УДК 681.518.2:621.391(045)

Кліпа А.М., к.т.н.

СУМІСНЕ ОЦІНЮВАННЯ ЗМІЩЕНЬ ДАТЧИКІВ ТА ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ КОРОТКОПЕРІОДИЧНОГО РУХУ ЛЕГКОГО ЛІТАКА

Національний авіаційний університет

Запропоновано процедуру сумісного оцінювання зміщень датчиків та параметрів моделі короткоперіодичного руху легкого літака за результатами льотного експерименту при наявності шумів вимірювань та зміщень датчиків. Ефективність запропонованої процедури було перевірено на benchmark-моделі короткоперіодичного руху легкого літака DHC-2 «Beaver».

Актуальність проблеми

При діагностиці літаків та перевірці їх відповідності нормам льотної придатності в процесі експлуатації, а також при проектуванні систем управління польотом та корекції цих систем в процесі експлуатації необхідно знання їх математичних моделей динаміки. Принципово важливе значення має оцінювання параметрів лінеаризованої моделі в просторі станів, оскільки аеродинамічні похідні сил та моментів, що визначають технічний стан літака в даний момент часу, входять лінійно в цю модель [1].

Жорсткі технічні, технологічні та економічні вимоги до легких літаків унеможливлюють застосування дорогих датчиків, які мають високу точність, у той час, як дешеві й менш точні мають високий рівень шумів вимірювання та суттєві зміщення (систематичні похибки), спричинені рядом експлуатаційних факторів [2], у вихідних сигналах.

Як зазначалось в праці [3], особливим випадком оцінювання параметрів є параметрична ідентифікація жорстких систем (систем зі швидкими та повільними модами динаміки). Прикладом такої системи є поздовжній рух літаків. В результаті аналізу матриці ідентифікованості [1] та її сингулярних чисел для отримання якісних результатів в [3] запропоновано проводити оцінювання параметрів поздовжнього руху легких літаків в два етапи: ідентифікація короткоперіодичної та довгоперіодичної складових поздовжнього руху.

Дана стаття присвячена розробці процедури сумісного оцінювання зміщень датчиків та параметрів моделі короткоперіодичного руху легкого літака та її перевірці на *benchmark*-моделі легкого літака *DHC*-2 «*Beaver*» [4].

Постановка проблеми

Необхідно розробити процедуру сумісного оцінювання зміщень датчиків та параметрів моделі короткоперіодичного руху легкого літака за результатами льотного експерименту при наявності шумів вимірювань та зміщень датчиків і перевірити ефективність запропонованої процедури на моделі, що пройшла багаторівневі перевірки й уточнення за результатами фізичних експериментів в аеродинамічних трубах та льотних випробуваннях. Такою моделлю була обрана *benchmark*-модель легкого літака *DHC*-2 «*Beaver*» [4]. Оскільки проведення льотного експерименту є достатньо дорогим, то для відпрацювання запропонованої процедури необхідно провести моделювання динаміки поздовжнього руху з урахуванням шумів та зміщень усіх датчиків в пакеті *Simulink* програми *MATLAB*.

Короткоперіодичний рух літаків описується наступними лінеаризованими рівняннями в просторі станів з постійними коефіцієнтами при нульовій матриці прямої передачі управління від входу до виходу [5]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\xi}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}$ – $n \times n$ матриця та $n \times 1$ вектор стану відповідно; $\mathbf{B}$, $\mathbf{u}$ – $n \times m$ матриця та $m \times 1$ вектор керування відповідно; $\mathbf{C}$, $\mathbf{y}$ – $l \times n$ матриця та $l \times 1$ вектор вимірювань відповідно; $\mathbf{b}$ – $\mu \times 1$ вектор, елементами якого є значення зміщень датчиків; $\boldsymbol{\xi}$ – $l \times 1$ вектор гаусових випадкових похибок вимірювання, такий що

$$E\xi(t) = 0; \quad E\left[\xi(t)\xi^T(t+\tau)\right] = \mathbf{R}\delta(\tau),$$

де E – знак математичного сподівання;

$\mathbf{R}$ – коваріаційна матриця похибок вимірювання; $\delta(\tau)$ – дельта-функція Дірака.

