

Примитивы языка гранулярных вычислений – покрытия, разбиения, окрестности. Данный контекст нуждается в уточнении, в состав примитивов следует внести тензоры и операции над ними [5, 6]. Гранулирование информации можно реализовать методами классификации и кластерного анализа, с помощью отношений вложенности и нестандартных множеств. Приведем основные определения [10 11], необходимые для дальнейшего понимания изложенного.

Определение 1. Гр данных – множество с элементами x как членами НМ \tilde{G} с градациями из λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, т.е.
$$g = \{x \mid x \in_{\lambda} \tilde{G} \subseteq U\}$$
, где U – универсум.

Определение 2. Вычислительная Гр, кратко Гр, – основная математическая структура, которая обладает стабильной топологией и, по крайней мере, устрой-

ством (виртуальним) вычислительной способности или поведения.

Определение 3. ГрК – новая вычислительная методология, которая моделирует и осуществляют вычислительные структуры и функции гранулярной системой, где каждая Гр в системе выполняет встроенную функцию или поведение, взаимодействуя с другими Гр в системе.

В Лемме 1 показано, что обобщенный принцип системной абстракции утверждает, что система может быть представлена как целое на данном уровне k аргументации, $1 \leq k \leq n$, без знания деталей на уровнях ниже указанного $k-1$.

Постановка задачи

ГрК имеет достаточно много определений, приведем одно из них, предложенное в работе [12]: «... современная парадигма, методология и методика информационного анализа неочевидно структурированных ... систем («нечетко» структурированных систем) ...». Соответственно гранулярные вычисления включают в себя мягкие» вычисления (МВ). Отметим, что МВ – обобщенный термин, включающий в себя математические теории общей топологии, теорию НМ, нейросетевые вычисления и др.

Естественно, Гр состоит из элементов, при этом, элемент может быть Гр, а Гр может быть элементом другой Гр. Формально объединение элементов в Гр, как это отмечалось выше, определяется исходя из сходства элементов, «близости» элементов и т.д., на практике нередко ограничиваются т.н. визуальным сходством [13]. Каждая Гр обладает внутренними, внешними и контекстуальными свойствами. Процесс грануляции представляет собой итеративную алгоритмическую процедуру последовательного выделения частей различного уровня общности и согласования уровней абстракции и редукции при анализе неочевидно структурированных динамических систем. Хотя понятие «минимальной» (или «начальной» Гр), из которых следует «собирать» крупные Гр, не определено и за-

висит от контекста рассматриваемой проблемы, ниже понятия множества элементов (в общем случае нечеткого) не опускаются. Это обстоятельство отображается, в частности, в том, что отношения между Гр описываются с помощью нечетких графов и систем нечетких логических правил типа «если ..., то ...».

В работе [14] рассмотрен метод представления информационных Гр, индуцированный нечеткостью, который является наиболее часто применяемым, показано, что нечеткая Гр (в общем случае НМ) может быть представлена как произведение независимых скалярных экспоненциальных функций. Отметим, что в данной работе Гр рассматривается, в частности, как тензорное произведение векторов, представляющих собой элементы множества упорядоченных пар, т.е.

$$\{x/\mu^{(x)}\} \rightarrow \left(x \otimes \mu^{(x)} \right).$$

Наиболее полно роль НМ как пользователь-ориентированного процессорного каркаса ГрК отражена в работе [15], НМ выступают как гранулированные представители числовых данных, компонентов в некоторый контекст. Используя ФП, пытаются объединить их в виде компактного объекта. НМ выступают как агрегаты числовых данных, НМ могут формироваться на основе числовых данных через их кластеризацию (группирование).

Основные вопросы ГрК практически сосредоточены и рассматриваются в двух взаимосвязанных аспектах: формирование Гр и вычисления с полученными Гр [16]. Формируя новую форму Гр, имеют дело с образованием, представлением и интерпретацией Гр, которая фокусируется в сторону семантики гранулярной конструкции.

Отметим еще одну особенность НМ-Гр, не учитываемую при гранулярном компьютеринге. Известно, что одной из характеристик Гр является их целостность, т.е. с гранулой необходимо работать, не расчленяя ее на компоненты. НМ как гранула, таковой на самом деле не является, т.к. при реализации операций нечеткой

арифметики, как известно, расчлениают НМ – подмножество упорядоченных пар, на 2 компоненты: 1- величины, 2- ФП, с величинами выполняют арифметические операции, с ФП – логические (определение *maxmin* или *minmax*). Отметим, что с тензорной гранулой, предложенной в работе, выполняются только операции одного вида и таким образом свойство целостности сохраняется.

Задача, которая ставится в данной работе такова: необходимо предложить такую форму НМ-Гр, чтобы она могла быть использованной и в стандартной и в нечеткой математике. Такую возможность дает Кронекерово (тензорное) произведение (КП). Использование информации любой степени гранулированности в задачах моделирования, оптимального управления и др. задачах в современных ПК возможно без потери свойств исследуемого объекта. Контролируемая степень гранулированности на основе КП позволяет существенно сократить объемы хранимой информации, что не только может привести к повышению быстродействия обработки, но и сформулировать новые задачи управления в условиях неопределенности.

Существует мнение, что возможность уменьшения степени гранулиро-

ванности может существенно увеличить точность модели, применение ближайшего КП (БКП) позволяет эту задачу конкретизировать и предостеречь от необоснованных поисков точной модели.

