УДК 517.11+519.92

[1]**Минаев Ю.Н.,** д.т.н.,
[2]**Филимонова О.Ю.,** к.т.н.,
[2]**Минаева Ю.И.,** к.т.н.

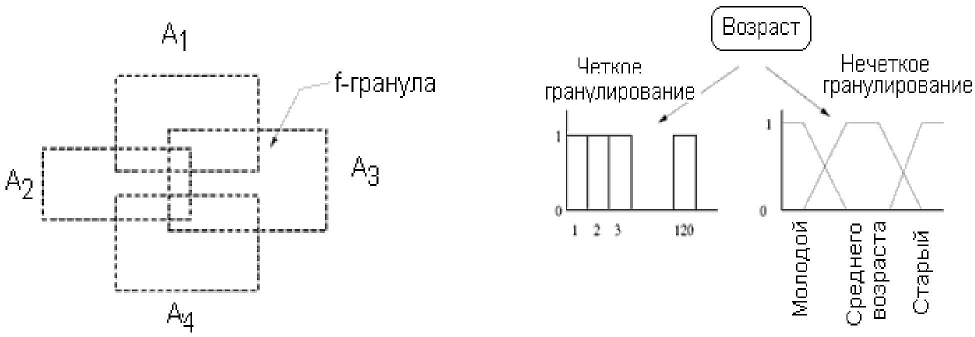
ГРАНУЛЯРНЫЙ КОМПЬЮТИНГ В СИСТЕМЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ НА УРОВНЕ ТЕНЗОРНЫХ ГРАНУЛ

[1] **Национальный авыационный университет**
[2] **Национальный авыационный университет**

Рассматрены вопросы представления НМ $\widetilde{A}$ как тензорных гранул с матрицами размерностью $2\times n$ и $n\times n$, где n – число различимых элементов. Принцип построения гранул, как группы объектов объединяемых неразличимостью, сходством, близостью (т.е. отношениями, обладающими, по крайней мере, свойствами симметричности и рефлексивности) позволяет тензорные гранулы рассматривать в качестве минимальных гранул, из которых должны формироваться крупные гранулы. Сформирован принцип ограниченности F-норм матриц гранул Сущность принципа состоит в том, что условие включения $\widetilde{A} \in U$ распространено на нормы матриц гранул (тензоров), моделирующих НМ и УМ , в рассматриваемом случае $\widetilde{A}$ $u U$ соответсвенно. Предложено гранулярные вычисления реализовывать в на основе моделей Кронекеровой алгебры, введены расширенные операции Кронекеровой алгебры - $\odot_{min}$ и $\otimes_g$.

Введение

В последнее 10-летие резко возрос интерес к гранулированию информации и гранулярным вычислениям (гранулированный компьютинг – ГрК). Это объясняется, прежде всего, тем, что *информационные гранулы* (ИГ) играют ведущую роль в представлении и обработке знаний когнитивными агентами. В частности, выделение скрытых знаний, определение новых свойств информационных объектов на основе методов интеллектуального анализа данных (ИАД), например, интеллектуальный кластерный анализ в условиях неопределенности [1] и др. задачи успешно решаются при использовании гранулярной парадигмы. При этом отмечается, что уровень грануляции (размер гранул) имеет принципиальное значение для описания агентом проблемы и выбора стратегии ее решения. В то же время не существует универсального уровня информационной грануляции; размер гранулы является проблемно-ориентированным, зависящим от агента и характера решаемой задачи.



а) б)

Рис.1. Иерархическая природа гранулирования:
а) пример гранулирования, б) четкие и нечеткие гранулы для понятия «возраст»

Современное состояние проблемы, основные определения

Первой работой, в которой поставлен вопрос гранулирования нечеткой информации и определения способов ее обработки, была работа Л.Заде [2], в которой *гранула* определена как группа объектов (или точек), которые представлены (изображены) *вместе* на основе различимости, сходства, близости. Последующее развитие идеи гранулирования нечеткой информации получили в работе [3]. Отмечено, что почти во всей человеческой аргументации и образовании понятия гранул есть нечеткими (*f*-гранулы).

В работе [4] приведены примеры того, что гранулирование в сущности есть иерархическим. Например, на рис. 1 гранула А состоит из нескольких гранул Ai. Тем не менее, горизонт формирователя значительно ограничен чем то самым крайним. Человеческая аргументация неточна по происхождению, и, кроме того, пределы между компонентами целого не могут быть отчетливо выраженными, следовательно, поскольку действительность не четка, гранулы должны также быть адекватными этому.

В работе [3] приведено определение гранулы как формальной группировки объектов, определенных обобщенным ограничением, в частности, $\left(\underbrace{\tilde{X}}_{\text{НП}}\quad\underbrace{\text{isr}}_{\text{связка}}\quad\underbrace{\tilde{R}}_{\text{НО}}\right)$ – рис. 2, там же представлена Декартова гранула,определяемая как Декартово произведение гранул (рис. 3), пример Декартового гранулирования $\mathbf{A}_i \times B_j$ – рис. 4.

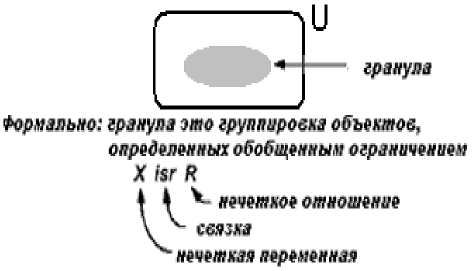


Рис. 2. Гранула

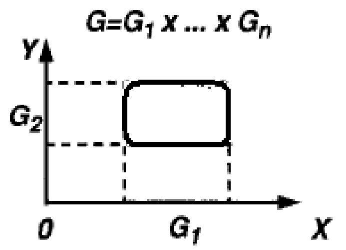


Рис. 3.Декартово гранулирование:
G=пожилой × высокий

В работах [5, 6] показано, что отказ от постулатов *принадлежности и различимости,* базовых для традиционных множеств (мн-в), приводит к появлению неклассических (нестандартных) теорий множеств (НТМ). Не касаясь известных НТМ – теории частей и границ Лесьневского и ее современных расширений, а также альтернативной теории множеств (АТМ) П. Вопенки [7] отметим, что в них впервые введено понятие «горизонта», вблизи которого возникают феномены неразличимости и нечеткости. К сожалению, в работах [5, 7] не поставлены вопросы, без ответа на которые дальнейшее продвижение в данном направлении исследований, по крайней мере, затруднено. К числу этих вопросов следует отнести следующие:

- является ли неразличимость следствием отсутствия информации или объекты могут быть различимыми в *одной шкале* и неразличимыми, т.е. тождественными, в другой – более укрупненной или размытой;
- должны ли в этих условиях использоваться принципиально разные системы координат, например, декартовы или *p*-адические;
- в какой метрике (Архимедовой или не-Архимедовой) возникает (или должна исследоваться) неразличимость и нечеткость.