Вектори та матриці стану, керування та спостереження для моделі короткоперіодичного руху є наступними [5]:

$$\mathbf{x}=[\alpha \quad q]^T; \quad \mathbf{u}=[\delta e]; \quad \mathbf{y}=[\alpha \quad q]^T;$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} Z_\alpha & Z_q \\ M_\alpha & M_q \end{bmatrix}; \; \mathbf{B}=\begin{bmatrix} Z_{\delta e} \\ M_{\delta e} \end{bmatrix}; \; \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

де α – кут атаки; q – кутова швидкість тангажа; δe – відхилення руля висоти, Z_α, Z_q, $Z_{\delta e}$ – відповідні частинні похідні вертикальної сили; M_α, M_q, $M_{\delta e}$ – відповідні частинні похідні моменту крену.

За результатами льотного експерименту (або моделювання польоту) у вигляді записів $\mathbf{u}(t)$ та $\mathbf{y}(t)$ необхідно визначити елементи матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ та оцінити зміщення датчиків, які протягом льотного експерименту (моделювання) вважаються постійними [6].Таким чином, необхідно оцінити розширений вектор параметрів

$$\boldsymbol{\theta}_{ext}[\boldsymbol{\theta}\,\mathbf{b}]^T=[Z_\alpha\; Z_q\; M_\alpha\; M_q\; Z_{\delta e}\; M_{\delta e}\; b_\alpha\; b_q]^T, \tag{3}$$

де b_α, b_q – відповідні зміщення датчиків кута атаки та кутової швидкості тангажа.

Вирішення проблеми

Для сумісного оцінювання зміщень датчиків та параметрів моделі короткоперіодичного руху легкого літака простір стану моделі короткоперіодичної складової розширюємо за рахунок фіктивних змінних – зміщень датчиків кута атаки b_α та кутової швидкості тангажа b_q. У цьому випадку вектори вимірюваного входу $\mathbf{u}$, розширеного стану $\mathbf{x}_{ext}$ та вимірюваного виходу $\mathbf{y}$ мають наступний вигляд:

$$\mathbf{u}=[\delta e], \quad \mathbf{x}_{ext}=[\alpha,\; q,\; b_\alpha,\; b_q]^T,$$

$$\mathbf{y}=[\alpha_m,\; q_m]^T.$$

Після застосування прийому рандомізації фіктивних змінних [7] коваріаційна матриця $\mathbf{R}$ шуму вектора вимірювань $\boldsymbol{\xi}$ є діагональною матрицею розміром 2×2; а коваріаційна матриця шуму вектора стану матиме вигляд $\mathbf{Q}=diag\left[q_1 \;\; q_2 \;\; \zeta_\alpha^2 \;\; \zeta_q^2\right]$, де q_1, q_2 – дисперсії шуму вектора стану; ζ_α, ζ_q – малі параметри, значення яких набагато менші одиниці. За наявності такої матриці $\mathbf{Q}$, матриця Гамільтона [8], асоційована з рівнянням Ріккаті для синтезу оптимального спостерігача, є не виродженою (хоча й погано обумовленою) матрицею і рівнянням (1), відповідає трійка матриць:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} Z_\alpha & Z_q & 0 & 0 \\ M_\alpha & M_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} Z_{\delta e} \\ M_{\delta e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{4}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При поганій обумовленості матриці Гамільтона функції чутливості приймають малі значення й відповідно процес оптимізації критерію оцінювання параметрів динамічної моделі має погану збіжність, тому необхідно для оцінювання слабко спостережуваних змінних застосовувати методи стохастичної апроксимації [9], оскільки вони не пов'язані з питаннями спостережуваності.

Якщо вважати, що на протязі експерименту систематичні похибки, якими є зміщення датчиків, постійні або такі, що повільно змінюються, то для оцінювання їх значень застосовують методи стохастичної апроксимації [9]. Ці методи є більш ефективними, оскільки в них не використовується динамічна модель об'єкту, тобто не потрібно вирішувати задачу спостережуваності.