Одним из важных результатов современной теории ГрК есть то, что множество представления НМ, является четким. Как показано в работе [17] гранулярное НМ - нечеткое множество, которое имеет четкое множество представления, в нашем случае - гранулярное НМ представлено в форме КП.

Рассматривается комплекс задач:

- представление ИГр в виде тензоров с матрицами $m \times m$, где m – количество различных элементов, в случае НМ

– число упорядоченных пар $\{x/\mu^{(x)}\}_1^m$;

- получение новой (скрытой) информации относительно свойств НМ, представленных в виде Гр;

- прикладные задачи, связанные с оценкой влияния ФП на результат арифметической операции с ИГр.

НМ $\tilde{A} = \{U, \mu\}$, где U - универсум, μ - ФП, т.е. $\tilde{A} = \{u_i/\mu_i^{(u)}\}$, $\mu_i^{(u)} \rightarrow [0, 1]$, $\tilde{A} \subset U \times [0, 1]$ в работе рассматривается в виде тензорной Гр (ТГр):

$$\tilde{A} = \{u_i/\mu_i^{(u)}\} \rightarrow A = \left([u] \otimes [\mu^{(u)}]^T \right)_{i=1}^n = \left(u_1 \mu_1^{(u)} \dots u_1 \mu_n^{(u)}; \dots; u_n \mu_1^{(u)} \dots u_n \mu_n^{(u)} \right),$$

где \otimes - символ тензорного (Кронекерова) произведения, T (или $'$) – символ транспонирования,

$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n],$$

$$\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n],$$

$$(\forall i) \mu_i > 0, i=1, n.$$

Пусть $\tilde{x} = \{x/[3 \ 5 \ 7], \mu=[0 \ 1 \ 0]\}$, УМ, на котором определен \tilde{x} , представим в виде $\{[3 \ 5 \ 7], \mu=[1 \ 1 \ 1]\}$. Упорядоченные

пары $X_1 = \{x/1\} \rightarrow \{[3 \ 5 \ 7], \mu=[1 \ 1 \ 1]\}$ и

$X_2 = \{x/0\} \rightarrow \{[3 \ 5 \ 7], \mu=[0 \ 0 \ 0]\}$ назовем УМ полной принадлежности и полной непринадлежности. Будем расс-матривать Гр в связи с УМ, на котором задано НМ.

Тензорная форма НМ-гранула как реализация тензорного (Кронекерова) произведения $\tilde{x} = \{x/\mu^x\}$, $\tilde{x} \in X$, X – УМ,

$X = \{X_1, X_2\}$, $\mu^x \rightarrow [0, 1]$, $X_1 = \{x/1\}$, $X_2 = \{x/0\}$ дает следующие тензор-гранулы – аналоги НМ:

$tx = \text{kron}(x, [0 \ 1 \ 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{norm}(tx, 'fro') = 9.11$ <p>а)</p>	$tx1 = \text{kron}(x, [1 \ 1 \ 1]) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\text{norm}(tx1, 'fro') = 15.78$ <p>б)</p>
F-нормы матриц tx, tx1 соответственно равны: 9.11 и 15.78.	

Имеет место неравенство: $0 \leq n_{tx} \leq n_{tx1}$, где $0, n_{tx}, n_{tx1}$ – F-нормы тензорных гранул ЧМ непринадлежности, принадлежности и НМ с треугольной ФП.

Фадзификация и дефадзификация при использовании тензорных гранул

Пре-дставление НМ $\tilde{X} = \{x/\mu^x\}$, $\tilde{X} \in X$, $\mu^x \rightarrow [0,1]$ в виде ИГр предполагает внутреннюю целостность объекта, которая сохраняется при взаимодействии с другими ИГр, при этом форма представления НМ-Гр как подмножества упорядоченных пар может естественно меняться в зависимости от решаемой задачи. Можно предполагать, что внутренние характеристики НМ-Гр (расстояния между векторами $\{x_i, \mu_i^x\}$ и $\{x_{i+1}, \mu_{i+1}^x\}$) при взаимодействии с др. объектами будут скрыты, т.е. представлены в неявной форме. Например, тензорная форма НМ-Гр $\tilde{X} = \{x/\mu^x\} \rightarrow t^x = \left(x \otimes \mu^x \right)$ приводит к внутренним элементам матрицы $t_{ij}^x = \{x_i \cdot \mu_j^x\} \in t^x$, где семантика НМ $\{x_i, \mu_i^x\}$ не учитывается. В этих условиях естественно определить алгоритмы перехода от одной формы представления НМ-Гр к другой.

Тензорная форма НМ-Гр предполагает, что входом, например, системы нечеткого управления может быть многомерный массив (тензор), который необходимо матрицизовать или представить вход в виде НМ-Гр с принятой априори ФП, каковой в практическом большинстве является треугольная ФП. Кроме трудностей, которые неизбежно возникают в условиях многомерности объекта, часто интервал, для которого определяет-

ся ФП, является неконструктивным, т.е. очень большим. В этих условиях, определение тензорной НМ-Гр, ближайшей (в указанном смысле) к исходному множеству данных (ИМД) может быть серьезным способом решения задачи управления в условиях неопределенности, в частности, представленной множеством данных.