Термины *гранула* и *гранулирование* своим появлением обязаны проблемам ИАД, попытка моделирования информационных систем на уровне моделей искусственного интеллекта неизбежно приводит к ИГ, т.к. их наличие есть атрибут естественного интеллекта. В работе [5] отмечено, что переход от нестандартных множеств к гранулярным вычислениям связан с решением ряда ключевых проблем, в частности:

- кто и что является потенциальным потребителем ИГ;
- специфика задач интеллектуального анализа данных как одного из типов задач ис-кусственного интеллекта, связанных с понятием ИГ;
- по определению четкое множество, НМ, интервал являются ИГ, следовательно, для них *необходимо* определить иерархическую структуру и определить ее роль в формирова-нии более крупных ИГ, т.к. любое укрупнение (усложнение) неизбежно влечет изменение структуры объекта (сложность по Г. Саймону напрямую связана со структурой объекта).

Использование ИГ ставит общую проблему гранулярной онтологии как онтологии представления *сложных* единиц информации и *выявления знаний* из данных, определения пути и методов, которыми эта проблема должна решаться [5]. Специфика современного представления гранулирования информации основана на *неклассическом* представлении множества, в свою очередь классическое представление основано на принципах *принадлежности* и *различимости* элементов, гранула – совокупность *неразличимых* (в определенном понимании) объектов (элементов), определяемая их количеством и типом [5, 6].

Принцип построения гранул требует определенных разъяснений: *неразличимость* понимается как *неразличимость по типу*, допускающая количественную оценку, например, ФП не различимы по своей природе, но количество ФП известно, в то же время ФП близки и сходны по своей природе.

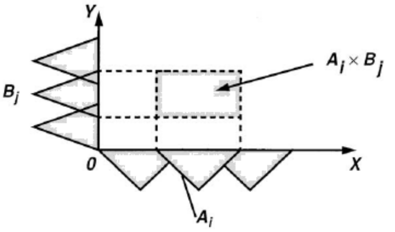


Рис. 4. Декартова грануляция: грануляции X и Y порождают грануляцию (X; Y). $\mathbf{A}_i$ – гранулы для X; B_j –гранулы для Y; $\mathbf{A}_i{\times}B_j$ гранулы для (X, Y),

$\mu_{A_i \times B_j}(u, v) = \mu_{A_i}(u) \therefore \mu_{B_j}(v)$,

$\therefore$ – связка, для $\wedge$ =min.

Кроме того, при построении гранул возникают вопросы:

- НМ и интервал являются гранулами, состоящими из элементов, каким образом в этих объектах необходимо учитывать матрицу *внутренней близости* (сходства), учитывающую *попарную* близость элементов – $x_i/\mu_i^{(x)}$, $x_{i+1}/\mu_{i+1}^{(x)}$, …; как интерпретировать эти матрицы, как учитывать вложенность НМ и УМ на уровне матриц близости;

- что является *минимальной* гранулой, из которой должны создаваться крупные гранулы, кроме того, уровень грануляции (размер гранул) имеет существенное значение для описания проблемы и выбора стратегии ее решения, следовательно, во всех ли случаях НМ с тругольной ФП достаточно для построения сложных гранул.

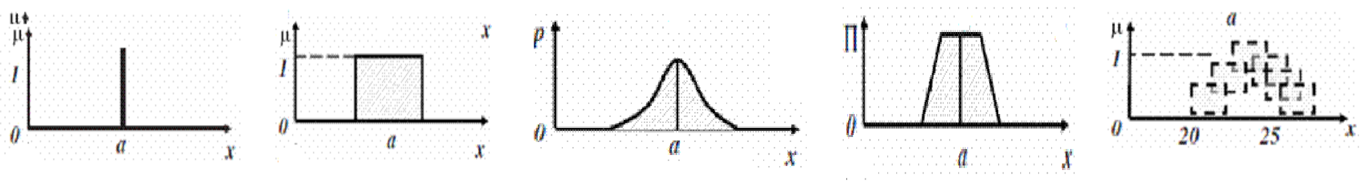
Отметим важную особенность гранул – целостность динамической информационной *структуры* и ее целенаправленность, размер гранулы является проблемно-ориентиро-ванным и зависящим от задачи и предполагаемого способа ее решения, однако роль струк-туры в процессе решения практически не рассмотрена, кроме того, преобразование гранул – проблема в гранулированном вычислении.

Интерпретации и классификации гранул даны в работах [2, 3], гранула – часть целого, одзадача (в задаче), кластер, переменное ограничение (в смысле Л. Заде), единица знания. Относительно классификации гранул, следует отметить, прежде всего, их многообразие: гранулы могут отличаться по своей природе, сложности, размеру, уровню абстрактности-детализации, термин «грануляция» предполагает процессы композиции (формирование более крупных гранул или объединение группы элементов) и декомпозиции (формирование более мелких гранул), однако классификация гранул по их внутренней структуре отсутствует. В цитированных выше работах Л. Заде приведены типичные модели гранул, отметим те, которые связаны с рассматриваемой задачей:

- интервалы;
- нечеткие множества;
- лингвистические переменные;
- кластеры.

Примитивы языка гранулярных вычислений – покрытия, разбиения, окрестности Данный контекст нуждается в определенном уточнении, т.к. гранула – НМ может представлять собой бинарное дерево – объединение кластеров, в состав примитивов следует внести тензоры и операции над ними [5, 6], гранулирование информации можно реализовать методами классификации и кластерного анализа, с помощью отношений вложеннос-ти и нестандартных множеств.

Примеры сингулярных и гранулярных значений (рис. 5) приведены в [3], в данной работе показана возможность их *однозначного* описания при помощи тензорных моделей.



а) б) в) г) д)

Рис. 5. Информационные гранулы [3]: а) сингулярное значение, б) четкий интервал, в) распределение вероятности, г) распределение возможности, д) нечеткий график.

