

# ОПТИМІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЦІЛІСНОСТІ ГЛОБАЛЬНОЇ НАВІГАЦІЙНОЇ СУПУТНИКОВОЇ СИСТЕМИ

Національний авіаційний університет

Наведено результати оптимізації контролю цілісності навігаційних визначень за сигналами Глобальної навігаційної супутникової системи при управлінні повітряним рухом.

## Вступ

Відповідно до стратегії ICAO (Міжнародна організація цивільної авіації) та Євроконтролю проводяться заходи щодо поступового переходу до супутникової навігації, як основного засобу аеронавігації. Концепція ICAO передбачає широке застосування GNSS (Глобальна навігаційна супутникова система) з системами функціонального доповнення GBAS (наземне функціональне доповнення) та SBAS (супутниково функціональне доповнення) на всіх стадіях польоту із подальшим поступовим виводом з експлуатації традиційних наземних систем аеронавігації [1-3].

## Постановка задачі дослідження

Забезпечення високого рівня управління польотами повітряних кораблів передбачає постійний моніторинг бортовою навігаційною апаратурою повітряних кораблів параметрів радіонавігаційного поля GNSS – автономний контроль цілісності приймача (RAIM) [2, 4].

## Аналіз досліджень і публікацій

Автономний контроль цілісності забезпечує здатність навігаційної апаратури споживача, відповідно до імовірнісних та точнісних вимог, що пред'являються до кожного етапу польоту, виявляти відмову у власних показаннях. Цілісність є імовірнісною величиною яка залежить від взаємного розташування навігаційних супутників щодо положення споживача, що є дуже небезпечним з точки зору управління польотами повітряних кораблів, особливо на етапі заходу на посадку та посадці [2, 4].

Така ситуація привела до того, що сучасна супутникова навігаційна апаратура, яка застосовується при управлінні польотами повітряних кораблів, повинна мати функцію RAIM [2, 4]. Також слід зазначити що вже існують комерційні онлайн сервіси GRPS (сервіс прогнозування RAIM GNSS) [5].

## Мета роботи

Основною метою роботи є оптимізація контролю цілісності GNSS при управлінні повітряним рухом.

## Оптимізація контролю цілісності GNSS

Розглянемо задачу оптимізації контролю цілісності GNSS з точки зору оптимального керування спостереженнями в багатоканальній навігаційній апаратурі споживача.

Для зменшення математичних викладень доцільно обмежитись мінімальною кількістю навігаційних супутників, необхідних для позиціонування – чотирма [6, 7].

На рівень доступності та точність позиціонування GNSS впливає DOP (Dilution of Precision – фактор погіршення точності), який в свою чергу залежить від матриці геометрії  $G$  [6]. Таким чином, для оптимізації навігаційних визначень необхідно визначити умови, які приведуть до мінімізації величини DOP і відповідно до підвищення рівня доступності GNSS.

Розглянемо матрицю геометрії  $G$  чотирьох навігаційних супутників для декартової системи координат. Центр обраної системи координат (рис. 1) розмістимо в місці розташування користувача –  $U$ , вісь  $X$  сполучимо з одиничним вектором  $\bar{e}_{u-s_1}$  направленим на перший навігаційний супутник –  $S_1$ . Вісь  $Y$  розмістимо так, щоб одиничний вектор  $\bar{e}_{u-s_2}$ , направлений на другий навігаційний супутник –  $S_2$  лежав у площині  $XY$ .

Тоді матриця геометрії  $G$  для обраної системи координат (рис. 1) прийме наступний вид:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ l_2 & m_2 & 0 & 1 \\ l_3 & m_3 & n_3 & 1 \\ l_4 & m_4 & n_4 & 1 \end{bmatrix},$$

де  $l_k, m_k, n_k$  – компоненти вектора  $\bar{e}_{u-s_j}$ , що представляють собою його проекцію на координатні вісі декартової системи координат з центром у місці розташування користувача.