Исходные данные и их преобразования на основе БКП. БКП определяется из условия равенства F-норм [17, 18, 19]

$$\|Q - A_1 \otimes A_2\|_F^2 = \|\hat{Q} - a_1 \cdot a_2^T\|_F^2,$$

где a_1 – векторизованная версия матрицы A_1 , сформированная в виде колонки столбцов A_1 , $a_1 = \text{vec}(A_1)$, $a_2 = \text{vec}(A_2)$, \hat{Q} – переформированная матрица Q и $\|\cdot\|_F$ – Frobenius норма. Хотя БКП ($Q \rightarrow A_1 \otimes A_2$) не отличается однозначностью или точностью, но в целом ряде случаев его применение эффективно. Стандартная форм БКП предполагает наличие только двух матриц, A_1 и A_2 , которые определяются в SVD-разложении со своими двойными компонентами, левым и правым сингулярными векторами. SVD- разложение Q дает ближайшую rank-1 матрицу $a_1 \otimes a_2$ на Q , оптимальные величины векторов $a_1 = \text{vec}(A_1)$, $a_2 = \text{vec}(A_2)$ определяются в виде: $a_1 = \sigma_1 U_1$ и $a_2 = V_1$, где σ_1 – наибольшая сингулярная величина Q , U_1 и V_1 – соответствующие левый и правый сингулярные векторы. Процедура матрицизации векторов a_1 и a_2 дает оптимальные БКП матрицы A_1 и A_2 .

В общем случае задача определения БКП формулируется в таком виде. Пусть матрица A имеет размерность $m \times n$, $m = m1 \times m2$, $n = n1 \times n2$, необходимо найти матрицы B и C с размерностями $m1 \times n1$

и $m_2 \times n_2$ соответственно, минимизирующие ошибку $f_A(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}\|_F$. Показано, что вектора $\text{vec}(\mathbf{B}) = \sigma_1 U_1$ (в некоторых случаях $\sigma_1^{1/2} U_1$), $\text{vec}(\mathbf{C}) = V_1$, где U_1, V_1 - левый и правый сингулярные векторы SVD-разложения \mathbf{A} решают задачу $\underset{\mathbf{A}}{\text{minimize}} f(\mathbf{B}, \mathbf{C})$.

В рассматриваемом в работе случае задача поиска БКП ориентирована на поиск НМ, сформированного на базе БКП. Пусть ИМД представлено в виде матрицы \mathbf{A} размерностью $m \times n$, где m - количество элементов в НМ, n - количество измерений, НМ $\tilde{\mathbf{X}} = \{x/\mu^x\} \rightarrow \mathbf{t}_x = (x \otimes \mu^x)$ должно быть представлено с одинаковым количеством элементов для x и μ^x . Следовательно, матрица \mathbf{A} должна быть представлена в виде $\hat{\mathbf{A}}_{n \times m \times n-m} = \mathbf{A}_{n \times m} \otimes \mathbf{1}_{m \times n}$ или $\check{\mathbf{A}}_{n \times m \times n-m} = \mathbf{1}_{m \times n} \otimes \hat{\mathbf{A}}_{n \times m}$.

Пример. Пусть ИМД задано в виде матрицы $\mathbf{A}_{4 \times 3}$, регуляризованные матрицы $\hat{\mathbf{A}}_{n \times m \times n-m} = \mathbf{1}_{3 \times 4} \otimes \mathbf{A}$, $\check{\mathbf{A}}_{n \times m \times n-m} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{1}_{3 \times 4}$

2⁰. Вычисляем SVD-разложения¹ матриц \mathbf{x} , \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 :

$$[u \ s \ v] = \text{svd}(\mathbf{x}) : u(:, 1) = \begin{pmatrix} -0.23 & -0.30 & -0.21 & -0.27 & -0.35 & -0.32 & -0.50 & -0.32 & -0.40 \end{pmatrix}^T, \sigma_1 = 34.08,$$

$$v(:, 1) = \begin{pmatrix} -0.50 & -0.48 & -0.72 \end{pmatrix}^T;$$

$$[u \ s \ v] = \text{svd}(\mathbf{x}_1) : u(:, 1) = \begin{pmatrix} -0.23 & -0.30 & -0.21 & -0.27 & -0.35 & -0.32 & -0.50 & -0.32 & -0.40 \end{pmatrix}^T, \sigma_1 = 34.08,$$

$$v(:, 1) = \begin{pmatrix} -0.50 & -0.48 & -0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T;$$

$$[u \ s \ v] = \text{svd}(\mathbf{x}_2) : u(:, 1) = \begin{pmatrix} -0.23 & -0.30 & -0.21 & -0.27 & -0.35 & -0.32 & -0.50 & -0.32 & -0.40 \end{pmatrix}^T, \sigma_1 = 34.08,$$

$$v(:, 1) = \begin{pmatrix} -0.50 & 0 & 0 & -0.48 & 0 & 0 & -0.72 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

имеют размерность 12×12 . Хотя матрицы $\hat{\mathbf{A}}_{n \times m \times n-m}$ и $\check{\mathbf{A}}_{n \times m \times n-m}$ различны, однако их F-нормы равны, т.е. $\|\hat{\mathbf{A}}_{n \times m \times n-m}\|_F^2 = \|\check{\mathbf{A}}_{n \times m \times n-m}\|_F^2 = \|\mathbf{A}_{n \times m}\|_F^2$. Это вытекает из определения F-нормы, т.к. $\|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A}\|_F \cdot \|\mathbf{B}\|_F$, $\|\mathbf{1}\|_F = 1$. Например, для матриц $\mathbf{A}_{4 \times 3}$, $\mathbf{1}_{3 \times 4} \otimes \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{1}_{3 \times 4}$ их F-нормы равны $\|\mathbf{A}_{4 \times 3}\|_F = \|\mathbf{1}_{3 \times 4} \otimes \mathbf{A}\|_F = \|\mathbf{A} \otimes \mathbf{1}_{3 \times 4}\|_F$ (для заданной матрицы $\mathbf{A}_{4 \times 3}$), хотя сами матрицы различны.