Постановка задачи

Гранулярный компьютинг имеет достаточно много определений, приведем одно из них, предложенное в работе [8]: "… разработанная … на основе методологи *Systems Science*, современная парадигма, методология и *методика информационного анализа* неочевидно структурированных динамических систем («нечетко» структурированных систем) с изменяющейся в процессе функционирования структурой". Соответственно гранулярные вычисления включают в себя *мягкие» вычисления* (МВ) и собственно методологию и методику гранулярных вычислений. Отметим, что МВ – обобщенный термин, включающий в себя математические теории общей топологии, теорию НМ, нейросетевые вычисления и др.

Естественно, гранула состоит из элементов, при этом, элемент может быть гранулой, а гранула может быть элементом другой гранулы. Формально объединение элементов в гранулу, как это отмечалось выше, определяется исходя из сходства элементов, «близости» элементов и т.д., на практике нередко ограничиваются т.н. *визуальным сходством*, не взирая на то, что математическое сходство требует построения специальных матриц [9]. Каждая гранула обладает внутренними, внешними и контекстуальными свойствами. Процесс грануляции представляет собой итеративную алгоритмическую процедуру последовательного выделения частей различного уровня общности и согласования уровней абстракции и редукции при анализе неочевидно структурированных динамических систем. Отметим, что внутренние свойства НМ как *f*–гранулы наименее исследованы.

Хотя понятие «минимальной» (или «начальной» гранулы), из которых следует «собирать» крупные гранулы, не определено и зависит от контекста рассматриваемой проблемы, ниже понятия *множества элементов* (в общем случае нечеткого) не опускаются. Это обстоятельство отображается, в частности, в том, что отношения между гранулами описы-ваются с помощью нечетких графов и систем нечетких логических правил типа «если …, то …».

В работах [10-12] приведены принципы гранулирования, реализуемые на основе гранулярной логики и гранулярной математики, которые, в свою очередь, основаны на топологии, степенных операторных алгебрах, интервальных алгебрах, алгебрах нечетких, мягких и грубых множеств и т.д. При грануляции используются методы многокритериальной оптимизации.

В работе [13] рассмотрен метод представления информационных гранул, индуцированный нечеткостью, который является наиболее часто применяемым, показано, что нечеткая гранула (в общем случае НМ) может быть представлена как произведение независимых скалярных экспоненциальных функций, отметим, что в данной работе гранула рассматривается, в частности, как тензорное произведение векторов, представляющих собой элементы мн-ва упорядоченных пар, т.е. $\{x/\mu^{(x)}\} \to \left(x \otimes \mu^{(x)} \right)$.

Наиболее полно роль НМ как пользователь-ориентированного процессорного каркаса ГК отражена в работе [14]. НМ рассматривается как одна из ключевых технологий ГК, НМ-гранула информации, моделируемая основным понятием частичной принадлежности (членства). Частичное членство есть критическим в целом ряде повседневных явлений, НМ обеспечивают необходимый формализм, образованный многозначной логикой, в плохо формализованных задачах.

В соответствии с работой [15], НМ выступают как гранулированные представители числовых данных, что компонуются в некоторый контекст. Используя ФП, пытаются объединить их в виде компактного объекта. НМ выступают как агрегаты числовых данных, НМ могут формироваться на основе числовых данных через их кластеризацию (группирования). Тот факт, что каждая гранула обладает внутренними, внешними и контекстуальными свойствами, свидетельствует о ее автономности и самодостаточности. Поэтому одной из задач является исследование внутренних свойств НМ-гранулы (или *f*-гранулы), представленной в виде тензора.

Хотя процесс грануляции в общем случае представляет собой итеративную алгоритмическую процедуру последовательного выделения частей различного уровня общности и согласования уровней абстракции и редукции при анализе неочевидно структурированных динамических систем, в данной работе авторами он рассматривается только с позиций НМ-гранулы (или f-гранулы), представленной в виде тензора.

Рассматривается комплекс задач:

- представление ИГ в виде тензоров с матрицами $2\times m$ или $m\times m$, где m – количество различимых элементов, в случае НМ – число упорядоченных пар $\{x/\mu^{(x)}\}_1^m$;

- структурная модель информационной гранулы;
- математические операции с полученными ИГ;
- получение новой (скрытой) информации относительно свойств НМ, представлен-ных в виде гранул;
- прикладные задачи, связанные с оценкой влияния ФП на результат арифметической операции с ИГ.

НМ как п/мн-во упорядоченных пар: $\widetilde{A} = \{U, \mu\}$, где U – универсум, μ – ФП, т.е. $\widetilde{A} = \{u_i/\mu_i^{(u)}\}$, $\mu_i^{(u)} \to [0, 1]$, $\widetilde{A} \subset U\times[0, 1]$, в работе рассматривается в виде гранул 2-х форм:

$$\text{1-ая форма - } \widetilde{A} = \{u_i/\mu_i^{(u)}\} \to \mathbf{A}_{(1)} = \begin{pmatrix} u_i & \mu_i^{(u)} \end{pmatrix}_{i=1}^{n} = \begin{pmatrix} u_1 & \mu_1^{(u)}; \ldots u_n & \mu_n^{(u)} \end{pmatrix},$$

$$\text{2-ая форма - } \widetilde{A} = \{u_i/\mu_i^{(u)}\} \to \mathbf{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} [u] \otimes [\mu^{(u)}]^T \end{pmatrix}_{i=1}^{n} = \begin{pmatrix} u_1\mu_1^{(u)} \cdots u_1\mu_n^{(u)}; \ldots u_n\mu_1^{(u)} \cdots u_n\mu_n^{(u)} \end{pmatrix},$$

где ⊗ – символ тензорного (Кронекерова) произведения, ^{T} (или ') – символ транспонирования, $u=[u_1u_2\ldots u_n]$, $\mu=[\mu_1\mu_2\ldots\mu_n]$, размерность $\mathbf{A}_{(1)}$ – 2×n, размерность $\mathbf{A}_{(2)}$ – n×n. В случае, если НМ задается только своей ФП, используется диагональная форма представления НМ и УМ, на котором определено НМ.

Способ решения основных задач

Представление НМ $\widetilde{A}$ в форме тензоров с матрицами вида $\mathbf{A}_{(1)}$, $\mathbf{A}_{(2)}$ равносильно гранулированию НМ в виде Декартового произведения Ai×Bj [3], полученные объекты семантически совпадают с гранулами типа Ai ⊗ Bj. Отметим, что в данной работе тензор рассматривается как многомерный массив [16].