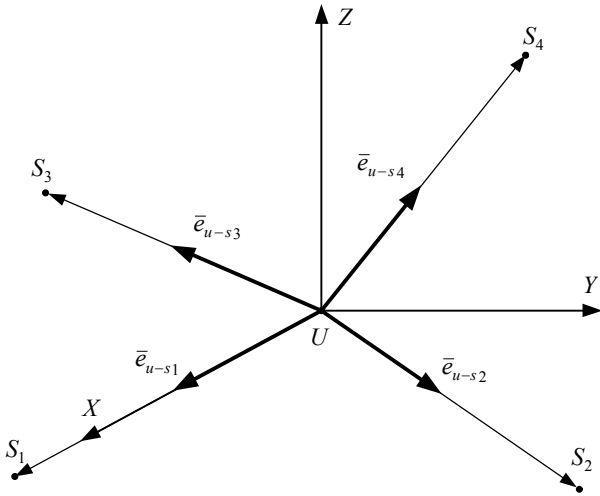


Рис. 1 Положення осей обраної системи координат

Модулі одиничних векторів, що спрямовані на навігаційні супутники, дорівнюють одиниці [8, 9, 10], таким чином, має місце наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} 1 &= l_2^2 + m_2^2 = l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = \\ &= l_4^2 + m_4^2 + n_4^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Зворотна матриця геометрії  $G^{-1}$  визначається як:

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

де  $G_{ik}$  – алгебраїчне доповнення відповідного елемента матриці  $G$ .

Якщо у виразі (2) транспоновану матрицю з алгебраїчних доповнень позначити, як  $adjG$ , отримаємо:

$$G^{-1} = adjG / \det G. \quad (3)$$

Таким чином, з урахуванням (3) одержимо наступне вираження для визначення матриці  $(G^T G)^{-1}$ :

$$(G^T G)^{-1} = (adjG)(adjG^T) / (\det G)^2. \quad (4)$$

Геометричний фактор погіршення точності ( $GDOP$ ) буде визначатися, як корінь квадратний зі сліду (4) [6]:

$$GDOP = \sqrt{\text{Tr}(G^T G)^{-1}}. \quad (5)$$

З огляду на (4) вираження (5) прийме вид:

$$\begin{aligned} GDOP &= \sqrt{\text{Tr} \left[ \frac{(adjG)(adjG^T)}{(\det G)^2} \right]} = \\ &= \sqrt{A / (\det G)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Для визначення оптимальної конфігурації положення навігаційних супутників по відношенню до споживача, що буде мінімізувати величину  $GDOP$ , яку визначаємо за (6) з урахуванням обмежень обраної системи координат (1), уведемо функцію  $P$  з невизначеними множниками Лагранжа  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  [8, 9, 10, 11, 12].

$$\begin{aligned} P &= \left[ \frac{A}{(\det G)^2} \right] + \lambda_2 (l_2^2 + m_2^2 - 1) + \\ &+ \lambda_3 (l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 - 1) + \\ &+ \lambda_4 (l_4^2 + m_4^2 + n_4^2 - 1) \end{aligned} \quad (7)$$

Для знаходження екстремуму функції  $P$  продиференціюємо (7) по  $l_2 \dots n_4$  і прирівняємо до нуля. Використовуючи правило диференціювання дробу, у загальному виді одержимо наступний вираз:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{A_i (\det G)^2 - 2A (\det G) (\det G)_i}{((\det G)^2)^2} + \\ &+ 2\lambda_j i = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

де:  $i = l_2, l_3, l_4, m_2, m_3, m_4, n_3, n_4$ ;  $j = 2$  для  $i = l_2, m_2$ ;  $j = 3$  для  $i = l_3, m_3, n_3$ ;  $j = 4$  для  $i = l_4, m_4, n_4$ .

Рішення (8) щодо невідомих,  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  дає [8, 9, 10, 11, 12, 13]:

$$\begin{aligned} (m_i A_i - l_i A_{m_i}) \det G - 2A [m_i (\det G)_{l_i} - \\ - l_i (\det G)_{m_i}] = 0, \quad i = 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (n_j A_j - l_j A_{n_j}) \det G - 2A [n_j (\det G)_{l_j} - \\ - l_j (\det G)_{n_j}] = 0, \quad j = 3, 4 \end{aligned} \quad (10)$$

