УДК 62.50

Антонов В.К., д.т.н.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ПОРЯДКУ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Национальный авиационный университет

vladimir_antonov_50@mail.ru

Предложена операция дифференцирования по порядку дифференцирования, основанная на повторном применении операторов дробного дифференцирования, и дифференциальные уравнения, содержащие эту операцию. Показано, что они сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Приведены примеры явлений, описываемых дифференциальными уравнениями с производными по порядку дифференцирования

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дробное дифференцирование

Введение

В естественных приложениях рассматриваются задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, содержащими дробные производные [1-3]. Уравнения с дробными производными представляют развивающуюся и не завершенную область исследований. Поэтому в ней возможно получение новых результатов путем введения ранее не использовавшихся степеней свободы построения их структур. Так, например, были построены уравнения с порядками дифференцирования, зависящими от фазовых координат [4]. Переменность и непрерывность порядка дифференцирования в этих уравнениях подсказывает естественное продолжение, состоящее во введении дифференцирования по порядку дифференцирования. Приведем пример системы третьего порядка (при естественных обозначениях независимой переменной и фазовых координат) с двукратным (более высокого уровня) дифференцированием:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^z}{dy^z}\frac{d^y}{dt^y}x(t)=f_1(t,x,y,z);\\
&\frac{d^x}{dz^x}\frac{d^z}{dt^z}y(t)=f_2(t,x,y,z);\\
&\frac{d^y}{dx^y}\frac{d^x}{dt^x}z(t)=f_3(t,x,y,z).
\end{aligned}\tag{1}$$

Дифференцирование по порядку дифференцирования может иметь более высокую кратность, например 3, и иметь циклический характер. Получаем дифференциальную систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^x}{dz^x}\frac{d^z}{dy^z}\frac{d^y}{dt^y}x(t)=f_1(t,x,y,z);\\
&\frac{d^y}{dx^y}\frac{d^x}{dz^x}\frac{d^z}{dt^z}y(t)=f_2(t,x,y,z);\\
&\frac{d^z}{dy^z}\frac{d^y}{dx^y}\frac{d^x}{dt^x}z(t)=f_3(t,x,y,z).
\end{aligned}\tag{2}$$

Это обыкновенные дифференциальные уравнения.

Возможны уравнения с дробными частными производными по порядкам дифференцирования, например

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^x}{\partial z^x}\frac{\partial^z}{\partial y^z}\frac{\partial^y}{\partial t^y}f(t,x,y,z)+\\
&\frac{\partial^y}{\partial x^y}\frac{\partial^x}{\partial z^x}\frac{\partial^z}{\partial t^z}f(t,x,y,z)+\\
&+\frac{\partial^z}{\partial y^z}\frac{\partial^y}{\partial x^y}\frac{\partial^x}{\partial t^x}f(t,x,y,z)=0
\end{aligned}\tag{3}$$

Операторы дифференцирования в уравнениях (1–3) по построению не коммутативны.

Постановка задачи

Определим производные по порядку дифференцирования, используя оператор дробного дифференцирования, основанный на интерполяции по порядку дифференцирования с помощью полинома Лагранжа [5]. Производная нулевого порядка по порядку дифференцирования n

функции $f(x)$ (при использовании в приближенном представлении оператора дробного дифференцирования производных целого порядка не выше четвертого) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d^0}{dn^0}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{1}{24}(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)f(x)-\\
-\frac{1}{6}(n^4-9n^3+26n^2-24n)\frac{df(x)}{dx}+\\
+\frac{1}{4}(n^4-8n^3+19n^2-12n)\frac{d^2f(x)}{dx^2}-\\
-\frac{1}{6}(n^4-7n^3+14n^2-8n)\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\\
+\frac{1}{24}(n^4-6n^3+11n^2-6n)\frac{d^4f(x)}{dx^4}\end{aligned} \tag{4}$$