Применение тензорных гранул связано с реализацией внешних, внутренних и многомерных произведений тензоров, а также анализом их норм. В частности, анализ норм тензорных гранул для условий принадлежности, непринадлежности, частичной принадлежности может играть важную роль в принятии решений. Рассмотрим примеры.

Пусть $\widetilde{x} \overset{def}{=} \{x=[3\ 5\ 7], \mu=[0\ 1\ 0]\}$ и $\{[3\ 5\ 7], \mu=[1\ 1\ 1]\}$, ИГ для 2-ой формы представления имеют вид:

$$\text{tx=kron(x,[0 1 0]')=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

norm(tx,'fro') = 9.1104

а)

$$\text{tx1=kron(x,[1 1 1]')=} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

norm(tx1,'fro') = 15.7797

б)

F-нормы матриц близости гранул для случав:
а) n_{tx} = norm(squareform(pdist(reshape(tx1,9,1))),'fro')=20.7846,
б) n_{tx1} =norm(squareform(pdist(reshape(tx,9,1))),'fro')=32.3110.

Имеет место неравенство: $0 \le n_{tx} \le n_{tx1}$, где 0, n_{tx}, n_{tx1} – нормы векторизованных гранул ЧМ непрнадлежности, принадлежности и НМ с треугольной ФП.

ИГ для 1-ой формы представления:

tx=[3/ 0,5/1,7/ 0]→

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

norm(tx,'fro') = 9.16

а)

tx1=[3/1,5/1, 7/1]→

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

norm(tx1,'fro') = 9.27

б)

tx3=[3/0,5/0, 7/0]→

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

norm(tx3,'fro') = 9.11

в)

tx2 =[3/0.2, 5/0.75, 7/0.3]

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 0.2 \\ 5 & 0.75 \\ 7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

norm(tx2,'fro') = 9.15

г)

F-нормы гранулированных четких и нечетких множеств: а) гранула для НМ tx=[3/0;5/1;7/0] с треугольной ФП и ее F-норма; б), в) – гранулы для четких множеств tx_1=[3/1;5/1;7/1] и tx_3=[3/0;5/0;7/0] и их F-нормы. соответственно), г) гранула для реального НМ tx_2=[3/0.2;5/0.75;7/0.3] с треугольной ФП и ее F-норма.

Данные гранулы характеризуют абсолютную принадлежность и полную непринадлежность НМ данному УМ соответственно; справедливо условие: $\|tx_3\|_F^2 \le \|tx_2\|_F^2 \le \|tx_1\|_F^2$. Справедливо обобщение, что *F*-норма любого НМ, заданного на данном УМ, лежит в интервале *F*-норм ИГ (ЧМ) полной принадлежности и непринадлежности. *F*-нормы для tx_1 и tx_3 (для которых $(\forall i)\mu_i=1$ и $(\forall i)\mu_i=0$) в дальнейшем называем *предельными* для заданного УМ. Ниже приведены результаты исследования гранул, сформированных на НМ $\tilde{A}_i \in U_i$, $U_i \in U, i=1,L$; для которых справедливо: $I_{\tilde{A}_i} \subseteq I_U$, т.е. $[a_i^{(min)} \;\; a_i^{(max)}] \subseteq [u^{(min)} \;\; u^{(max)}]$.

$$tx5=[3.5/0,5.1/1,\ 6.5/\ 0.] \rightarrow \begin{pmatrix} 3.5 & 0 \\ 5.1 & 1 \\ 6.5 & 0 \end{pmatrix}$$

norm(tx5,'fro') = 9.03

а)

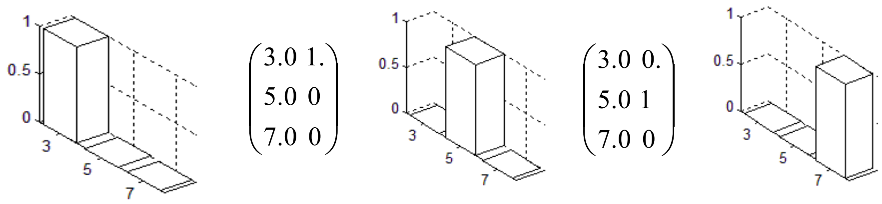
$$tx4=[3.5\ /\ 0.12,\ 5.1/\ 0.95,\ 6.75/\ 0.3] \rightarrow \begin{pmatrix} 3.5 & 0.12 \\ 5.1 & 0.95 \\ 6.75 & 0.30 \end{pmatrix}$$

norm(tx4,'fro') = 9.21

б)

F-нормы НМ tx_4 и tx_5, определенные на вложенных УМ, $УМ_1 \in$ УМ:
а) НМ tx_5=[3.5/ 0, 5.1/ 1, 6.5 /0.], определенное на $УМ_1 \in$УМ, имеет предельные F-нормы:
[3.5/0, 5.1/0, 6.5/0] → norm(n1, 'fro') = 8.98, [3.5/1, 5.1/1, 6.5/1] → norm(n1,'fro')= 9.14, 8.98 <9.03< 9.14;
б) НМ tx_4=[3.5/0.12;5.1/0.95;6.75/0.3], определенное на $УМ_1 \in$УМ, имеет предельные F-нормы 9.16 и 9.32, т.е.9.16< 9.21 < 9.32.