Спільне рішення (1), (9), (10) дає наступну матрицю геометрії, що мінімізує  $GDOP$ :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Отримана матриця геометрії припускає рівність кутів  $\varphi$  (рис. 2) між одиничними векторами  $\bar{e}_{u-s1}$  й  $\bar{e}_{u-s2}$ ,  $\bar{e}_{u-s1}$  й  $\bar{e}_{u-s3}$ ,  $\bar{e}_{u-s1}$  й  $\bar{e}_{u-s4}$  (перший стовпець матриці геометрії). Таким чином, шуканий кут між одиничними векторами визначається з наступного вираження:

$$\cos \varphi = -\frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = 109.47^\circ. \quad (12)$$

Рішення найпростіших тригонометричних рівнянь, що впливають із рис. 2, дає однакове значення кутів  $\gamma$  між одиничними векторами  $\bar{e}_{u-s2}$  й  $\bar{e}_{u-s3}$ ,  $\bar{e}_{u-s3}$  й  $\bar{e}_{u-s4}$ , та  $\bar{e}_{u-s2}$  й  $\bar{e}_{u-s4}$ :

$$\gamma = 109.47^\circ. \quad (13)$$

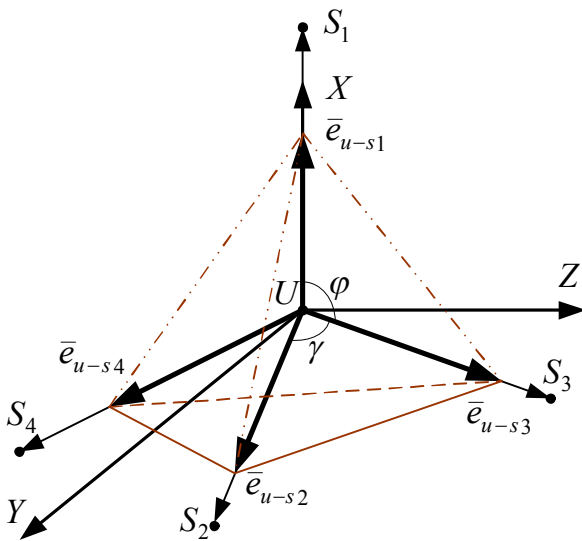


Рис. 2 Оптимальне розташування чотирьох навігаційних супутників в обраній системі координат

Відповідно до (11) одержимо наступну матрицю  $(G^T G)^{-1}$  і мінімізовані значення геометричних факторів для чотирьох навігаційних супутників:

$$(G^T G)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$GDOP = 1.5811, PDOP = 1.5000, \\ HDOP = 1.2247, VDOP = 0.8660, \\ TDOP = 0.5000$$

Слід зазначити, що якщо користувач знаходиться на поверхні землі то він не зможе отримати вище визначену оптимальну геометрію розташування навігаційних супутників, так як у такому випадку навігаційні супутники  $S_2$ ,  $S_3$  та  $S_4$  будуть знаходитись нижче обрїю. Таким чином, найкраща можлива геометрія буде обмежена площиною обрїю і оптимально можливі кути  $\varphi$  і  $\gamma$  між одиничними векторами будуть становити:

$$\varphi = 90^\circ, \gamma = 120^\circ. \quad (15)$$

З урахуванням вище означених обмежень (17) отримаємо наступну матрицю геометрії  $G$ , матрицю  $(G^T G)^{-1}$  і значення геометричних факторів погіршення точності:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & -1 \\ 0 & -0.5 & -0.866 & -1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$(G^T G)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.33 & 0 & 0 & 0.33 \\ 0 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.67 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.33 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$GDOP = 1.7321, PDOP = 1.6330, \\ HDOP = 1.1547, VDOP = 1.1547, \\ TDOP = 0.5774 \quad (18)$$

На практиці користувачу необхідно знати точність позиціонування й зміну точності позиціонування в горизонтальній і вертикальній площині. У зв'язку із цим осі декартової системи координат орієнтують по сторонах світу: X – на Схід, Y – на Північ, Z – у зеніт.