Пример фадзификации ИМД, заданного в виде матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \end{pmatrix}_3^9$. ИМД должно быть фадзифицировано при помощи БКП. Матрицы \mathbf{x} , $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \end{pmatrix}_9^9 = \mathbf{1}_{1 \times 3} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \end{pmatrix}_3^9$, $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \end{pmatrix}_9^9 = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \end{pmatrix}_3^9 \otimes \mathbf{1}_{1 \times 3}$, которые будут использованы в дальнейшем, приведены на рис.1, их F-нормы равны: $\|\mathbf{x}\|_F = \|\mathbf{x}_1\|_F = \|\mathbf{x}_2\|_F = 38.79$.

¹ С целью уменьшения объема статьи матрицы [U S V] не приведены, для всех разложений сохранены только левый и правый сингулярный векторы и максимальное значение сингулярных величин: $u(:, 1)$, $v(:, 1)$ и σ_1 соответственно

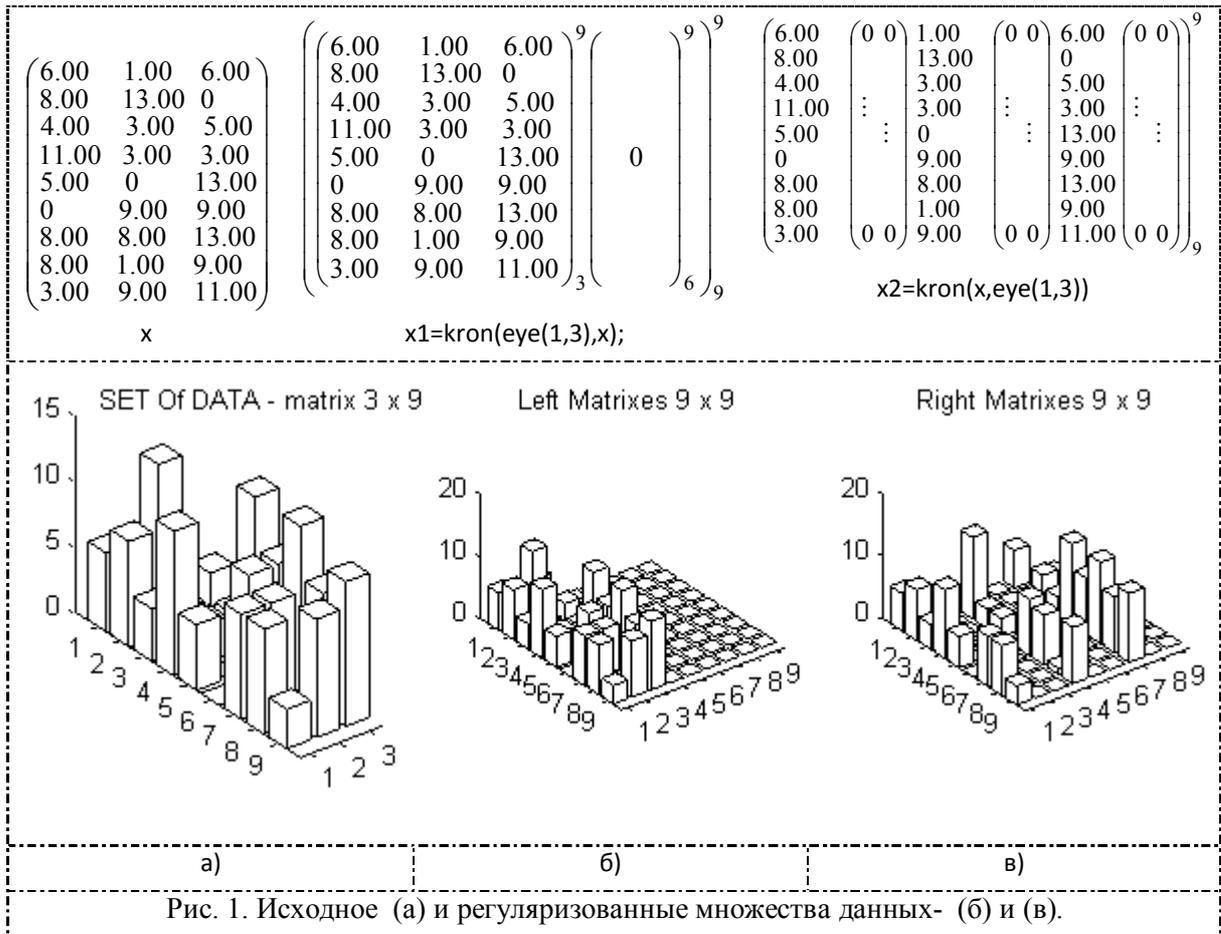


Рис. 1. Исходное (а) и регуляризованные множества данных- (б) и (в).

