

УДК 629.735.051:681.513.5(045)

Блохін Л. М., д. т. н.,
Ситниченко Н. Д.,
Кухар В. В.

НОВІ ЗАДАЧІ І АЛГОРИТМИ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНИХ СТРУКТУР СПОСТЕРІГАЧІВ ВИХІДНИХ КООРДИНАТ РУХОМИХ ОБ'ЄКТІВ

Національний авіаційний університет

Запропоновано алгоритми оптимального спостереження «входів-виходів» динамічного об'єкту натурального експерименту, які передбачають включення в структури спостереження спеціальних обчислювальних засобів. Нові алгоритми мають значно більшу високу якість спостереження у порівнянні з традиційним.

Вступ

До якості процесів спостереження вихідних координат рухомих об'єктів, які підлягають управлінню чи стабілізації в штатних режимах їх функціонування, висуваються вимоги високої точності. Результати таких спостережень безпосередньо забезпечують необхідною інформацією подальші процеси управління (стабілізації) та ідентифікації моделей динаміки вказаних об'єктів. Відомо, наприклад [1], теорема розділення допускає виділення процесів спостереження вихідних координат об'єктів в самостійні задачі, результати вирішення яких повинні безпосередньо використовуватися надалі при розробках оптимальних систем стохастичного управління або стабілізації створюваних об'єктів.

Метою даної роботи є ілюстрація на аналітичних прикладах переваг та особливостей вирішення нетрадиційних задач спостережень стохастичних станів багатовимірних динамічних об'єктів шляхом порівняння досяжної якості.

Постановка і вирішення задачі синтезу структури оптимального спостерігача багатовимірного рухомого об'єкту традиційним способом

З метою подальшого порівняння результатів рішень зазначених задач спочатку деяким традиційним [2, 3] способом ставиться і вирішується задача синтезу структури оптимального спостерігача багатовимірного рухомого об'єкту у варіанті «а». Вважається, що бортові вимірювальні засоби, їх матриця передаточних функцій K і вектори φ випадкових завад вимірів, були заздалегідь оцінені в процесі так званої [3] динамічної атестації вимірювачів при їх напівнатурному моделюванні в деяких штатних режимах функціонування прототипів створюваного об'єкту. Структурна схема досліджуваного тракту спостереження представлена на рис. 1.

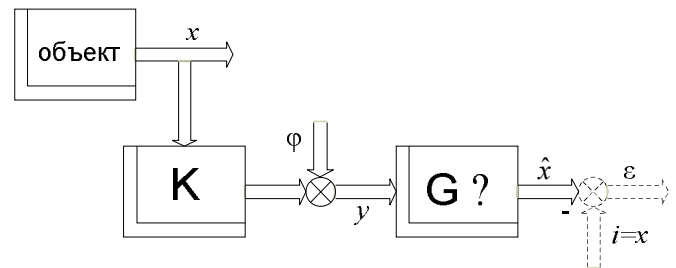


Рис. 1. Структурна схема тракту спостереження вихідного вектора x динамічного об'єкту

На рис. 1 показані: x – n -мірний вектор вихідних координат об'єкту, що досліджується; φ – n -мірний вектор випадкових стаціонарних завад вимірювань, \hat{x} – оцінка вектора x , що спостерігається; i – n -мірний бажаний сигнал виходу тракту спостереження; ε – вектор випадкових помилок спостереження; y – n -мірний вимірювальний сигнал, K – відома матриця передаточних функцій системи вимірювачів розміру $n \times n$, G – матриця розмірності $n \times n$ передаточних функцій спостерігача, що синтезується.

Із структурної схеми (рис. 1) видно, що вимірювальний вектор y можливо визначити так

$$y = Kx + \varphi, \quad (1)$$

а вектор вихідних координат об'єкту має бути записаний таким чином:

$$x = K^{-1}(y - \varphi). \quad (2)$$

Функціонал якості системи спостереження традиційно, наприклад [3], представляється у вигляді

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \text{tr}(S'_{\varepsilon\varepsilon} R) ds \quad (3)$$

де $S'_{\varepsilon\varepsilon}$ – транспонована матриця спектральної щільності вектора помилок спостереження ε , R – позитивно-визначена вагова матриця, $s = j\omega$.

