

УДК 519.61(045)

Денисюк В.П., д.ф.-м., проф.,  
Рибачук Л.В., к.ф.-м., доц.,  
Негоденко О.В.

## ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИГЛЯДІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Національний авіаційний університет

kvomden@nau.edu.ua

*Запропоновано метод побудови наближених розв'язків першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами у вигляді тригонометричних многочленів з використанням методу фантомних вузлів. Невизначені параметри визначаються методом колокації. Наведено приклад; показано, що відносна похибка розв'язку зменшилася в 3.7 разів при введенні двох фантомних вузлів і в 6 разів при введенні чотирьох фантомних вузлів*

**Ключові слова:** тригонометричний многочлен, вузлові точки, нев'язка, явище Гіббса, фантомні вузли

### Постановка задачі

В багатьох задачах науки і техніки для кількісного опису фізичних явищ використовують математичні моделі. Такі моделі часто являють собою системи звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь з частинними похідними, на які накладають певні крайові та початкові умови. Надалі знаходять розв'язки цих систем, які задовольняють цим умовам.

Проте тут виникають певні труднощі, оскільки точному розв'язанню підлягає лише невеликий клас диференціальних рівнянь. Тому виникає необхідність знаходити наближені розв'язки поставлених задач.

Із аналізу розглянутої літератури можна зробити висновок, що серед різноманітних чисельно-аналітичних методів практично відсутні методи, при яких шуканий розв'язок наближається тригонометричними многочленами.

На нашу думку така ситуація пояснюється тим, що при застосуванні тригонометричних многочленів в задачах відшукування наближених розв'язків диференціальних рівнянь в загальному випадку на кінцях відрізка наближення виникають розриви шуканої функції; зрозуміло, що в околі цих розривів спостерігається відоме

явище Гіббса, що суттєво знижує точність отримуваних розв'язків диференціальних рівнянь.

Одним із методів подолання шкідливого впливу явища Гіббса є методи  $\Lambda$ -підсумовування тригонометричних многочленів, які дозволяють майже повністю усунути вплив явища Гіббса у середній частині відрізка наближення [1], [2]. Проте на кінцях цього відрізка, в безпосередніх околах точок розриву, похибки розв'язку практично не зменшуються.

В [3] було запропоновано метод покращення збіжності рядів Фур'є і інтерполяційних тригонометричних поліномів; можна сподіватися, що застосування цього методу в задачах відшукування наближених розв'язків диференціальних рівнянь дозволить значно зменшити похибки отримуваних розв'язків.

### Мета роботи

Розробка методики знаходження наближеного розв'язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь із використанням методів покращення збіжності, запропонованих в [3]; дослідження похибки наближеного розв'язку на типовому прикладі.

### Основна частина

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = f(t), t \in [0, 2\pi - \alpha], \quad (1)$$

та крайовими умовами

$$\begin{aligned} u(0) &= A, \\ u(2\pi - \alpha) &= B, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2\pi$ , - параметр стискання, значення якого ми виберемо пізніше.

Зауважимо, що оскільки тригонометричний многочлен  $T_n(t)$  в силу періодичності приймає однакові значення у точках  $0$  і  $2\pi$ , в загальному випадку не можна накладати крайові умови в цих точках.

Наближений розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді тригонометричного многочлена

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt. \quad (3)$$

Зрозуміло, що цей розв'язок містить  $2n+1$  невизначених параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ .

Підставляючи (3) в (1), (2), отримуємо

$$T_n'' + p(t)T_n'(t) + q(t)T_n(t) = f(t), \quad (4)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} T_n(0) &= A, \\ T_n(2\pi - \alpha) &= B. \end{aligned} \quad (5)$$

Нев'язка  $\varepsilon(t)$  рівняння (4) має вигляд

$$\varepsilon(t) = T_n'' + p(t)T_n'(t) + q(t)T_n(t) - f(t) \quad (6)$$

Для визначення параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  задамо на відріжку  $[0, 2\pi]$   $2n+1$  точок  $t_i$ , ( $i=1, \dots, 2n+1$ ) з урахуванням того факту, що тригонометричний многочлен  $T_n(t)$  в силу періодичності приймає однакові значення у точках  $0$  і  $2\pi$ . Враховуючи це, задамо точки  $t_i$ , ( $i=1, \dots, 2n+1$ ), таким чином

$$t_i = \frac{2\pi}{2n+1}(i-1), \quad i=1, \dots, 2n+1.$$

Тоді для визначення параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  маємо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} T_n(t_1) &= A; \\ \varepsilon(t_i) &= 0, \quad i=2, 3, \dots, 2n; \end{aligned} \quad (7)$$

$$T_n(t_{2n+1}) = B.$$

Зрозуміло, що в даному випадку ми покладаємо

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n+1}.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо значення невизначених параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ .

В багатьох випадках зручнішим є застосування іншої форми тригонометричного многочлена [4].

Ця форма має вигляд

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{2n+1} f_k S_k(t), \quad (8)$$

де

$$S_k(t) = \frac{1}{2n+1} \left[ 1 + 2 \sum_{j=1}^n \cos j(t-t_k) \right], \quad (9)$$

а  $f_k$ , ( $k=1, 2, \dots, 2n+1$ ) - невизначені параметри.

Оскільки

$$S_k(t_j) = \begin{cases} 1, & k=j; \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad (10)$$

то зрозуміло, що невизначені параметри  $f_k$ , ( $k=1, 2, \dots, 2n+1$ ) являють собою значення наближеного шуканого розв'язку у вузлових точках  $t_k$ , ( $k=1, \dots, 2n+1$ ). Постановка задачі у термінах вузлових точок дозволяє асоціювати параметри з обмеженими частинами в загальному випадку просторових областей, що включають ці вузлові точки. Цей факт є дуже корисним, оскільки вивчення нев'язок такого рівняння дозволяє виявити ті підобласті, де збіжність розв'язків є повільною (або навпаки, швидкою) [5].

Підставляючи вирази (8), (9) в рівняння (1) з урахуванням крайових умов (2) та виразу (10), отримуємо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} f_1 &= A; \\ \varepsilon(t_i) &= 0, \quad i=2, 3, \dots, 2n; \\ f_{2n+1} &= B. \end{aligned} \quad (11)$$

Як ми вже казали раніше, при такому підході у точках  $0$  і  $2\pi$  спостерігається явище Гіббса. Для послаблення впливу цього явища застосуємо метод фантомних вузлів покращення збіжності тригономет-

ричних многочленів. Даний метод полягає в наступному. Додамо до послідовності вузлів інтерполяції парну кількість фантомних вузлів; значення в цих вузлах будемо вибирати з урахуванням оцінок похідних, які ми оцінюємо з використанням поділених різниць. Зауважимо, що парна кількість фантомних вузлів вибирається для того, щоб зберегти непарність загальної кількості вузлів інтерполяції. Для цього, згідно з [3], збільшимо кількість точок на парне число; значення у цих точках, які ми позначимо  $B_1, B_2, \dots, B_{2m}$ , ( $m=1, 2, \dots$ ), можна вибрати, наприклад, обчислюючи у відповідних точках значення прямої, що з'єднує точки  $B$  та  $A$ . Тоді система рівнянь (11) для двох фантомних вузлів набуває вигляду

$$\begin{aligned} f_1 &= A; \\ \varepsilon(t_i) &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, 2n \quad (12) \\ f_{2n+1} &= B; \\ f_{2n+2} &= B_1; \\ f_{2n+3} &= B_2, \end{aligned}$$

де  $t_i = \frac{2\pi}{2n+3}(i-1), i=1, \dots, 2n+3; \alpha = \frac{2\pi \cdot 3}{2n+3}$ .

Для чотирьох фантомних вузлів система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} f_1 &= A; \\ \varepsilon(t_i) &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, 2n; \\ f_{2n+1} &= B; \\ f_{2n+2} &= B_1; \quad (13) \\ f_{2n+3} &= B_2, \\ f_{2n+4} &= B_3; \\ f_{2n+5} &= B_4, \end{aligned}$$

де  $t_i = \frac{2\pi}{2n+5}(i-1), i=1, \dots, 2n+3; \alpha = \frac{2\pi \cdot 5}{2n+5}$ .

Зауважимо, що при використанні тригонометричного многочлена у формі (3) кількість алгебраїчних рівнянь при додаванні фантомних вузлів збільшується; при використанні ж тригонометричних многочленів у формі (8) кількість алгебраїчних рівнянь системи при додаванні фантомних вузлів фактично не збільшується. Цей факт легко пояснюється властивостями функцій (9).

Для ілюстрації вищенаведеного наведемо приклад.