и совпадает с дробной производной этой функции. Производные по порядку дифференцирования порядка от единицы до пяти имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d^1}{dn^1}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{1}{12}(2n^3-15n^2+35n-25)f(x)-\\
-\frac{1}{6}(4n^3-27n^2+52n-24)\frac{df(x)}{dx}+\\
+\frac{1}{2}(2n^3-12n^2+9n-6)\frac{d^2f(x)}{dx^2}-\\
-\frac{1}{6}(4n^3-21n^2+28n-8)\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\\
+\frac{1}{12}(2n^3-9n^2+11n-3)\frac{d^4f(x)}{dx^4}\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dn^2}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{1}{12}(6n^2-30n+35)f(x)-\\
-\frac{1}{3}(6n^2-27n+26)\frac{df(x)}{dx}+\\
+\frac{1}{2}(6n^2-24n+9)\frac{d^2f(x)}{dx^2}-\\
-\frac{1}{3}(6n^2-21n+14)\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\\
+\frac{1}{12}(6n^2-18n+11)\frac{d^4f(x)}{dx^4}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{d^3}{dn^3}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{1}{6}(6n-15)f(x)-$$
$$-(4n-9)\frac{df(x)}{dx}+$$
$$+(6n-12)\frac{d^2f(x)}{dx^2}- \qquad (7)$$
$$-(4n-7)\frac{d^3f(x)}{dx^3}+$$
$$+\frac{1}{6}(6n-9)\frac{d^4f(x)}{dx^4}$$

$$\frac{d^4}{dn^4}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=f(x)-$$
$$-4\frac{df(x)}{dx}+$$
$$+6\frac{d^2f(x)}{dx^2}- \qquad (8)$$
$$-4\frac{d^3f(x)}{dx^3}+$$
$$+\frac{d^4f(x)}{dx^4}$$

$$\frac{d^5}{dn^5}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=0 \qquad (9)$$

Выражения (4-8), подставим в (4) вместо функции и ее производных, а порядок дифференцирования функции n заменим порядком дифференцирования по порядку дифференцирования, который обозначим через m. То есть повторно используем оператор дробного дифференцирования. Получим определение производной по порядку дифференцирования от производной дробного порядка функции $f(x)$.

$$\frac{d^m}{dn^m}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{1}{24}(m^4-10m^3+35m^2-50m+24)\frac{d^0}{dn^0}\frac{d^n}{dx^n}f(x)-$$
$$-\frac{1}{6}(m^4-9m^3+26m^2-24m)\frac{d^1}{dn^1}\frac{d^n}{dx^n}f(x)+$$
$$+\frac{1}{4}(m^4-8m^3+19m^2-12m)\frac{d^2}{dn^2}\frac{d^n}{dx^n}f(x)- \qquad (10)$$
$$-\frac{1}{6}(m^4-7m^3+14m^2-8m)\frac{d^3}{dn^3}\frac{d^n}{dx^n}f(x)+$$
$$+\frac{1}{24}(m^4-6m^3+11m^2-6m)\frac{d^4}{dn^4}\frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

Обозначая в (4) полиномы переменной n соответственно как $E_1(n)$, $E_2(n)$, $E_3(n)$, $E_4(n)$, $E_5(n)$, а полиномы переменной m в (10) как $F_1(m)$, $F_2(m)$, $F_3(m)$, $F_4(m)$, $F_5(m)$, выражение (10) перепишем в векторно-матричном виде

$$\frac{d^m}{dn^m}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\left(F_1F_2F_3F_4F_5\right)\cdot\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \\ \frac{dE_1}{dn} & \frac{dE_2}{dn} & \frac{dE_3}{dn} & \frac{dE_4}{dn} & \frac{dE_5}{dn} \\ \frac{d^2E_1}{dn^2} & \frac{d^2E_2}{dn^2} & \frac{d^2E_3}{dn^2} & \frac{d^2E_4}{dn^2} & \frac{d^2E_5}{dn^2} \\ \frac{d^3E_1}{dn^3} & \frac{d^3E_2}{dn^3} & \frac{d^3E_3}{dn^3} & \frac{d^3E_4}{dn^3} & \frac{d^3E_5}{dn^3} \\ \frac{d^4E_1}{dn^4} & \frac{d^4E_2}{dn^4} & \frac{d^4E_3}{dn^4} & \frac{d^4E_4}{dn^4} & \frac{d^4E_5}{dn^4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f(x) \\ \frac{df(x)}{dx} \\ \frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ \frac{d^3f(x)}{dx^3} \\ \frac{d^4f(x)}{dx^4} \end{pmatrix} \tag{11}$$

В (11) – произведение вектора – строки на матрицу есть вектор – строка, компоненты которого зависят от m и n.