На рис.6 приведены НМ, матрицы гранул которых имеют одинаковые нормы:



$$\begin{pmatrix} 3.0 & 1. \\ 5.0 & 0 \\ 7.0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3.0 & 0. \\ 5.0 & 1 \\ 7.0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3.0 & 0. \\ 5.0 & 1 \\ 7.0 & 0 \end{pmatrix}$$

norm(tx,'fro') = 9.17 norm(tx,'fro') = 9.17 norm(tx,'fro') = 9.17

Рис. 6. Гранулы НМ, имеющие одинаковые нормы

На рис. 7 приведены нормы гранулированных НМ, определенных на общем УМ.

norm([3 0;5 0; 7 0],'fro') = **9.1104**
norm([3 0;5 1; 7 0],'fro')= 9.1652
norm([3 1;5 1; 7 1],'fro') = **9.2736**
norm([3 0.4;5 0.9; 7 0.5],'fro') =9.1771
norm([3 0.2;5 0.9; 7 0.3],'fro') =9.1619

[9.1104, 9.2736] – предельные нормы

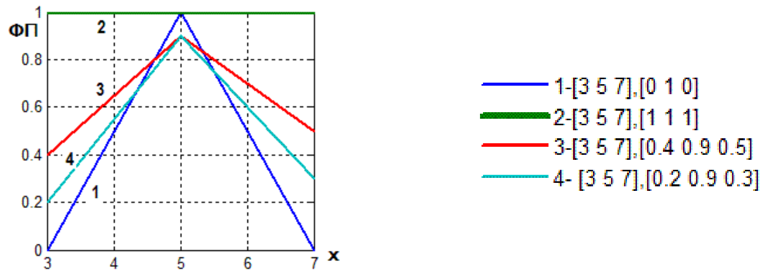


Рис. 7. Нормы гранулированных НМ, определенных на общем УМ:
справедиво, что 9.1104 < (9.1619, 9.1652, 9.17.71) < 9.2736, т.е. выполняется принцип ограниченности норм

Предложен п*ринцип ограниченности F-норм матриц гранул УМ, на котором задано НМ, и НМ.* Сущность принципа состоит в том, что условие включения $\tilde{A} \in U$ распространено на нормы матриц гранул (тензоров), моделирующих НМ и УМ, в рассматриваемом случае $\tilde{A}$ и U соответственно. Таким образом, утверждение, что F-нормы матриц гранул УМ и НМ должны *быть близкими,* если имеется семантическая близость между объектами, не лишено смысла или, по крайней мере правдоподобия, т.к. изначально постулировано, что УМ⊃НМ. Принцип ограниченности F-норм позволяет в общем случае для НМ, определенных на одном УМ, снизить интервальную неопределенность, например, в данном случае исходный интервал (УМ) – [3, 7], рассчетный интервал, определенный на основе принципа ограниченности F-норм, составляет [3.5, 6.75], т.е. $l_{[3,\ 7]} > l_{[3.5,\ 6.75]}$. Имеет место 20 % сокращение длины интервала, в ряде случаев это может иметь принципиальное значение.

Предложение. Пусть НМ $\widetilde{X}=\{x/\mu^{(x)}\}$, $\widetilde{X}\in U$ и существуют гранулы (матрицы) **X** и **U**, $\widetilde{X}\rightarrow$ **X**, U$\rightarrow$ **U**, определены *F*-нормы (norm(**U**, 'fro')) для условий полной принадлежно-сти и непринадлежности: $U^{(1)}=\begin{pmatrix} u_1 & 1;\ldots & u_n & 1\end{pmatrix}$ и $U^{(0)}=\begin{pmatrix} u_1 & 0;\ldots & u_n & 0\end{pmatrix}$ соответственно, решение задачи $\|\mathbf{X}-\mathbf{U}\|_F^2\rightarrow$min при ограничениях:

trace($U^{(0)}*(U^{(0)})^T$)≤trace($X*X^T$)≤trace($U^{(1)}*(U^{(1)})^T$) или $\sum_i u_{ii}^{(0)}\le\sum_i x_{ii}\le\sum_i u_{ii}^{(1)}$,

$x_1 > u_1$, $x_n < u_n$,

$\sum_i x_i < \sum_i c_i$

позволяет определить гранулу $\mathbf{X}^*=\begin{pmatrix} x_1 & \mu^{(1)};\ldots & x_n & \mu^{(n)}\end{pmatrix}$, которая будет (в смысле F-нор-мы) *ближайшей* к заданному УМ, и представляет НМ $\widetilde{X}^\circ=\{x^\circ/\mu^{\circ(x)}\}$, $\widetilde{X}^\circ\in U$, объективно (однозначно) отображающую условия неопределенности.

Отметим, что близость норм матриц гранул $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{b}$ и $\mathbf{U}_\mathbf{b}$ можно рассматривать как близость матриц $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{b}$ и $\mathbf{U}_\mathbf{b}$, т.е как задачу:

$$\min\left\|\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{b}-\mathbf{U}_\mathbf{b}\right\|_F^2=\text{trace}\left((\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{b}-\mathbf{U}_\mathbf{b})^*(\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{b}-\mathbf{U}_\mathbf{b})^T\right)$$

при ограничениях:

$\sum_i a_i < \sum_i u_i$, i=1,n;

$\sum_i \mu_{\widetilde{A}}^{(i)} \le 1$ (или ≤2 в случае априорного назначения трапециевидной ФП),

т.к. (norm(**X**, 'fro'))^2=(sum(diag(**X'*X**))) или trace(**X'*X**),

В работе [19] определено четкое (обычное) подмножество $\underline{\underline{A}}$, расположенное на *наименьшем* евклидовом расстоянии от данного НМ $\widetilde{A}=\{a/\mu^{(a)}\}$, показано, что это множество имеет *наименьшую* норму и обладает свойствами:

$$\mu_{\underline{\underline{A}}}(x_i)=\begin{pmatrix}\mathbf{0},\ \text{если}\ \mu_{\widetilde{A}}(x_i)<0.5;\ \mathbf{1},\ \text{если}\ \mu_{\widetilde{A}}(x_i)>0.5;\ \mathbf{0}\ \text{or}\ \mathbf{1},\ \text{если}\ \mu_{\widetilde{A}}(x_i)=0.5\end{pmatrix}.$$

Аналогично сформулированной задаче, можно рассмотреть обратную задачу – определить НМ $\widetilde{A}$, норма матрицы гранулы которого *наименее отличается* от матрицы гранулы УМ U={u} при условии вложенности этих множеств, т.е $\widetilde{A}\in U$. Отметим, что условие вложенности не исключает определение НМ $\widetilde{A}$ как наименее уклоняющегося от УМ U при условиях (правилах):

- НМ $\widetilde{A}=\{a_i/\mu_i^{(a)}\}_1^n$ наиболее близко к УМ U={u_1 1;… u_n 1} – условие полной принадлежности;
- НМ $\widetilde{A}=\{a_i/\mu_i^{(a)}\}_1^n$ наиболее близко к УМ U={u_1 0;… u_n 0} – условие полной непринадлежности;

Сохраняя идеологию [19], для НМ $\widetilde{A}$ и УМ U вначале определяют матрицы гранул сходства (близости), затем определяют их *F*-нормы и наконец вычисляют $\{a/\mu^{(a)}\}$, решая оптимизационную задачу.