Для системи координат схід-північ-нормаль до дотичної площини в точці розташування користувача, матриця геометрії  $G$  приймає вид:

$$\begin{bmatrix} \cos(E_1) \cdot \cos(Az_1) & \cos(E_1) \cdot \sin(Az_1) & \sin(E_1) & 1 \\ \cos(E_2) \cdot \cos(Az_2) & \cos(E_2) \cdot \sin(Az_2) & \sin(E_2) & 1 \\ \cos(E_3) \cdot \cos(Az_3) & \cos(E_3) \cdot \sin(Az_3) & \sin(E_3) & 1 \\ \cos(E_4) \cdot \cos(Az_4) & \cos(E_4) \cdot \sin(Az_4) & \sin(E_4) & 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

де  $Az$  – азимут супутника;  $E$  – кут місця супутника.

Елементами матриці є проєкції вектора  $\bar{e}_{u-s}$  на координатні вісі системи координат схід-північ-нормаль до дотичної площини в точці розташування користувача.

Розташуємо навігаційні супутники із урахуванням (15):  $S_1$  у зеніті ( $E_1 = 90^\circ, Az_1 = 0^\circ$ ), а  $S_2, S_3$  і  $S_4$  з різницею в 120 градусів по азимуті в площині обрїю.

Тоді враховуючи (15) одержимо наступну матрицю геометрії:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.866 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Походячи з (20) розраховуємо матрицю  $(G^T G)^{-1}$  й значення геометричних факторів погіршення точності:

$$(G^T G)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.33 & 0.33 \\ 0 & 0 & 0.33 & 0.33 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} GDOP &= 1.7321, PDOP = 1.6330, \\ HDOP &= 1.1547, VDOP = 1.1547, \\ TDOP &= 0.5774 \end{aligned} \quad (22)$$

Порівнявши (16) і (20) та (18) і (22) робимо важливий висновок: значення  $PDOP$  не залежить від того, яка використовується система координат, а залежить тільки від взаємного положення супутників відповідно до користувача

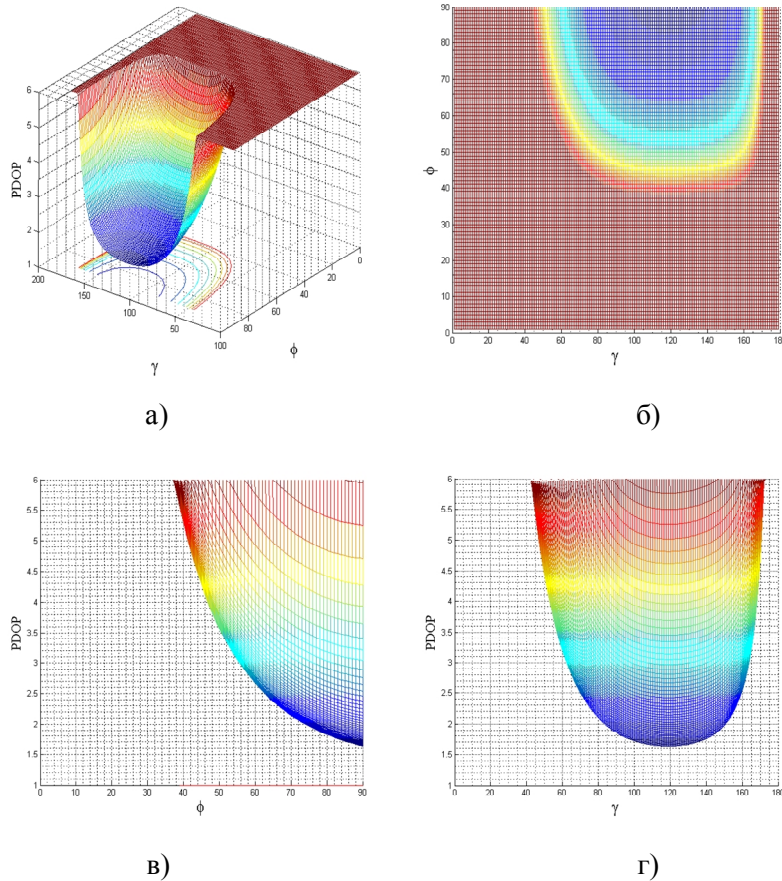


Рис. 3. Визначення  $PDOP$  по 4 супутникам

а) значення  $PDOP$  для 4 супутників; б) залежність  $PDOP$  від кутів  $\phi$  та у  $\gamma$  площині  $XY$ ;

в) залежність значення  $PDOP$  від кута  $\phi$ ; г) залежність значення  $PDOP$  від кута  $\gamma$

Для підтвердження вищесказаного у середі *MatLab* було проведено математичне моделювання визначення оптимального розташування навігаційних супутників по відношенню до споживача за для забезпечення оптимізації контролю цілісності *GNSS*. Якість оптимізації оці-

нювалась за значенням  $PDOP$ . На рис. 3, як приклад, наведено результати моделювання визначення  $PDOP$  за 4 навігаційним супутникам.