Розглянемо таку крайову задачу

$$\begin{aligned} u''(t) &= 0; \\ u(0) &= 1; \quad (14) \\ u(2\pi - \alpha) &= 9. \end{aligned}$$

Будемо шукати наближений розв'язок задачі (14). Покладемо  $n=4$ ; відповідно,

$$\alpha = \frac{2\pi}{9}; t_i = \frac{2\pi}{9}(i-1), i=1, \dots, 9.$$

Нескладно переконатися, що точним розв'язком цієї задачі буде пряма

$$u(t) = \frac{9}{2\pi}t + 1.$$

Складаючи систему рівнянь типу (11) і розв'язуючи її, отримуємо наближений розв'язок  $T_4(t)$ . Графіки точного і наближеного розв'язків а також графік відносної похибки наводяться на рис. 1, 2.

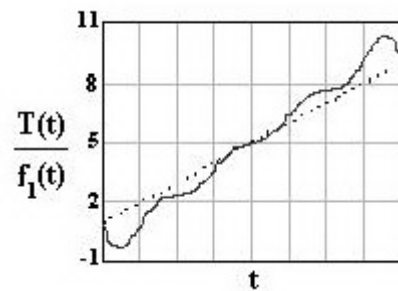


Рис.1. Графіки точного  $f_1(t)$  і наближеного  $T(t)$  розв'язків на відрізку  $[0, \frac{8}{9}2\pi]$ .

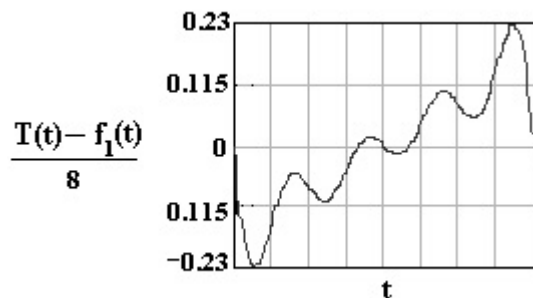


Рис.2. Графік відносної похибки наближеного розв'язку на відрізку  $[0, \frac{8}{9}2\pi]$ .

Додамо тепер два фантомних вузли; значення у цих вузлах обчислюємо, використовуючи лінійну інтерполяцію. Тепер

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot 3}{11}; t_i = \frac{2\pi}{11}(i-1), \quad i=1, \dots, 11.$$

Тепер точним розв'язком стає пряма

$$u(t) = \frac{8}{2\pi - \alpha}t + 1 = \frac{11}{2\pi}t + 1, t \in \left[0, \frac{8}{11}2\pi\right]$$

Складаючи систему рівнянь типу (12), де

$$f_{2n+2} = 6.333, f_{2n+3} = 3.666,$$

отримуємо наближений розв'язок  $T_5(t)$ .  $T_4(t)$ . Графіки точного і наближеного розв'язків, а також графік відносної похибки наводяться на рис. 3, 4.

Додамо тепер чотири фантомних вузли; значення у цих вузлах обчислюємо через лінійну інтерполяцію.

Тепер

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot 5}{13}; t_i = \frac{2\pi}{13}(i-1), \quad i=1, \dots, 13.$$

Точним розв'язком стає пряма

$$u(t) = \frac{8}{2\pi - \alpha}t + 1 = \frac{13}{2\pi}t + 1, t \in \left[0, \frac{8}{13}2\pi\right].$$

Складаючи систему рівнянь типу (13), де

$$f_{2n+2} = 7.4, f_{2n+3} = 5.8, f_{2n+4} = 4.2, \\ f_{2n+5} = 2.6,$$

отримуємо наближений розв'язок  $T_6(t)$ .

Зрозуміло, що відносна похибка наближених розв'язків, отриманих таким чином, залежить від кількості фантомних точок та від способу вибору значень у цих фантомних точках. Ми обмежимося розглядом випадку, коли кількість фантомних точок є невеликою (2 та 4 фантомні точки); значення ж у цих фантомних точках ми будемо вибирати виходячи з таких міркувань.

У випадку, якщо відсутні відомості про похідні шуканого розв'язку, то будемо застосовувати лінійну інтерполяцію. Якщо ж є оцінки першої або першої та другої похідних шуканого розв'язку, то значення у фантомних вузлах будемо вибирати з використанням цих оцінок. Нарешті, інколи вдається підібрати такі значення у фантомних точках, при яких до-

сягаються аномальне зменшення похибки наближеного розв'язку.

В ролі тестового прикладу розглядається крайова задача типу (14), в якій в залежності від кількості вузлових точок сітки змінювалася крайова умова на правому кінці відрізка. Результати обчислень наводяться в таблицях 1,2.