Поскольку сингулярные векторы $\sigma_1 \cdot u(:,1)$ и $v(:,1)$ являются ортогональными, способ их определения таков, что всегда $\text{abs}(v(:,1)) \in [0, 1]$ и $\text{abs}(\sigma_1 \cdot u(:,1)) \in [0, \sigma_1]$, целесообразно придать $(\text{abs}(v(:,1)))$ и $\text{abs}(\sigma_1 \cdot u(:,1))$ смысл упорядоченных пар, образующих НМ, т.е. $\tilde{U}_v \overset{\Delta}{=} \{\sigma_1 \cdot u(1,1)/v(1,1), \sigma_1 \cdot u(2,1)/v(2,1), \dots, \sigma_1 \cdot u(n,1)/v(n,1)\}$, где $\text{abs}(v(:,1))$ играет роль ФП. Хотя теоретические исследо-

вания, подтверждающие математическую корректность такого обобщения отсутствуют, практические вычисления показывают абсолютную правдоподобность и прикладную пригодность такого допущения. Ниже приведены расчеты, подтверждающие это свойство БКП в контексте НМ.

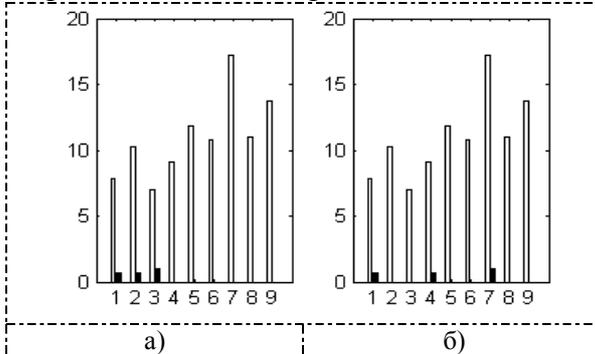


Рис.2. Пары сингулярных векторов, образующих БКП : а - $u(:,1)$ & $v(:,1)$ для матрицы x_1 ; б- $u(:,1)$ & $v(:,1)$ для матрицы x_2 , светлые прямоугольники - $u(:,1)$, темные - $v(:,1)$

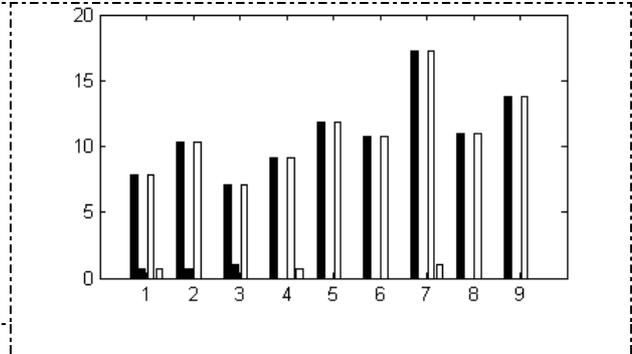


Рис. 3. Пары сингулярных векторов, образующих БКП для матрицы x_1 - $u(:,1)$ & $v(:,1)$ для матрицы x_1 (темные прямоугольники) и $u(:,1)$ & $v(:,1)$ для матрицы x_2 - светлые прямоугольники

На рис. 2 и 3 приведены пары сингулярных векторов, образующих БКП : $a - u(:,1) \& v(:,1)$ для матрицы x_1 ; $b- u(:,1) \& v(:,1)$ для матрицы x_2 , светлые прямоугольники - $u(:,1)$, темные - $v(:,1)$. С этой целью для ИМД и БКП, полученных с учетом неоднозначности, были сформированы при помощи стандартных методов НМ, которые сравнивались с НМ типа $\tilde{U}_v^\Delta = \{abs(\sigma_1 \cdot u(:,1)) / abs(v(:,1))\}$. На рис.4 показаны НМ с треугольной ФП, сформированные стандартным методом, при котором НМ формируется как $\tilde{a}^\Delta = \{a^{min} / \mu_{a^{min}} = 0$

$a^{max} / \mu_{a^{max}} = 0\}$, для ИМД (1 - 0/0 6.5/1 13/0) и Кронекеровой аппроксимации ИМД (2- 7/0 11/1 17/0), расчетное НМ имеет вид *примерно* $9 = \{7.5/0 9/1 12.5/0\}$, показано темным цветом. Нетрудно видеть насколько эффективным является алгоритм: ИМД дает интервал длиной 13 ед.и дефадзифицированное значение 6.5 (*примерно* 6.5), аппроксимация при помощи БКП - (*примерно* 11) с длиной интервала - 10 ед. , расчетное значение $\tilde{9}$ (*примерно* 9) с длиной интервала 5 ед.

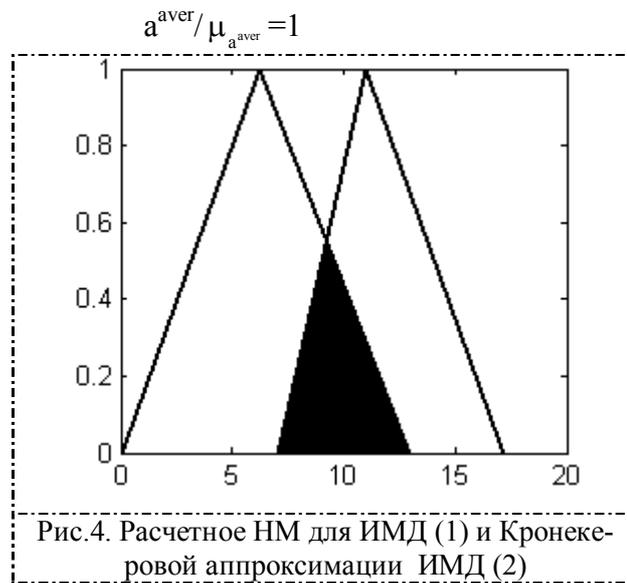


Рис.4. Расчетное НМ для ИМД (1) и Кронекеровой аппроксимации ИМД (2)

Будем полагать, что модули левого и правого сингулярного векторов SVD-разложений КП $I_{n \times m} \otimes X_{m \times n}$ и $X_{m \times n} \otimes I_{n \times m}$ соответственно $[^1u_1(:,1) \ ^1v_1(:,1)]$ и $[^2u_1(:,1) \ ^2v_1(:,1)]$ играют роль упорядоченных пар, т.е. представляют собой НМ.