Із рисунка видно також, що оцінку вектора стану об'єкту \hat{x} необхідно записати як $\hat{x} = Gy$, а вектор помилок спостереження ε , використавши вирази (1) і (2):

$$\varepsilon = \hat{x} - x = (G - K^{-1})y + K^{-1}\varphi; \quad (4)$$

Ермітово-спряжений вектор помилок

$$S'_{\varepsilon\varepsilon} = \langle \varepsilon\varepsilon^* \rangle = (G - K^{-1})S'_{yy}(G_* - K_*^{-1}) + (G - K^{-1})S'_{\varphi y}K_*^{-1} + K^{-1}S'_{y\varphi}(G_* - K_*^{-1}) + K^{-1}S'_{\varphi\varphi}K_*^{-1} \quad (6)$$

де ε і ε_* визначаються виразом (4) і (5); знак $\langle \rangle$ – символ математичного очікування; $S'_{yy}, S'_{\varphi y}, S'_{y\varphi}$ и $S'_{\varphi\varphi}$ – транспоновані матриці спектральних і взаємних спектральних щільностей векторів y

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left\{ \left[RGS'_{yy} - RK^{-1}(S'_{yy} - S'_{y\varphi}) \right] \delta G_* + \delta G \left[S'_{yy}G_*R - (S'_{yy} - S'_{\varphi y})K_*^{-1}R \right] \right\} ds \quad (7)$$

Тут треба ввести наступні позначення:

$$\begin{aligned} \Gamma_*\Gamma &= R, \quad \Gamma_* = R^-, \quad \Gamma = R^+, \quad DD_* = S'_{yy}, \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = R^+K^{-1}(D - S'_{y\varphi}D_*^{-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

де Γ_* , Γ , D , D_* – знаки вінеровської операції факторизації відповідних матриць; T_0, T_+ , і T_- – результати вінеровської операції сепарації.

З врахуванням позначень (8), перша варіація функціонала (7) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \delta e &= \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left\{ \Gamma_* \left[\Gamma GD - T \right] D_* \delta G_* + \right. \\ &\left. + \delta GD \left[D_* G_* \Gamma_* - T_* \right] \Gamma \right\} ds, \end{aligned}$$

а умова тотожного перетворення варіації в нуль повинна бути записана так:

$$\hat{G} = (R^+)^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (9)$$

Умова (9) разом з позначеннями (8) є алгоритмом синтезу оптимальної структури \hat{G} спостерігача вихідного стану об'єкта в розглянутій задачі. Підстановка матриці (9) у функціонал (3), в якому врахована матриця (6), дозволяє оцінити його відносно мінімальне значення дисперсії помилок $\frac{e_{\min}}{\sigma_y^2}$, а також досліджувати зміну цієї величини при варіюванні рядом базових параметрів тракту спостереження.

спостереження (в цьому випадку) повинен мати вигляд:

$$\varepsilon_* = y_*(G_* - K_*^{-1}) + \varphi_*K_*^{-1}, \quad (5)$$

Згідно з теоремою Вінера-Хінчина [2, 3], транспонована матриця спектральної щільності вектора помилок спостереження має вигляд:

і φ відповідно.

Матрицю (6) необхідно підставити у функціонал (3), який мінімізується методом Вінера-Колмагорова [3]. Перша варіація функціонала матиме вигляд:

Постановка і вирішення нових задач синтезу оптимальної структури спостерігача

При постановці нової задачі (варіант «б») синтезу оптимальної структури спостерігача, як і у вже вирішеній задачі (варіант «а»), вважається, що за результатами динамічної атестації вже відомі оцінки матриці передаточних функцій систем вимірювачів K і моделі динаміки вектора завад φ .

На відміну від попередньої задачі тут вважаються за допомогою додаткового обчислювального пристрою у визначальній мірі усунути вектор завад φ із тракту спостережень (рис. 2).

Позначення на рис. 2 відрізняються від таких же, що показані на рис. 1 лише включенням в структуру тракту спостереження обчислювального пристрою, за допомогою якого усуваються завади вимірювань, і посиленням на частину моделі динаміки об'єкту (матрицю P^{-1} і вектор ψ), які знадобляться в наступній новій задачі, що розглядається в даній роботі.