Определение. НМ как информационная гранула – объект, элементы которого (α-уровни) связаны *иерархической структурой*, свойства которой определяются *матрицей сходства (расстояний)*. На рис. 8 приведено сравнение вещественных чисел и четких интервалов с нечеткими числами и нечеткими интервалами соответственно путем построения их иерархических структур (бинарных деревьев), плостроенных на основании матрицы сходства.

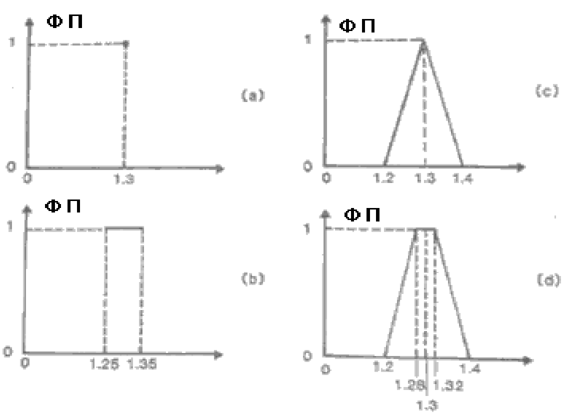
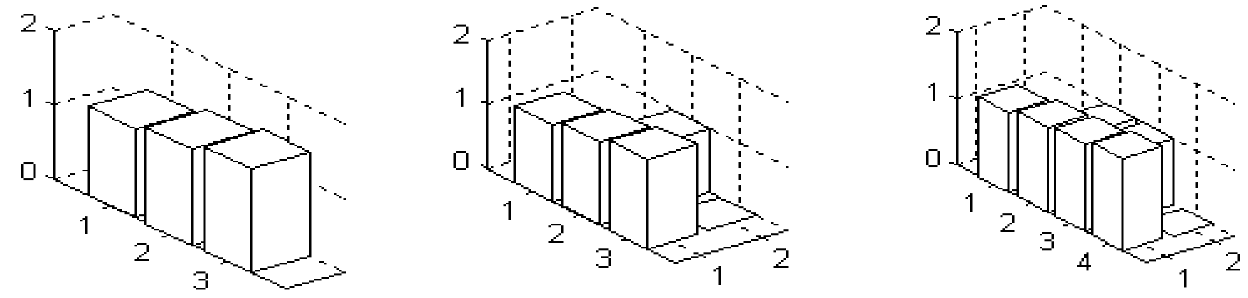
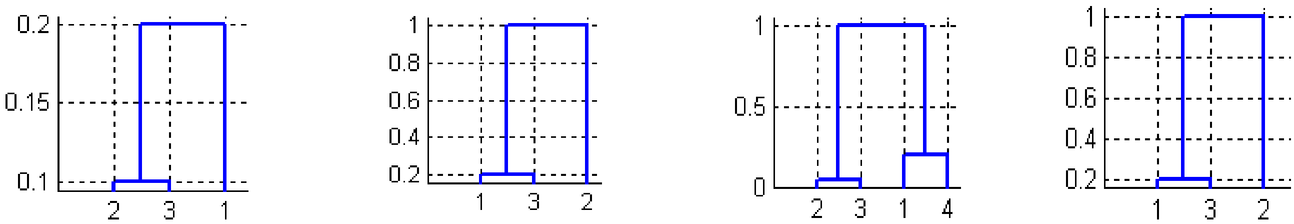


Рис. 8. Нечеткие числа и нечеткие интервалы: сравнение вещественных чисел и четких интервалов с нечеткими числами и нечеткими интервалами соответственно.



а) б) в)

Рис. 9. Тензорные гранулы: а) УМ $U=[1.2 \quad 1.3 \quad 1.4]^T$,
б), в) НМ $\tilde{A}=[1.2\ \ 0;\ 1.3\ \ 1;\ 1.4\ \ 0]$ и $\tilde{A}_2==[1.2\ 0;\ 1.28\ 1;\ 1.32\ 1;\ 1.4\ 0]$ соответственно.



а) б) в) г)

Рис. 10. Иерархические структуры гранул:
а)УМ, б) НМ $\tilde{A}=[1.2\ \ 0;\ 1.3\ \ 1;\ 1.4\ \ 0]$, в), г) $\tilde{A}_2=[1.2\ 0;\ 1.28\ 1;\ 1.32\ 1;\ 1.4\ 0]$
при кластеризации на 4 и 3 кластера соответственно

Гранулярные вычисления в на основе моделей Кронекеровой алгебры. В общем случае для матриц $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_m^n$ $\mathbf{B}=\left(b_{ij}\right)_r^s$ размерностью m×n и r×s их Кронекерово произведение **A⊗B** равно:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B}\cdots a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B}\cdots a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B}\cdots a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Свойства КП подробно изложены в [20]. Векторизация матриц vec(**AYB**)=(**B**′⊗**A**) vec(**Y**) (в контексте символы ^{T} и ′ обозначают транспонирование) имеет важное значение для решения систем матричных уравнений в векторно-матричной форме. Например, для уравнения

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1x_3 \\ x_2x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11}c_{12} \\ c_{21}c_{22} \end{pmatrix}$$

решение может быть записано как **AXI=C.** Используя векторизацию можем записать

$$\mathbf{vec(AXI)=(I\otimes A)}\ \mathrm{vec}\ \mathbf{X}=\mathbf{vec\ C}.$$

След: tr(**A⊗B**)=tr **A**⊗tr **B,** tr(**A**)= $\sum_{i=1,n} a_{ii}$ (или $\sum_{i=1,n} a_{ii}/n$).

Тензорная сумма (ТС): даны матрицы **A**(n×n), **B** (m×m), тензорная (Кронекерова) сумма $\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}=\mathbf{A}\otimes\mathbf{I_m}+\mathbf{I_n}\mathbf{B}$, где $\mathbf{I_m}$, $\mathbf{I_n}$ – единичные матрицы.