$^1\tilde{U}_v$		$^2\tilde{U}_v$	
$^1u_1(:,1)$	$^1v_1(:,1)$	$^2u_1(:,1)$	$^2v_1(:,1)$
7.80	0.70	7.80	0.70
10.28	0.67	10.286	0.0
7.04	1.0	7.04	0
9.12	0	9.12	0.67
11.84	0	11.85	0
10.80	0	10.80	0
17.20	0	17.21	1.0
10.96	0	10.96	0
13.74	0	13.74	

Выполним дефадзификацию НМ $^1\tilde{U}_v$ и $^2\tilde{U}_v$ по методу центра тяжести, предварительно сформировав упорядоченное множество, и сравним полученный результат с аналогичным для НМ, полученным для ИМД на основе стандартных методов. НМ $^1\tilde{U}_v$ и $^2\tilde{U}_v$ представим в виде:

$$^1\tilde{U}_v^\Delta = \{7.0/1.0 \ 7.8/0.70 \ 10.3/0.67\},$$

$$^2\tilde{U}_v^\Delta = \{7.8/0.7 \ 9.12/0.67 \ 17.2/1 \},$$

получаем $def(^1\tilde{U}_v) = 9.9$, $def(^2\tilde{U}_v) = 12.14$, $def(НМ_{ИМД}) = 7.5$, т.е. $def(^1\tilde{U}_v) \approx def(НМ_{ИМД})$. Поскольку оба НМ $^1\tilde{U}_v$ и $^2\tilde{U}_v$ относятся к одному и тому же объекту, для его характеристики разумно использовать пересечение указанных НМ,

т.е. $HM_{имд} \overset{\Delta}{=} {}^1\tilde{U}_v \cap {}^2\tilde{U}_v = \{7.8/0.7 \ 9.12/0.67\}$, $def({}^1\tilde{U}_v \cap {}^2\tilde{U}_v) = 8.46$. Нетрудно видеть, что представление ИМД в виде НМ на интервале [0 13] с дефадзифицированным значением 6.5 значительно проигрывает НМ с дефадзифицированным значением 8.46 на интервале [7.8 9.12] и НМ с дефадзифицированным значением 7.8 на интервале {7.0 10.3}.

Коэффициенты доверия для НМ ${}^1\tilde{U}_v \overset{\Delta}{=} \{7.0/1.0 \ 7.8/0.70 \ 10.3/0.67\}$ и ${}^1\tilde{U}_v \cap {}^2\tilde{U}_v = \{7.8/0.7 \ 9.12/0.67\}$ близки. Таким образом, тензорная форма представления НМ-гранула существенно снижает интервал неопределенности, что в большой степени способствует повышению качества принятия решения в условиях неопределенности при использовании стандартных схем нечеткого вывода (схемы Мамдани, Суджено, Цукамото и др.).

Псевдоинверсные свойства ТНМ-Гр.

Ранее отмечалось, что одним из недостатков ТНМ является то, что не существует формального определения обратной величины

для НП. Тензорные модели НП – ИТГр дают возможность решения этой задачи. Из линейной алгебры [20] известно, что если **A** - n×n сингулярная матри-

$$U = \begin{pmatrix} -0.33 & -0.94 & 0 \\ -0.55 & 0.19 & -0.81 \\ -0.77 & 0.27 & 0.69 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем левый и правый сингулярный векторы: $U(:,1) = 0.11^{1/2} * [0.33 \ 0.55 \ 0.77]^T = [0.11 \ 0.18 \ 0.25]^T$; $V(:,1) = [0 \ 1 \ 0]^T$. Формируем $NP^{-1} = \{0.11/0 \ 0.18/1 \ 0.25/0\}$.

Таким образом, $NP = \{3/0 \ 5/1 \ 7/0\} \rightarrow NP^{-1} = \{0.11/0 \ 0.18/1 \ 0.25/0\}$

Отмечаем, что интуитивное и визуальное представление результата является корректным, это видно из того, что

ца индекса k такая, что $rank(A^k) = r$, тогда существует несингулярная матрица **Q** такая, что

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} C_{r \times r} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

где **C** – несингулярная матрица, **N** – нильпотент индекса k.