Отже, постановка першої нової задачі оптимального спостереження (варіант «б») відбувається таким чином. Як і в попередній задачі вектор вихідних координат об'єкту описується рівнянням (2), функціонал системи спостереження рівнянням (3), а в силу виконаної компенсації завад вимірювань вектор вихідних координат об'єкту має бути записаний так:

$$\hat{x} = G(y - \varphi). \quad (10)$$

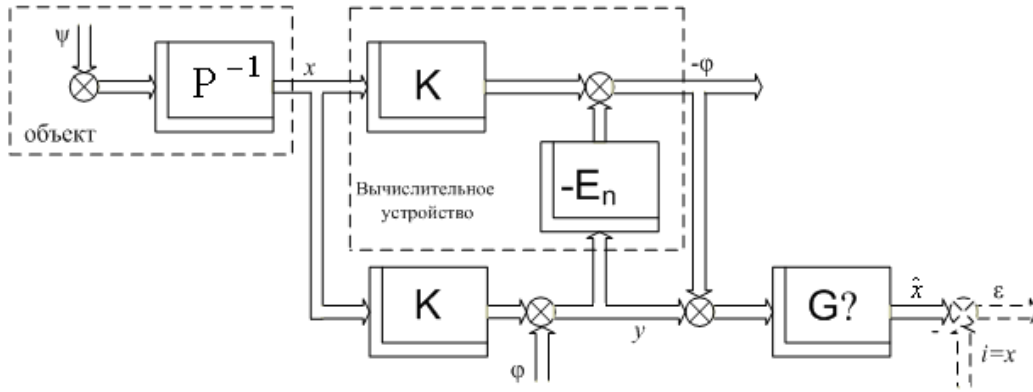


Рис. 2. Структурна схема тракту спостереження вихідного стану об'єкту з усуненням завад вимірювань.

Враховуючи вирази (2) і (10), вектор помилок спостереження ϵ в цій задачі записується таким чином:

$$\epsilon = \hat{x} - x = (G - K^{-1})(y - \phi), \quad (11)$$

а, його ермітово-спряжений вираз рівнянням вигляду:

$$S'_{\epsilon\epsilon} = \langle \epsilon \epsilon^* \rangle = (G - K^{-1})(S'_{yy} - S'_{\phi y} - S'_{y\phi} + S'_{\phi\phi})(G^* - K_*^{-1}) \quad (13)$$

Як і в попередній задачі функціонал (3), що включає матрицю (13), мінімізується за методом Вінера-Колмагорова.

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \{ [RG(S'_{yy} - S'_{\phi y} - S'_{y\phi} + S'_{\phi\phi}) - RK^{-1}(S'_{yy} - S'_{\phi y} - S'_{y\phi} + S'_{\phi\phi})] \delta G_* + \delta G [(S'_{yy} - S'_{\phi y} - S'_{y\phi} + S'_{\phi\phi})G_*R - (S'_{yy} - S'_{\phi y} - S'_{y\phi} + S'_{\phi\phi})K_*^{-1}R] \} ds \quad (14)$$

Враховуючи нижче введені позначення:

$$\begin{aligned} \Gamma_* \Gamma &= R, \Gamma_* = R^-, \Gamma = R^+, \\ DD_* &= S'_{yy} - S'_{\phi y} - S'_{y\phi} + S'_{\phi\phi}, \\ T &= T_0 + T_+ + T_- = R^+ K^{-1} D, \end{aligned} \quad (15)$$

алгоритм синтезу оптимальної структури спостерігача (варіант «б») потрібно записати так:

$$\hat{G} = (R^+)^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (16)$$

Підставивши матрицю (16) з врахуванням позначень (15) спочатку у вираз (13), а результат у функціонал (3), можливо оцінити мінімальне значення останнього і дослідити характер зміни отриманої величини при варіюванні базовими параметрами тракту спостереження.

Таким чином, обумовлена вище нова задача синтезу оптимальної структури спостерігача виходу об'єкту вирішене повністю.

Нижче поставлена і вирішена ще одна нова (друга) задача синтезу оптимальної структури спостерігача вихідних координат складного ди-

$$\epsilon_* = (y_* - \phi_*)(G_* - K_*^{-1}). \quad (12)$$

Згідно з теоремою Вінера-Хінчіна транспонована матриця спектральної щільності вектора помилок у варіанті «б» з врахуванням рівнянь (11) і (12) виглядає так:

Перша варіація функціонала в цьому випадку має вигляд:

намічного об'єкту, моделі динаміки прототипу якого в режимах його функціонування, що цікавлять, оцінені за результатами проведення випробувань і подальшого вирішення відомої [3] задачі структурної ідентифікації моделей динаміки дослідженого об'єкту. Його рух в режимі стабілізації, як відомо [3], може бути описано системою звичайних диференціальних рівнянь, що перетворена за Фур'є, вигляду:

$$Px = Mu + \psi,$$

де x – вектор вихідних координат об'єкту, u – вектор управлінь, ψ – вектор випадкових стаціонарних збурень, які діють на об'єкт в режимі функціонування, що цікавить, P і M – відповідних розмірів поліноміальні матриці аргументу $s = j\omega$.