На рис. 3 а по вісі  $X$  відкладено кут  $\phi$ , по вісі  $Y$  – кут  $\gamma$ , а по вісі  $Z$  –  $PDOP$ , яке обме-

жено значенням  $b$ ; на рис. 3 б показано залежність  $PDOP$  від кутів  $\varphi$  та  $\gamma$  площині  $XY$  на рівні  $PDOP$ , що дорівнює  $b$ ; на рис. 3 в показана залежність значення  $PDOP$  від кута  $\varphi$ ; на рис. 3 г показана залежність значення  $PDOP$  від кута  $\gamma$ .

Також під час експерименту було проведено моделювання зміни  $PDOP$  в залежності від значення кутів між одиничними векторами  $\varphi$  й  $\gamma$  та кількості навігаційних супутників.

При проведенні експерименту кількість навігаційних супутників змінювалась від 5 до 12.

Значення  $PDOP$  знаходиться в межах  $1,6330 < PDOP < \infty$  для 4 навігаційних супутників і  $1,2061 < PDOP < \infty$  для 12 навігаційних супутників.

### Висновки

Розглянута методика оптимізації контролю цілісності навігаційних визначень у системах супутникової навігації із урахуванням геометричного фактору погіршення точності дозволяє дати практичні рекомендації щодо вибору оптимального вибору сузір'я  $GNSS$  на маршруті польоту повітряного корабля.

На основі розглянутої методики оптимізації контролю цілісності навігаційних визначень запропоновані геометричні умови вибору сузір'я навігаційних супутників, що дозволяють здійснити оптимальні навігаційні визначення в будь-якій точці маршруту польоту повітряного корабля.

Проведене математичне моделювання оптимізації оцінки контролю цілісності навігаційних визначень  $GNSS$  в залежності від кутів видимості та кількості навігаційних супутників дозволяє провести оптимальну якісну та кількісну оцінку цілісності  $GNSS$  на особливо небезпечних етапах польоту повітряного корабля за умов «втрати» навігаційних супутників, що пов'язане з певним маневруванням на етапі заходу на посадку та посадці.

### Список літератури

1. Doc. 9750. Глобальный аэронавигационный план применительно к системам CNS/ATM. – Монреаль: ICAO, 2007. – 139 с.
2. Doc. 9613. Руководство по навигации, основанной на характеристиках. – Монреаль: ICAO, 2008. – 304 с.
3. Navigation Application & NAVAID. Infrastructure Strategy for the ECAC. Area up to 2020. – Brussels: Eurocontrol, 2008. – 62 p.
4. Doc. 8168. Производство полетов воздушных судов. Том 1 правила производства полетов. – Монреаль: ICAO, 2006. – 319 с.
5. GNSS RAIM/RNP Prediction System. – Режим доступа:  
<https://tools.dwint.com/grps/home.html/wicket:interface/:0::INewBrowserWindowListener::>
6. Конин В.В., Харченко В.П. Системы спутниковой радионавигации – К.: Холтех, 2010. – 520 с.
7. Global positioning system standard positioning service performance standard, Assistant secretary of defense for command, control, communications, and intelligence, Washington, DC, Oct. 2001, – 66 p.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
9. Bogen H.A. Geometric Performance of the Global Positioning System. SAMSO-TR-74-169, AD-783210, P. 1-116, 1974.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
11. E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, Wiley, New York, 1993. – 520 с.
12. Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, John Wiley, New York, 1993. – 960 с.
13. Kihara, M., and Okada, T., “A Satellite Selection Method and Accuracy for the Global Positioning System”, Navigation, 1984. – 820 с.