Если **A** есть m × n матрица rank r, тогда существуют ортогональные матрицы **U**_{m×m} и **V**_{n×n} такие, что

$$A = URV^T = U \cdot \begin{pmatrix} C_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot V^T.$$

Псевдоинверсия **A** по Moore–Penrose, обозначаемая как **A**[†], есть n × m- матрица вида,

$$A^\dagger = V \cdot \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times m} \cdot U^T.$$

С учетом изложенного рассмотрим пример определения обратной НП *примерно 5* на основании ИТГр. Пусть НП задана в виде: $\tilde{5}_{\text{rimf}} \overset{\Delta}{=} \{3/0 \ 5/1 \ 7/0\}$, ИТГр $([3 \ 5 \ 7] \otimes [0 \ 1 \ 0])^T$ представлена как

$$\left(\tilde{5}_{\text{кр}} \right) = [0 \ 0 \ 0; \ 3 \ 5 \ 7; \ 0 \ 0 \ 0], \text{ т.е.}$$

$\tilde{5}_{\text{rimf}} \rightarrow \left(\tilde{5}_{\text{кр}} \right)$. Псевдообратная матрица

$$\left(\tilde{5}_{\text{кр}} \right)^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0 \end{pmatrix}.$$

SVD-разложение псевдообратной матрицы дает $[u \ s \ v] = \text{svd}()$,

$$(\text{def}(\tilde{5}))^{-1} = 0.2 \quad \text{и} \quad \text{def}\left(\tilde{5}_{\text{кр}}\right)^{-1} = 0.18, \text{ где}$$

def-процедура дефадзификации, т.е. практически совпадают.

Дефадзификация на основании КП. Известно, что если задана НП $\tilde{X} = \{x/\mu^x\}_1^n$, $\tilde{X} \subset U$, то ее четкое значение может быть получено в результате выполнения процедуры дефадзификации, в частности, по методу центра тяжести, т.е.

$$\tilde{X} = \{x/\mu^x\}_1^n \rightarrow x^{\text{def}} = \frac{\sum_{i=1,n} x_i \mu_i^x}{\sum_{i=1,n} \mu_i^x},$$

где x^{def} - дефадзифицированное значение \tilde{X} . Если существуют 2 НМ $\tilde{X} \stackrel{\Delta}{=} \text{примерно } A = \{x/\mu^x\}_1^n \rightarrow x^{\text{def}}$ и

$\tilde{Y} \stackrel{\Delta}{=} \text{примерно } B = \{y/\mu^y\}_1^m \rightarrow y^{\text{def}}$ и при этом $x^{\text{def}} \approx y^{\text{def}}$, то утверждение, что \tilde{X} совпадает с \tilde{Y} не только правдоподобно, но и корректно.

Дефадзификацию по Кронекеру определим в виде:

$$\otimes_{x^{\text{def}}} = \frac{\sum_{i=1,n} x_i \otimes \mu_j^x}{\sum_{j=1,n} \mu_j^x} = \frac{\sum_{i=1,n} \left(x_i \cdot \sum_{j=1,n} \mu_j^x \right)}{\sum_{j=1,n} \mu_j^x} = \frac{\sum_{i=1,n} x_i \cdot \sum_{j=1,n} \mu_j^x}{\sum_{j=1,n} \mu_j^x} \sum_{i=1,n} x_i \cdot$$

Практические расчеты показывают, что стандартная дефадзификация по методу ЦТ и дефадзификация по Кронекеру связаны соотношением:

Примеры.

1

$$x=[0:10];$$

$$y=\text{trapmf}([0:10],[3 \ 5 \ 7 \ 9]);$$

$$\text{defuzz}(x,y,'centroid') = 6.00 \text{ Стандартная дефадзификация по методу ЦТ}$$

$$\text{sum}(\text{sum}(\text{kron}([0:10],(\text{trapmf}([0:10],[3 \ 5 \ 7 \ 9]))')))/\text{sum}(\text{trapmf}([0:10],[3 \ 5 \ 7 \ 9])) = 55.00$$

$$55/(11-1)=5.5 \text{ Дефадзификация на основании КП}$$

$$y1=\text{trapmf}([0:2:10],[3 \ 5 \ 7 \ 9]);$$

$$\text{defuzz}([0:2:10],y1,'centroid') = 6.00 \text{ Стандартная дефадзификация по методу ЦТ}$$

$$\text{sum}(\text{sum}(\text{kron}([0:2:10],(\text{trapmf}([0:2:10],[3 \ 5 \ 7 \ 9]))')))/\text{sum}(\text{trapmf}([0:2:10],[3 \ 5 \ 7 \ 9])) = 30.00$$

$$30/(6-1)=6 \text{ Дефадзификация на основании КП}$$

2

$$X=[1:10];$$

$$a=\text{gaussmf}(X,[1,5])$$

$$\otimes_{x^{\text{def}}} = 55 \rightarrow x^{\text{def}} = 5.5$$

$$X=[1:2:10];$$

$$b=\text{gaussmf}(X,[1,5])$$

$$\otimes_{x^{\text{def}}} = 25 \rightarrow x^{\text{def}} = 5$$

Отметим, что для НМ с треугольной стандартной ФП величина \inf -нормы, представляющей наибольшую строчную сумму, совпадает с дефадзификацией по Кронекеру. Это следует из того, что для $\tilde{X} = \{x_1/0 \ x_2/1 \ x_3/0\}$ НМ-Гр в форме КП-гранулы $\mathbf{X}=[x_1 \ x_2 \ x_3] \otimes [0 \ 1 \ 0]$ имеет соответственно вид $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0; & x_1 & x_2 & x_3; & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, известно, что процедура МатЛаб $\text{norm}(\mathbf{X}, \inf)$ вычисляет наибольшую строчную сумму, т.е. $\text{norm}(\mathbf{X}, \inf) = \max(\text{sum}(\text{abs}(\mathbf{X}))) =$

$$\otimes_{x^{\text{def}}} \cong x^{\text{def}} \cdot n, \quad \otimes_{y^{\text{def}}} \cong y^{\text{def}} \cdot m,$$

где n и m - мощность НМ \tilde{X} и \tilde{Y} соответственно.