Як вже зазначено вище, відповідно відомій [1] теоремі розділення допустимо процеси спостереження вихідного стану об'єкта і управління цим об'єктом розчленувати. В процесі спостереження потрібно вважати вектор управлінь u

нульовим. Тоді вектор вихідних координат об'єкту в задачах спостереження повинен має вигляд:

$$x = P^{-1}\psi, \quad (17)$$

як це і показано на рис. 2.

Постановка нової задачі (варіант «в») оптимального спостереження вихідного стохастичного стану об'єкту також включає описану вище (варіант «б») процедуру усунення завад вимірювань (рис. 2), але при цьому вважається орієнтовно відомою модель динаміки вектора x , що представлена виразом (17). У цій задачі вважається також, що рівняння оцінки спостережуваного вектора \hat{x} можна представити у вигляді:

$$\hat{x} = G(Kx + \varphi - \hat{\varphi}) = GKP^{-1}\psi,$$

а вектор помилок спостереження ε в варіанті задачі, що розглядається, і його ермітово-спряжений вираз можна записати так:

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{1}{j} \int_{-\infty}^{j\infty} \text{tr} \left\{ \left[RGKP^{-1} S'_{\psi\psi} P_*^{-1} K_* - RP^{-1} S'_{\psi\psi} P_*^{-1} K_* \right] \delta G_* + \right. \\ & \left. + \delta G \left[KP^{-1} S'_{\psi\psi} P_*^{-1} K_* G_* R - KP^{-1} S'_{\psi\psi} P_*^{-1} R \right] \right\} ds \end{aligned} \quad (20)$$

Позначення, що приведені нижче, такі:

$$\begin{aligned} \Gamma_* = R^-, \Gamma = R^+, DD_* = KP^{-1} S'_{\psi\psi} P_*^{-1} K_*, \\ T = T_0 + T_+ + T_- = R^+ P^{-1} S'_{\psi\psi} P_*^{-1} K_* D_*^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

а алгоритм синтезу оптимальної структури спостерігача в даній задачі має вид:

$$\hat{G} = (R^+)^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1} \quad (22)$$

і складає умову, що забезпечує тотожну рівність нулю варіації (20).

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (GK - E_n) P^{-1} \psi \\ \varepsilon_* &= \psi_* P_*^{-1} (K_* G_* - E_n). \end{aligned} \quad (18)$$

Транспоновану матрицю спектральних щільностей вектора помилок спостереження в цій задачі, використовуючи теорему Вінера-Хінчина і вираз (18), можна записати у вигляді:

$$S'_{\varepsilon\varepsilon} = (GK - E_n) P^{-1} S'_{\psi\psi} P_*^{-1} (K_* G_* - E_n). \quad (19)$$

Підстановка матриці (19) у вираз (3) визначає величину функціонала системи спостереження в даній задачі синтезу оптимальної структури спостерігача вихідних координат об'єкту. Мінімізація вказаного функціонала, як і в попередніх задачах, здійснюється методом Вінера-Колмагорова.

Перша варіація функціонала (3), що включає матрицю (19), має вигляд:

Результати вирішення аналітичних прикладів синтезу оптимальних структур спостерігачів

Для оцінювання ефективності алгоритмів синтезу, отриманих в результаті вирішення задач (варіанти «а», «б» і «в»), нижче приведені результати вирішення аналітичних прикладів синтезу оптимальних структур спостерігачів. Вихідна інформація для вказаних прикладів наступна:

$$\begin{aligned} K = \frac{k}{(Ts + 1)}, \quad p = \tau_0 s + 1, \quad R = 1, \quad \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_y} = \gamma, \quad S_{y\varphi} = S_{\varphi y} = 0, \\ S_{yy} = \frac{\sigma_y^2}{\pi} \frac{a^2}{|\tau_0 s + 1|^2}, \quad S_{\psi\psi} = \frac{\sigma_\psi^2}{\pi} \frac{d^2}{|\tau s + 1|^2}, \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_\varphi^2}{\pi} \frac{b^2}{|\tau_1 s + 1|^2}. \end{aligned}$$

Результати вирішення прикладів.