Расстояние между матрицами **A, B** (Фробениусовская норма):

$$d(\mathbf{A},\mathbf{B})_F=(tr((\mathbf{A}\otimes\mathbf{I_m}-\mathbf{I_n}\mathbf{B})*(\mathbf{A}\otimes\mathbf{I_m}-\mathbf{I_n}\mathbf{B})^T))^{1/2}.$$

Расширенные операции Кронекеровой алгебры – $\odot_{min}$ и $\otimes_g$: оператор $\odot_{min}$, определен в виде: $\odot_{min}:\mathbf{R}\times\mathbf{R^n}\to\mathbf{R^n}$, $(\alpha,\mathbf{X})\mapsto\alpha\odot_{min}\mathbf{X}$, где если $\mathbf{X}=[x_1x_2\ldots x_n]$, то: $\alpha\odot_{min}\mathbf{X}=[\min(\alpha,x_1)\min(\alpha,x_2)\ldots\min(\alpha,x_n)]$.

Оператор $\otimes_g$, определен в виде:

$$\otimes_g:\mathbf{R^m}\times\mathbf{R^n}\to\mathbf{R^{m\times n}},\ (\mathbf{X},\mathbf{Y})\mapsto\mathbf{X}\otimes_g\mathbf{Y},$$

где если $\mathbf{X}=[x_1x_2\ldots x_m]^T$, то:

$$\mathbf{X}\otimes_g\mathbf{Y}=[x_1\odot_{min}\mathbf{Y}x_2\odot_{min}\mathbf{Y}\ldots x_m\odot_{min}\mathbf{Y}].$$

Известно, что арифметические операции над НЧ $\tilde{A}=\{a/\mu^{(a)}\}$ и $\tilde{B}=\{b/\mu^{(b)}\}$ в ТНМ выполняются следующим образом:

$$\tilde{C}=\tilde{A}*_f\tilde{B}\Leftrightarrow\mu_{\tilde{C}}(z)=\max_{Z=X*Y}(\min(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y))),$$

где $*_f$- нечеткая операция, соответствующая произвольной алгебраической операции над обычными числами. Гранульное представление НМ позволяет операцию нечеткой арифметики выполнить так. Пусть НМ $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ имеют гранулы **A** и **B**: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & \mu_1^{(a)}; \ldots a_n & \mu_n^{(a)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & \mu_1^{(b)}; \ldots b_m & \mu_m^{(b)} \end{pmatrix}$. Представим гранулы **A** и **B** в виде: **A**=[**A**(:,1) **A**(:,2)], **B**=[**B**(:,1) **B**(:,2)], где:

$$\mathbf{A}^{(a)}=\mathbf{A}(:,1)=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{(m)}=\mathbf{A}(:,2)=\begin{pmatrix} \mu_1^{(a)} \\ \vdots \\ \mu_n^{(a)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{(b)}=\mathbf{B}(:,1)=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{(m)}=\mathbf{B}(:,2)=\begin{pmatrix} \mu_1^{(b)} \\ \vdots \\ \mu_n^{(b)} \end{pmatrix}.$$

Операция над гранулами выполняется в 2 этапа:

на 1-ом – выполняется операция над векторами $\mathbf{A}^{(a)}$ и $\mathbf{B}^{(b)}$, т.е. $\mathbf{C}^{(a,b)}=\mathbf{A}^{(a)} *_g \mathbf{B}^{(b)}$, где $*$ – арифметическая операция, $* \in \{+,-,\times,/\}$;

на 2-ом этапе выполняется операция min $(A^{(m)}, B^{(m)})$, т.е. $\mathbf{C}^{(m)}=\min(\mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{B}^{(m)})$. Результат операции

$$C=[\,\mathbf{C}^{(a,b)}\ \mathbf{C}^{(m)}]=\begin{pmatrix} a_1 * b_1 & \min(\mu_1^{(a)},\mu_1^{(b)}) \\ & \vdots \\ a_n * b_n & \min(\mu_n^{(a)},\mu_n^{(b)}) \end{pmatrix}.$$

Пример (Гранулярная сумма 2-х НМ)

Пусть на УМ [3, 7] представлено утверждение $<\tilde{5} \overset{\text{def}}{=}$ *примерно 5*> в виде НМ с треугольной и трапециевидной ФП:

НМ $\tilde{a}$ = ={3/0, 5/1, 7/0}, его гранула

$$t_a=[a_1, \mu_1; a_2, \mu_2; a_3, \mu_3],$$

дефадзификация по методу ЦТ дает:

$$a^{(def)}=\frac{\sum_{i=1,3} a_i \mu_i}{\sum_{i=1,3} \mu_i},$$

функция следа:

$$½\mathrm{trace}(a*a^T)^{1.2}=\mathrm{tra}=\left(\sum_{i=1,3} a_i^2+\mu_i^2\right)^{1/2},$$

результаты вычислений:

$$a^{(def)}=5,\ \mathrm{tr}\ a=\ ½\ (3^2+5^2+7^2+1)^{0.5}=4.58,$$

таким образом:

$$\frac{\sum_{i=1,3} a_i \mu_i}{\sum_{i=1,3} \mu_i} \cong ½\left(\sum_{i=1,3} a_i^2+\mu_i^2\right)^{1/2};$$

НМ $\tilde{b}$={3/0, 4/1, 6/1,7/0} и его гранула $t_b=[b_1 \nu_1; b_2 \nu_2; b_3 \nu_3; b_4 \nu_4]$, результаты вычислений:

$$b^{(def)}=5,\ \mathrm{tr}\ a=½(3^2+4^2+6^2+7^2+2)^{1/2} \approx 5.3,$$

$$\frac{\sum_{i=1,4} b_i \nu_i}{\sum_{i=1,4} \nu_i} \cong ½\left(\sum_{i=1,4} b_i^2+\nu_i^2\right)^{1/2}.$$

$$\tilde{c}=\tilde{a} \oplus \tilde{b}=\tilde{5}_{trimf} \oplus \tilde{5}_{trapmf}=$$