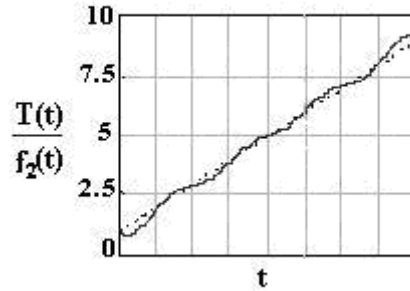


Рис.3. Графіки точного  $f_2(t)$  і наближеного  $T(t)$  розв'язків на відрізку  $\left[0, \frac{8}{11}2\pi\right]$ .

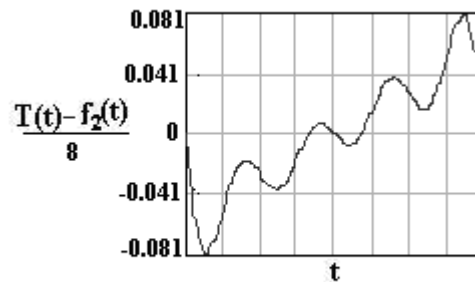


Рис. 4. Графік відносної похибки наближеного розв'язку на відрізку  $\left[0, \frac{8}{11}2\pi\right]$ . Відносна похибка зменшилася в 2.8 разів.

Із аналізу даних, наведених в табл. 1-2 випливає, що існують набори значень у фантомних точках, при яких похибки наближених розв'язків є аномально малими. Цей факт, який, швидше за все, характеризує потенціальну можливість зменшення похибки, вимагає пояснень, які ми сподіваємось надати в подальших роботах.

Наостанок зауважимо, що наведені способи вибору значень у фантомних вузлах дозволяють використовувати більші обсяги інформації при відшуканні набли-

жених розв'язків; інакше кажучи, через значення у фантомних вузлах ми непрямим чином використовуємо додаткові ві-

домості про шуканий розв'язок заданої задачі.

Таблиця 1. Відношення відносних похибок розв'язків диференціального рівняння без фантомних вузлів до відносних похибок розв'язків з 2-ма фантомними вузлами

Кількість вузлових точок	Використання крайових умов	Використання крайових умов та оцінок 1-ої похідної	Використання крайових умов та оцінок 1-ої та 2-ої похідних	Значення підібрані
5	2.5	6.6	11	13.9
9	2.8	6.4	12	12
13	3	6.6	11.5	11

Таблиця 2. Відношення відносних похибок розв'язків диференціального рівняння без фантомних вузлів до відносних похибок розв'язків з 4-ма фантомними вузлами

Кількість вузлових точок	Використання крайових умов	Використання крайових умов та оцінок 1-ої похідної	Використання крайових умов та оцінок 1-ої та 2-ої похідних	Значення підібрані
5	3.25	9.6	25.8	47
9	4.2	11	24	153.3
13	5.1	14.4	32.8	270.6

### Висновки

Запропоновано метод знаходження наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь для випадків, коли цей розв'язок наближується тригонометричними многочленами, заснований на застосуванні методу фантомних вузлів.

Властивості системи фундаментальних функцій, які використовуються при побудові наближеного розв'язку, дозволяють позбутися залежності кількості рівнянь алгебраїчних систем, що підлягають розв'язанню, від кількості фантомних вузлів, оскільки крайові умови та значення функції у фантомних вузлах входять лише в праві частини рівнянь цих систем. Це дозволяє задавати кількість фантомних вузлів виходячи із міркувань забезпечення необхідної точності отримуваних розв'язків, не ускладнюючи при цьому задачу відшукування невизначених параметрів. Способи вибору значень у фантомних вузлах відкривають можливість використовувати більший обсяг інформації при відшуванні наближеного розв'язку; інакше кажучи, через значення у фантомних вузлах ми непрямим чином викорис-

товуємо додаткові відомості про шуканий розв'язок. Важливість цього факту важко перебільшити, проте він вимагає додаткових досліджень.

Запропонований метод відкриває широкі можливості для побудови швидкодіючих алгоритмів побудови наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

### Список література

1. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – Наука, М., 1977. – 512 с.
2. Хемминг Р.В. Численные методы. – М., 1968 г. – 400 с.
3. Денисюк В.П. О некоторых методах улучшения сходимости тригонометрических рядов Фурье и интерполяционных тригонометрических многочленов//Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science, Number 33 (2012), <http://journal.qu.edu.az>.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина – М.: Мир, 1988. – 352 с.

Статтю подано до редакції 5.03.2014