$(x_1 + x_2 + x_3)$, что, в свою очередь, является дефадзификацией по Кронекеру. Таким образом, этот вид нормы может использоваться для сравнения НЧ в случае, если последние описывают идентичное семантическое высказывание.

Выводы

1. Гранулирование информации и гранулярные вычисления (гранулированный компьютеринг) обусловлены необходимостью повышения эффективности решения задач управления в условиях неопределенности. Нечеткое множество как

информационная гранула-примитив играет важную роль в решении этой проблемы, но способ представления НМ как подмножества упорядоченных пар, наделенных субъективной функцией принадлежности (ФП), в ряде случаев - серьезное препятствие на этом пути. Многообразие ФП оказалось невостребованным, практическое большинство задач управления обходится треугольной ФП, нечеткая математика, базируясь на принципе нечеткого расширения и интервального анализа, страдает рядом необоснованных предположений, в частности, необоснованные эвристики при определении обратных величин для НМ (по умножению и сложению) весьма ощутимы в достаточно сложных задачах.

2. Важная особенность гранулоцелостность динамической информационной структуры при использовании НМ как гранулы нарушена, т.к. при выполнении арифметических операций над НМ над компонентами НМ выполняются разные операции. Предложена новая форма НМ-гранулы – тензорное (Кронекерово) произведение компонент, что позволяет сохранить свойство целостности гранул и существенно продвинуться в решении проблемы гранулярного компьютеринга - преобразование гранул.

3. Приведены примеры, показывающие эффективность применения тензорных информационных гранул (полученных как для НМ так и для исходных множеств данных, представленных в виде многомерных массивов).

Список литературы

1. Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И. Гранулярный компьютеринг в системе нечетких множеств на уровне тензорных гранул// Проблемы информатизации и управления. – 2012. – № 4(40). – С.51-61.

2. Zadeh L.A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic// Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – № 90. – P. 111-127.

3. Zadeh L.A. Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities// Journal of Statistical Planning and Inference. – 2002. – №105. – P. 233-264.

4. Aja-Fernández S., Alberola-López C. Fuzzy Granules as a Basic Word Representation for Computing with Words// SPECOM'2004: 9th Conference Speech and Computer St. Petersburg, Russia September 20-22, 2004. ISCA Archive <http://www.isca-speech.org/archive>

5. Lin T., Yao Y., Zadeh L. Data Mining, Rough Sets and Granular Computing. Heidelberg.: – Physica-Verlag Heidelberg, – 2002.

6. Тарасов В.Б. Нестандартные множества и гранулированные вычисления//5-ые Поспеловские чтения «Искусственный интеллект – проблемы и перспективы». Интернет-ресурс: http://www.posp.raai.org/data/posp_2011/tarasov.ppt

7. Тарасов В.Б. Теория нечетких множеств: новый виток развития. Интеллектуальные системы и технологии //Научная сессия МИФИ-2006. Том 3. Интернет-ресурс: <http://www.library.mephi.ru/elbib/izdvuza/scientific-sessions?Year=2006...2>

8. Вепенка П. Альтернативная теория множеств: Новый взгляд на бесконечность: Пер. со словац. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2004. – 611 с.

9. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 798 с.

10. Zadeh L. A. Generalized theory of uncertainty-principal concepts and ideas//Computational Statistics & Data Analysis.– 2006. – Vol. 51.– P. 15-46.

11. Wang Yi., Zadeh L. A., Yao Y. On the System Algebra Foundations for Granular Computing// Int. J. of Software Science and Computational Intelligence.- 2009. – 1, № 1. – P. 64-86.

12. Давыдов А.А. Системная социология. М.: КомКнига, 2006. – 192 с.

13. The Structural Representation of Proximity Matrices With MATLAB

//cda_toolbox_manual. Интернет-ресурс:
http://cda.psych.uiuc.edu/matlab_class_material/clusteringchapter_r1

14. Castellano G., Fanelli A.-M., Mencar C. Fuzzy Information Granules: a Compact, Transparent and Efficient Representation. COMPUTATIONAL INTELLIGENCE. In press.

15. Pedrycz W. Fuzzy Sets as a User-Centric Processing Framework of Granular Computing. In Handbook of Granular Computing. Edited by W. Pedrycz, A. Skowron and V. Kreinovich.- John Wiley & Sons, Ltd, 2008. – 1150 p.

16. Yao Y.Y. Granular Computing: basic issues and possible solutions. Интернет-ресурс:

17. Lin T.Y. Measure theory on granular fuzzy sets.// Fuzzy Information Processing Society, 1999. NAFIPS. 18th International Conference of the North American: Jul 1999, – P. 809 – 813. (Conference Publications).

18. Langville A.N. , Stewart W.J. The Kronecker product and stochastic automata networks// Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2004. – N 167. – P. 429-447.

19. Van Loan C. The Ubiquitous Kronecker Product// Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000, №. 123. – P. 85-100.

20. Van Loan C. and Pitsianis N. Approximation with Kronecker Products// Linear Algebra for Large Scale and Real Time Applications, M. S. Moonen and G. H. Golub, eds.// Kluwer Publications, 1993. – P. 293-314. (See also <http://www.cs.duke.edu/~nikos/KP/home.html>).

Статью представлено в редакцию 12.03.2014