Особливим підходом при сумісному оцінюванні зміщень датчиків та параметрів математичної моделі динаміки, запропонованим в даній роботі, є одночасне сумісне використання відомого фільтру Калмана [10] для оцінки змінних стану та відомих методів стохастичної апроксимації [9] для оцінки слабко спостережуваних фіктивних змінних стану, якими є зміщення датчиків.

Як показано в [11], в якості критерію оцінювання вектора невідомих параметрів $\boldsymbol{\theta}$ динамічної моделі при наявності в експериментальних даних гаусових випадкових похибок вимірювання краще застосовувати від'ємний логарифм функції максимальної правдоподібності $P(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ [12]:

$$J(\boldsymbol{\theta})=-\ln P(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})= \\ =0.5\left\{\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{y}_i-\hat{\mathbf{y}}_i)^T\mathbf{R}_{in}^{-1}(\mathbf{y}_i-\hat{\mathbf{y}}_i)+ \right. \\ \left. +N\ln|\mathbf{R}_{in}|+lN\ln(2\pi)\right\}, \tag{5}$$

де $\mathbf{y}_i$ та $\hat{\mathbf{y}}_i$ – i-й елемент вектору вимірювань та його оцінка відповідно; $(\mathbf{y}_i-\hat{\mathbf{y}}_i)$ – i-й вектор інновацій; $\mathbf{R}_{in}$ –коваріаційна матриця інновацій; $|\mathbf{R}_{in}|$ – норма Фробеніуса коваріаційної матриці інновацій; N – кількість точок вимірювань (залежить від довжини реалізації); l – довжина вектору вимірювань $\mathbf{y}(t)$ (залежить від кількості величин, що вимірюються).

Рис. 1. Алгоритм сумісного оцінювання зміщень датчиків та параметрів моделі короткоперіодичного руху легкого літака (МКПК – макриця коефіцієнтів підсилення Калмана; МЛПС – модель літака в просторі станів; ОП – оптимізаційна процедура; ПСАК – прискорена стохастична апроксимація Кестена)

Початкові значення невідомих параметрів моделі літака, які необхідні для розв'язання задачі оцінювання параметрів динамічної моделі методом максимальної правдоподібності (ММП), розраховуються за пристосованим до моделей в просторі станів методом найменших квадратів (МНК), методика якого наведена в [12].

Для моделі короткоперіодичної складової поздовжнього руху літака кількість змінних станів дорівнює 2, кількість керуючих сигналів – 1, кількість сигналів, що вимірюються – 2, достатня довжина реалізації – 500 точок, $i=3$. За таких даних вектор $\mathbf{Y}$ матиме наступний вигляд:

$$\mathbf{Y}=[\,\alpha(3)\cdots\alpha(500)\;\; q(3)\cdots q(500)\,]^T. \qquad (6)$$

Розмір вектора $\mathbf{Y}$ у цьому випадку 996×1, вектора невідомих параметрів $\boldsymbol{\theta}$ – 6×1. Матрицю регресора, запропоновану в [13] на відміну від векторного регресора [12] для моделі в просторі станів (1), (2) представляємо у вигляді блочно-діагональної матриці:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha(2) & q(2) & \delta e(3) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha(3) & q(3) & \delta e(4) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha(499) & q(499) & \delta e(500) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(2) & q(2) & \delta e(3) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(3) & q(3) & \delta e(4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(499) & q(499) & \delta e(500) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Знаючи матрицю регресора $\mathbf{F}$ (7), вектор вихідних сигналів $\mathbf{Y}$ (6) та використовуючи формулу [12]:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{МНК}} = \left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}\right)^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{Y},$$

отримуємо початкові значення елементів вектора параметрів короткоперіодичної складової поздовжнього руху легкого літака *DHC*-2 «*Beaver*» (табл. 1).