а) Варіант задачі «а»:

Враховуючи вхідні дані вираз (8) в цьому випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} \Gamma_* = \Gamma = I, \quad D = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{(\tau_0 s + 1)}, \quad D_* = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{(-\tau_0 s + 1)}, \\ T = T_0 + T_+ = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{k} \frac{(Ts + 1)}{(\tau_0 s + 1)}, \end{aligned}$$

а структура спостерігача (9):

$$\hat{G} = \frac{a}{k}(Ts + 1). \quad (23)$$

Підстановка вихідної інформації до задачі і вираз (23) в рівняння (6) визначає спектральну щільність помилки як:

$$S_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\sigma_y^2}{\pi} \frac{|Ts + 1|^2}{k^2} \left[\frac{a^2(a-1)^2}{|\tau_0s + 1|^2} + \gamma^2 \frac{b^2}{|\tau_1s + 1|^2} \right]. \quad (24)$$

Очевидно, що функціонал (3) при підстановці в нього виразу (24) буде спрямований в нескінченність.

Таким чином традиційне вирішення задачі синтезу спостерігача (варіант «а») навіть в прос-

тих випадках не забезпечує потрібну якість спостереження.

б) Варіант завдання «б».

Вирази (15) в цій задачі мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Gamma_* &= \Gamma = I, \\ D &= \frac{\sigma_y}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{a^2\tau_1^2 + \gamma^2b^2\tau_0^2}s + \sqrt{a^2 + \gamma^2b^2}}{(\tau_0s + 1)(\tau_1s + 1)}, \\ D_* &= \frac{\sigma_y}{\sqrt{\pi}} \frac{(-\sqrt{a^2\tau_1^2 + \gamma^2b^2\tau_0^2}s + \sqrt{a^2 + \gamma^2b^2})}{(-\tau_0s + 1)(-\tau_1s + 1)}, \\ T &= T_0 + T_+ = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\pi}} \frac{(Ts + 1)}{k} \frac{(\sqrt{a^2\tau_1^2 + \gamma^2b^2\tau_0^2}s + \sqrt{a^2 + \gamma^2b^2})}{(\tau_0s + 1)(\tau_1s + 1)}, \end{aligned} \quad (25)$$

а структура спостерігача (16) має вигляд:

$$\hat{G} = \frac{1}{k}(Ts + 1). \quad (26)$$

Підстановка інформації (25) до задачі (варіант «б») і функції (26) в рівняння (13) обнуляє останнє. Це означає, що мінімальне значення функціонала, що досягається в цій задачі, дорівнює нулю. Таким чином, алгоритм синтезу оптимальної структури спостерігача, отриманий в задачі (варіант «б») абсолютно ефективний.

в) Варіант задачі «в».

Структура спостерігача (22) визначається виразом:

$$\hat{G} = \frac{1}{k}(Ts + 1). \quad (27)$$

Підстановка до задачі (варіант «в») функції (27) у вираз (19) обнуляє останній, а отже, і функціонал (2).

Очевидно, що отриманий в задачі (варіант «в») алгоритм синтезу оптимальної структури спостерігача як в попередній задачі (варіант «б») в порівнянні з традиційним (варіант «а») також абсолютно ефективний.

Висновки

Поставлені по новому задачі і отримані алгоритми синтезу оптимальних структур спостерігачів стохастичного вихідного стану рухомого об'єкту з використанням інформації, заздалегідь отриманої в процесах динамічної атестації бортових вимірювачів при їх напівнатурних випробуваннях і за результатами структурної ідентифікації моделей динаміки прототипів створюваних об'єктів, що цікавлять, після їх натурних випробувань. Запропоновані алгоритми синтезу володіють вельми високою ефективністю.

Список літератури

1. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
2. Блохин Л.Н. Модернизированная многомерная винеровская фильтрация / Л.Н. Блохин // Кибернетика и вычислительная техника. – 2002. – № 136. – С. 77-78.
3. Блохин Л.М. Статистична динаміка систем управління: підруч. / Л.Н. Блохин, М.Ю. Буриченко. – К.: НАУ, 2003. – 208 с.