$$=\{3/0,5/1,7/0\} \oplus \{3/0,4/1,6/1,7/0\} \rightarrow t_a+t_b=$$

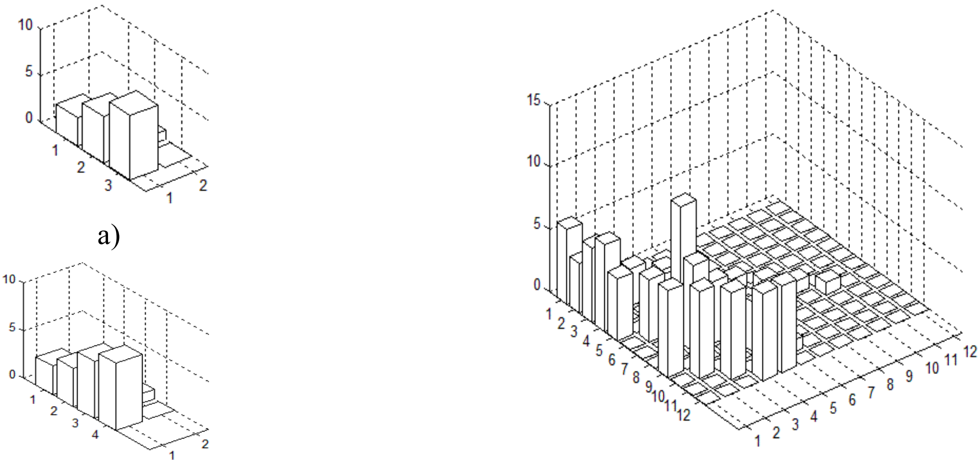
$$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\mathrm{kron}(\tilde{a}, \mathrm{eye}(4,6))+\mathrm{kron}(\mathrm{eye}(3,6), \tilde{b})=t_c$$

$$t_c=\begin{pmatrix}
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 7 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

$trace(t_c)= 10.74$, т.е. $tr_a + tr_b = 4.58 + 5.3 = 9.88$,
$trace(t_c) \cong tr_a + tr_b$.

Таким образом, след гранулярной суммы НМ $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ приближенно совпадает с суммой дефадзифицированных значений НМ $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$.



а) б) в)

Рис. 11. Графическая иллюстрация суммы гранул НМ $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$:
а) гранула для НМ $\tilde{5}$ с треугольной ФП; б) гранула для НМ $\tilde{5}$ с трапециевидной ФП;
в) гранула для $\tilde{5} \oplus \tilde{5}$

Выводы

1. *Информационные гранулы* играют ведущую роль в ИАД, задачи определение новых свойств информационных объектов успешно решаются при использовании гранулярной парадигмы. Гранула рассматривается как группы объектов объединяемых *неразличимостью, сходством, близостью* (т.е. отношениями, обладающими, по крайней мере, свойствами симметричности и рефлексивности)

2. Предложено представление (формирование) ИГ в виде тензоров с матрицами $2 \times m$ или $m \times m$, где m – число различимых элементов, что позволяет определить структурную модель ИГ и получить новую (скрытую) информацию относительно новых свойств НМ, представленных в виде гранул, в частности, сформулировать и решить прикладные задачи, связанные с оценкой влияния ФП на результат арифметической операции с ИГ.

3. Предложен п*ринцип ограниченности F-норм матриц гранул,* сущность которого состоит в том, что условие включения $\tilde{A} \in U$ распространено на нормы матриц гранул (тензоров), моделирующих НМ и УМ, в рассматриваемом случае $\tilde{A}$ и U соответственно.

4. Показана целесообразность реализаци *гранулярных вычислений на основе моде-лей Кронекеровой алгебры,* позволяющих существенно расширить возможности гранулярного компьютинга при решении задачи управления в условиях неопределенности.

Список литературы

1. Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И. Иерархическая кластеризация нечетких данных Электронное моделирование. 2012, т. 34, № 4. – С. 3-22

2. Zadeh L.A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centralityin hu-man reasoning and fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems 90 (1997), – P. 111-127

3. Zadeh L.A. Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imp-recise probabilities. Journal of Statistical Planning and Inference 105 (2002). – P. 233–264

4. Aja-Fern´andez S., Alberola-L´opez C. Fuzzy Granules as a BasicWord Repre-sentation for Computing with Words. SPECOM’2004: 9th Conference Speech and ComputerSt. Petersburg, Russia September 20-22, 2004.ISCA Archive http://www.isca-speech.org/archive

5. Тарасов В.Б. Нестандартные множества и гранулированные вычисления. 5-ые Поспеловские чтения «Искусственный интеллект – проблемы и перспективы». Интернет-ресурс: http://www.posp.raai.org/data/posp2011/ tarasov.ppt

6. Тарасов В.Б. Теория нечетких множеств: новый виток развития. Интеллектуаль-ные системы и технологии //Научная сессия МИФИ – 2006. Том 3. Интернет-ресурс: http://www.

library.mephi.ru/elbib/izdvuza/scientific-sessions?Year=2006...2

7. Вопенка П. Альтернативная теория множеств: Новый взгляд на бесконечность: Пер. со словац. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2004. – 611 с.

8. Давыдов А.А. Системная социология. М.: КомКнига, 2006. – 192 с.

9. The Structural Representation of Proximity Matrices With MATLAB/ cda_toolbox_ manual.Интернет-ресурс: http://cda.psych.uiuc.edu/matlab_class_material/ clusteringchapter_ r1

10. Bargiela A., Pedrycz W. Granular Computing: An Introduction. N.Y.: Springer,2002.

11. Pedrycz W. Granular Computing: An Emerging Paradigm. Heidelberg.: Physica-Verlag Heidelberg, 2001. – P. 124-143.

12. Lin T., Yao Y., Zadeh L. Data Mining, Rough Sets and Granular Computing. Heidel-berg.: Physica-Verlag Heidelberg, 2002. – P. 109-115.

13. Pedrycz W. Fuzzy Sets as a User-Centric Processing Framework of Granular Com-puting. In Handbook of Granular Computing. Edited by Witold Pedrycz, Andrzej Skowron and Vladik Kreinovich C_ 2008 John Wiley & Sons, Ltd. – 1150 p. (P. 98-140)

14. Pedrycz W. Handbook of Granular Computing. Edited by Witold Pedrycz, Andrzej Skowron and Vladik Kreinovich C_ 2008 John Wiley & Sons, Ltd. – 1150 p.

15. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications. SIAM REVIEW, 2009, Vol. 51, No. 3, – P. 455–500

16. Granular computing. From Wikipedia,the free encyclopedia. Интернет-ресурс: http://en.wikipedia.org/wiki/Granular_computing.

17. Measure theory on granular fuzzy sets Fuzzy Information Processing Society, 1999. NAFIPS. 18th International Conference of the North American. Date of Conference: Jul 1999. Author(s): Lin, T.Y. Dept. of Math. & Comput. Sci., San Jose State Univ., CA .Page(s): P. 809-813.

18. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц.– М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

19. Steeb W.-H. Matrix Calculus and Kronecker Product with Applications and C++ Prog-rams, World Scientific Publishing, 1997. http://www.worldscibooks.com/ mathematics/3572.html