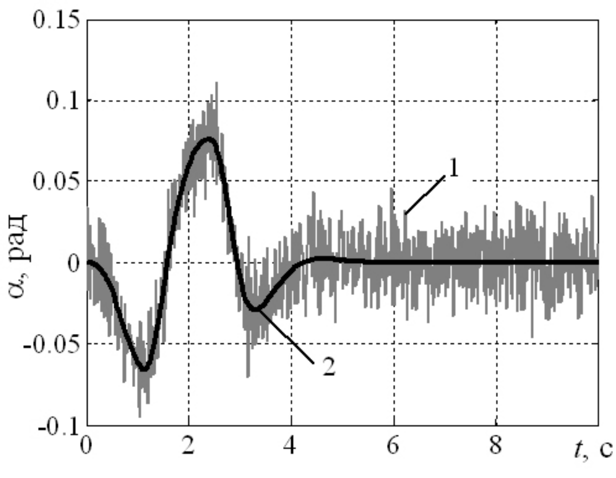
Оскільки початкові значення параметрів динамічної моделі короткоперіодичної складової поздовжнього руху літака, що розглядається, відрізняються майже в 46 разів (9.5858/0.2073), то для покращення збіжності алгоритмів оцінювання використовуємо процедуру масштабування шуканих параметрів. Головна діагональ масштабуючої матриці є наступною $[1 \;\; 10 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 10 \;\; 1]$.

У результаті проведеного оцінювання параметрів за ММП (5), основаного на стаціонарній калманівській фільтрації [10], оцінено невідомі параметри, що відносяться до короткоперіодичної складової поздовжнього руху літака *DHC*-2 «*Beaver*» (табл. 1) та значення вихідних величин (рис. 2).

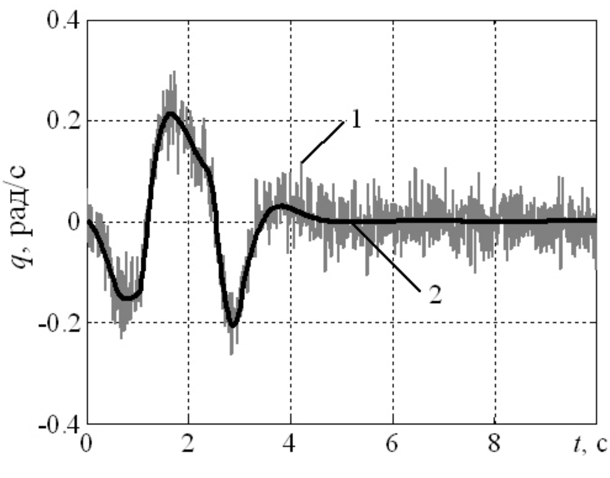
Таблиця 1.

Числові результати порівняння значень номінальних та оцінених параметрів короткоперіодичної руху літака *DHC* «*Beaver*»

Параметри	Z_α, с$^{-1}$	Z_q, –	M_α, с$^{-2}$	M_q, с$^{-1}$	$Z_{\delta e}$, с$^{-1}$	$M_{\delta e}$, с$^{-2}$
Номінальні значення	-1.2850	0.9764	-6.7370	-3.0290	-0.0929	-10.6000
Початкові значення	-1.1792	0.8548	-7.0389	-2.7105	-0.2073	-9.5858
Оцінені значення	-1.1847	0.8982	-6.9912	-2.8716	-0.0914	-10.1195
$\varepsilon_{\%}$, %	7.80	8.00	3.77	5.20	1.63	4.53



а)



б)

Рис. 2. Порівняння значень виміряних та оцінених вихідних даних:
1 – виміряні дані, 2 – оцінені дані

Оцінку адекватності отриманої моделі в [14] запропоновано проводити шляхом визначення відносної похибки оцінених та номінальних значень параметрів:

$$\varepsilon_{\%} = \left| \frac{\hat{\theta}_i - \theta_{i\,nom}}{\theta_{i\,nom}} \right| \times 100\%, \qquad (8)$$

де $\varepsilon_{\%}$ – значення відносної похибки оцінених та номінальних значень параметрів; $\hat{\theta}_i$ – оцінене значення i-того параметра; $\theta_{i\,nom}$ – номінальне значення i-того параметра. Чим менше значення $\varepsilon_{\%}$, тим точніше оцінено значення параметра.