Обозначая их через P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (11) перепишем в компактном виде скалярного произведения векторов.

$$\frac{d^m}{dn^m}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\left(P_1P_2P_3P_4P_5\right)\cdot\begin{pmatrix} f(x) \\ \frac{df(x)}{dx} \\ \frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ \frac{d^3f(x)}{dx^3} \\ \frac{d^4f(x)}{dx^4} \end{pmatrix}= \tag{12}$$

$$=P_1(m,n)f(x)+P_2(m,n)\frac{df(x)}{dx}+P_3(m,n)\frac{d^2f(x)}{dx^2}+P_4(m,n)\frac{d^3f(x)}{dx^3}+P_5(m,n)\frac{d^4f(x)}{dx^4}$$

Для дифференцирования кратности более двух, как в уравнениях (2) и (3), формула (12) сохраняет свою структуру, а полиномы P становятся полиномами большего числа переменных. Применяя их индексацию с использованием нулевого индекса, (12) можно записать еще более компактно

$$\frac{d^m}{dn^m}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\sum_{i=0}^{4}P_i(m,n)\cdot\frac{d^if(x)}{dx^i} \tag{13}$$

Отрицательные показатели дифференцирования соответствуют операции интегрирования. Соответствующие уравнения являются интегро-дифференциальными. Оператор дробного дифференцирования (4) содержит производные не выше четвертого порядка, и соответствующие формулы являются приближенными и конечными. В интегро-дифференциальном случае точная запись оператора (13) имеет вид

$$\frac{d^m}{dn^m}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}P_i(m,n)\cdot\frac{d^if(x)}{dx^i} \tag{14}$$

Уравнения (12) приводимы к нормальной форме (для численного решения). Постепенно увеличивая количество производных в операторе дробного дифференцирования [5], получаем последовательность решений, предел которой в случае сходимости является результатом.

В неоднородном случае наличия правой части уравнение имеет вид

$$\frac{d^m}{dn^m}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\Phi(x,f(x)), \tag{15}$$

Уравнениями вида (15) описываются процессы с памятью и последействием.

Примерами могут быть эффекты: излучения света жидкостью, в которой под действием ультразвука создается трение при больших градиентах скорости, или деформируемым твердым телом; изменения сцинтилляционных свойств кристаллов детекторов элементарных частиц при воздействии на них ультразвука; возбуждение радиоактивного распада под действием ультразвука (сонорадиационный эффект); уменьшения работы выхода в фотоэффекте при действии на катод ультразвука; возбуждения электродинамических эффектов (как причины турбулентности) в пограничном слое в гидромеханике; излучения света турбулентным потоком (установка содержит тонкие световоды и фотоумножители, - интересно усреднение измерений в пограничном слое и частотный анализ); излучения и поглощения света и звука клетками живых организмов (головного мозга человека, вирусами), что может применяться для лазерной (с помощью световодов) и ультразвуковой онкотерапии; каталитического влияния когерентного света, голограмм и ультразвука на химические процессы; фокусирования лепестками цветка (как направленной антенной) солнечного света на пестике; преобразования солнечной энергии в крыльях насекомых в химическую (биофотосинтез); преобразования генетического кода бактерий и вирусов при их механическом столкновении – подобно микрочастицам на ускорителях (например вирусов СПИДа, онковирусов – с целью получения новых лекарственных препаратов); влияния гравитации на радиоактивный распад химических элементов – в направлении к тяготеющей массе распад интенсивнее, чем в противоположном направлении (в силу связей между различными типами взаимодействий, нарушающими соответствующие «локальные» внутритиповые симметрии). Экспериментальная установка для исследования этого эффекта состоит из лабораторного источника радиации (например радиевого), детекторов α, β и γ - частиц, и счетного блока. Источник и детекторы закрепляются на поворотной в вертикальной плоскости платформе. Платформа периодически поворачивается на 180^0, пребывая равное (например, 1 час) время в положениях совпадения и антисовпадения направления источник-детекторы с направлением силы тяжести. В этих положениях автоматически считаются накапливающиеся числа актов распада. Ожидаемый эффект состоит в регистрации большего числа распадов в направлении совпадения с силой тяжести. Проводя эксперименты на Земле и на Луне, ожидаем отношения разности счетов как масс этих планет с точностью до различия хода времени на них. При оценке энергии частиц получаем информацию для определения универсальной гравитационной постоянной. Идентификация по результатам экспериментов соответствующих математических моделей этих эффектов может осуществляться в классе предлагаемых уравнений.

Еще один шаг обобщения состоит в придании фазовому пространству непрерывной размерности. Размерность содержит континуум составляющих, т.е. возможны и не целые измерения. На это указывает факт существования полуцелого спина элементарных частиц. Например, у отрезка прямой, имеющего степень свободы вращения в плоскости, и наблюдаемого из точки этой плоскости, спин относительно наблюдателя равен ½. Вектор представляется функцией размерности как непрерывного аргумента. Размерность является равноправной с другими фазовыми координатами, и порождает проблему ее отрицательности (зеркальное отображение отрезка является отрезком отрицательной длины, а зеркальное отображение часов является часами, работающими в отрицательном времени). Соответствующие стандартному «целооперационному» дифференциальному анализу операции взятия нормы, скалярного и векторного произведения, градиента, ротора и дивергенции становятся дробными и приобретают интегральное представление. Рациональность попытки такого представления реальности состоит в обеспечении более общих степеней свободы для построения сценариев развития материи, пространства и времени. Если на микроуровне материя имеет историю развития, то пространство и время, как формы ее существования, также не должны быть статичными.

По аналогии с известными определениями метрики, для случая пространства с континуальной размерностью запишем выражение для квадрата интервала

$$ds^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(i) \cdot dx^2(i) \cdot di \;, \qquad (16)$$

где i - непрерывный «номер» пространственной координаты (имеет смысл индекса в целооперационном анализе); g - метрическая функция непрерывного номера; $dx(i)$ - малое приращение координаты в направлении i. В (16) нижним пределом интегрирования может быть ноль. Нулевой (и этим выделенной) координате естественно придать смысл времени. По мере увеличения i время непрерывно меняет физический смысл до смысла пространства. Уравнения движения получаются приравниванием нулю вариации действия. Возникает новая проблема - взятия нецелочисленной вариации. Естественные связи между динамической размерностью пространства, параметрами действия и порядком вариации предлагается выбирать по результатам идентификации экспериментов с высокоэнергетическими частицами на ускорителях. Естественность предлагаемого подхода состоит в возможности построения моделей развития материи, в которых рождение и развитие новых уровней ее организации, пространства и времени, имеет множественный характер (на микроуровне каждое взаимодействие элементарных частиц воспроизводит всю эволюцию материи до уровня организации продуктов взаимодействия), и не является исключительным актом типа Большого взрыва. Адекватность такого подхода реальности на макроуровне подтверждается существованием астрономических объектов – квазаров, джеты которых излучают материю черной дыры, и в результате процессы развития высших уровней ее организации повторяются, образуя круговорот материи, пространства и времени во Вселенной – подобно круговороту воды из школьного курса природоведения. В биологии развитие плода повторяет этапы эволюции биологического вида.

Предлагаемые уравнения записываются компактно, но в развернутом виде при зависимости порядков дифференцирования от фазовых координат видны взаимодействующие многоуровневые «межсвязевые» связи – как в редакции уравнений Колмогорова [6]. Интересно соответствие уравнений с дифференцированием по порядку дифференцирования диаграммам Фейнмана [7[. Они соотносятся как уравнения движения и структурные схемы в теории автоматического управления.

Выводы

В целом, идея континуальной размерности создает условия более равномерного распределения степеней свободы понимания устройства материи по факторам проявления ее организации, повышает универсальность и эффективность формализма при построении математических моделей систем в связи с их развитием.

Список литературы

1. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб. – 1868. – т. 3, вып.1. – С. 1-68.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
3. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев, НАН Украины, 2008. – 256 с.
4. L.Ya.Kobelev Generalized Riemann-Liouville fractional derivatives for multifractal sets // arHiv^math.CA/0002008 v1 1Feb 2000, 4 p.
5. Антонов В.К. Застосування похідних дробного порядку в задачах структурної ідентифікації і механіки. Вісник НАУ. - 2009. - №2. – С. 178–183.
6. Антонов В.К. Управление трением. Проблеми тертя та зношування: наук.-техн. зб. – К.:НАУ, 2010. – Вип. 52. – С. 38-44.
7. Фейнман Р., Теория фундаментальных процессов, пер. с англ., М., 1978. – 200 с.

Статью представлено в редакцию 13.01.2014