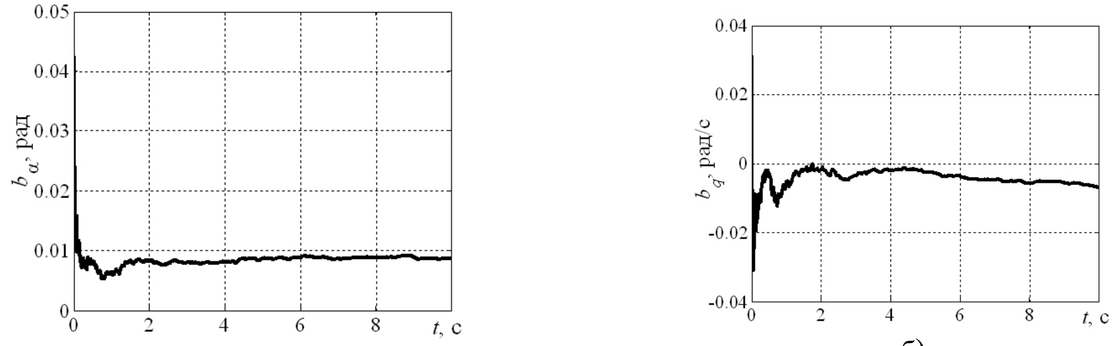
Підтвердженням якісної оцінки вектора невідомих параметрів є значення відносної похибки оцінювання $\varepsilon_{\%}$ (8), що не перевищує 8%.

Для оцінки зміщень датчиків під час процедури мінімізації від'ємного логарифму функції максимальної правдоподібності (5) було застосовано алгоритм прискореної стохастичної апроксимації Кестена [2, 9]:

$$\hat{\hat{x}}_{bj}(i+1) = \hat{x}_{bj}(i+1) + \gamma(i) \cdot \left(y_{bj} - \hat{y}_{bj} \right), \qquad (9)$$

де $\hat{x}_{bj}(i+1)$ – змінна стану, що відноситься до j-ого зміщення, на $(i+1)$-ому кроці; $\gamma(i)$ – коефіцієнт стохастичної апроксимації на i-ому кроці. Процедура вибору $\gamma(i)$ наведена в [2].

Результати виконання алгоритму прискореної стохастичної апроксимації Кестена (для оцінки зміщень b_j датчиків, які є слабко спостережуваними змінними розширеного вектору стану) під час процедури мінімізації від'ємного логарифму функції максимальної правдоподібності (5) наведені на рис. 3 та в табл. 2.



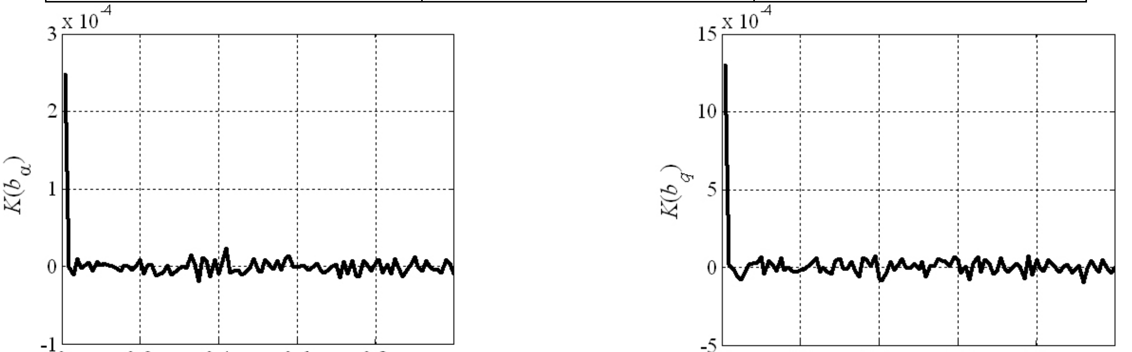
а) б)

Рис. 3. Оцінювання зміщень датчиків (b_α, b_q) за алгоритмом прискореної стохастичної апроксимації Кестена

Таблиця 2.

Результати оцінювання зміщень датчиків

Назва зміщень	b_α, рад	b_q, рад/с
Номінальні значення	0.0080	-0.0060
Оцінені значення	0.0084	-0.0057
$\varepsilon_{\%}$,%	5.00	5.00



а) б)

Рис. 4. Кореляційні функції оцінок зміщень (b_α, b_q)

При оптимальному оцінюванні оновлююча послідовність $(y-\hat{y})_{i+1}$ в усталеному режимі повинна мати властивості білого шуму [9]. Експериментальне визначення цієї послідовності показує, що кореляційні функції $K(b_\alpha)$ і $K(b_q)$ всіх оцінок зміщень (b_α, b_q), наближаються до дельта-функцій (рис. 4).

Висновки

Розроблено процедуру сумісного оцінювання зміщень датчиків та параметрів моделі короткоперіодичного руху легкого літака при наявності шумів вимірювань та зміщень датчиків в записах результатів льотного експерименту. Ця процедура базується на одночасному сумісному використанні відомого фільтру Калмана [10] для оцінки змінних стану та відомих методів стохастичної апроксимації [9] для оцінки слабко спостережуваних фіктивних змінних стану, якими є зміщення датчиків. Результати перевірки запропонованої процедури на *benchmark*-моделі короткоперіодичного руху легкого літака *DHC*-2 «*Beaver*» підтверджують її ефективність.

Список літератури

1. Касьянов В.А. Моделирование полета / В.А. Касьянов. – К.: НАУ, 2004. – 400 с.

2. Klipa A. M. Estimation procedure of sensor biases on the basis of flight test data / A.M. Klipa // Проблеми інформатизації та управління. – 2012. – № 3 (39). – С. 150-154.

3. Туник А.А. Идентификация математической модели продольного движения летательного аппарата при наличии шумов измерений и смещений датчиков / А.А. Туник, А.Н.Клипа // Электронное моделирование. – 2011. – Т. 33. – № 6. – С. 3-18.

4. Rauw M. The Flight Dynamics and Control Toolbox / M. Rauw. – MathWorks Company, 2000. – 263 p.

5. McLean D. Automatic flight control systems / D. McLean – Englewood: Prentice Hall Inc., 1990. – 593 p.

6. Огарков М. А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов / М. А. Огарков. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 207 с.

7. Tunik A.A. Identification of flight dynamics models with biased sensors / A.A. Tunik, A.N. Klipa // Stability and control: Theory and applications. – 2003. – Vol. 5, № 1. – P. 41-48.

8. Квакернаак Х. Линейные оптимальне системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван; пер. с англ. В.А. Васильева и Ю.А. Николаева. – М.: Мир, 1977. – 252 с.

9. Kesten H. Accelerated stochastic approximation / H. Kesten // Ann. Math. Stat. – 1958. – № 29. – P. 41-59.

10. Grewall M.S. Kalman filtering / M.S. Grewall, A.P. Andrews. – Prentice Hall Inc., 1993. – 381 p.

11. Кліпа А.М. Методика параметричної ідентифікації моделей динаміки легких безпілотних літальних апаратів / А.М. Кліпа // Системи управління, навігації та зв’язку. – 2011. – Вип. 4 (20). – С. 79-85.

12. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг; пер. с англ. А.С. Манделя и А.В. Назина. – М.: Мир, 1991. – 432 с.

13. Кліпа А.М. Визначення початкових значень параметрів для ідентифікації моделі в просторі станів / А.М. Кліпа, А.А. Тунік // Електроніка та системи управління. – 2008. – № 4 (18). – С. 104–109.

14. Кліпа А.М. Планування експерименту в частотній області для визначення оптимальної форми сигналу керування літальним апаратом, необхідного при ідентифікації його динамічних характеристик / А.М. Кліпа, А.А, Тунік // Системи управління, навігації та зв’язку. 2010. – Вип. 2 (14). – С. 92-99.