УДК 517:519.5:530.1

[1]**Минаев Ю.Н.,** д-р техн. наук
[2]**Филимонова О.Ю.,** канд. техн. наук
[2]**Минаева Ю.И.**

КОНЦЕПЦИЯ МЕНТАЛЬНЫХ ОБРАЗОВ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

[1]**Национальный авиационный университет**
[2]**Киевский национальный университет строительства и архитектуры**

Рассмотрены вопросы анализа нечетких множеств на уровне ментальных образов в пространстве с не-архимедовой мерой. Показано, что в условиях неопределенности необходимо учитывать отсутствие меры или ее несовпадение с мерой для условий определенности; функция принадлежности является продуктом мыслительной (ментальной) деятельности человека, в частности, результатом интуитивного мышления.
Предложено рассматривать нечеткое множество как объединение нечетких подмножеств, каждое из которых получено на основе процедуры сжатия системы итерируемых функций

Введение

Проблема управления в условиях неопределенности и в теоретическом и в прикладном плане имеет принципиальное значение и решению отдельных задач этой проблемы посвящено астрономическое количество научных публикаций. Последним и не подвергаемым сомнению достижением в этой области знаний является теория нечетких множеств [1] (НМ), позволившая путем введения функции принадлежности объективизировать субъективное представление об исследуемом объекте и на этой парадигме получить целый ряд исключительно важных прикладных результатов. Теория НМ стала одним из главных направлений научных исследований по проблематике искусственного интеллекта и в этой связи, очевидно, должна быть исследована с точки зрения *мыслительных* систем.

Современное состояние проблемы

Рассматривая неопределенность в понимании, предложенном Л.Заде, отметим, что в рамках ТНМ не учитывается, во-первых, то, что мера порядка (в частности, отношение порядка «>») в условиях неопределенности может либо отсутствовать, либо быть иной по сравнению с условиями определенности, в частности, эта мера может быть не-архимедовой; вo-торых, ФП является продуктом мыслительной (ментальной) деятельности человека, часто результатом *интуитивного* мышления, и должна анализироваться и быть формализованной с учетом именно этого обстоятельства.

Условия неопределенности, если их понимать в прямом смысле, требуют учета следующего факта. Доказано [2] (теорема А.М. Островского) что, природа состоит из двух и только двух частей, одна из которых описывается вещественными числами, а другая p-адическими. Известно, что вещественными числами описывается движение макроскопических материальных объектов, яркий пример – классическая (вещественная) физика, однако часть природы, которая *естественно* должна описываться не вещественными, а p-адическими числами, не известна. Естественно предположить, что в условиях неопределенности, скажем осторожно, могут иметь место ситуации, где p-адический анализ и применение p-адических чисел будет естественным, даже если исследуемый объект описывается в условиях определенности вещественными числами. Другими словами, объект, управляемый сознанием (подсознанием), например, на основании использования экспертных оценок, может быть представлен не только в вещественнозначном базисе.

Относительно p-адических чисел ограничимся следующим [4]. Представление любого рационального числа a в виде конечной суммы или бесконечной суммы $a_k 2^k + +a_{k+1}2^{k+1} + \ldots + a_{k+n}2^{k+n}$; имеет название 2-*адического разложения* числа a, числа $\{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n}\} \in \{0,1\}$, где $a_k = 1$ называют 2-*адическими цифрами числа* $a = \frac{p}{q}$. Доказано, что каждое рациональное число имеет единственное 2-адическое разложение и последовательность 2-адических цифр периодична. Действительные числа получают из рациональних при помощи процедуры *пополнения,* которая может быть применена к любому метрическому пространству, т.е. множеству, на котором определены расстояния между точками. Пусть p-простое. Известно, что любое рациональное число представлено в виде $r = p^k \frac{m}{n}$, где $k \in Z$, $\frac{m}{n}$ – несокращаемая дробь, числитель и знаменатель которой есть взаимно простыми с p. Величина p^{-k} – p-адическая норма числа r и обозначается как $\|r\|_p$. Расстояние, вычисленное по формуле $d_p(r_1, r_2) = \|r_1 - -r_2\|_p$, наделено всеми свойствами обычного расстояния, в частности, удовлетворяет неравенству треугольника: $d_p(r_1, r_2) + d_p(r_2, r_3) \geq d_p(r_1, r_3)$, но существуют определенные отличия. Так, в смысле расстояния d_p все треугольники являются равнобедренными, причом длина основания не больше боковой стороны. Пространства с такими свойствами имеют название *ультраметрических*.

Еще одно отличие состоит в том, что целые числа образуют ограниченное множество с диаметром 1. Если применить к этому множеству процедуру пополнения, то получают *компакт*, который обозначают $\boldsymbol{Q}_p$, элементы $\boldsymbol{Q}_p$ – *целые p-адические числа.* Они допускают запись в виде бесконечнозначных чисел в p-ичной системе счисления, а именно, p-адическое число a однозначно записывается в виде бесконечной влево последовательности $\ldots a_n \ldots a_2 a_1 a_0$, $0 \leq a \leq p-1$. Эту запись можно понимать как сумму ряда, который сходится $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n + \cdots$. Известно, что поле p-адических чисел имеет кластерную (иерархическую) структуру, что является одной из причин использования поля для моделирования ментальных процессов.

В работе [3] построены математические модели представлений неупорядоченности пространства в микромире, что связывается с *не-архимедовостью* этого пространства. Естественно предположить, что в условиях неопределенности пространство исследуемого объекта также не всегда обладает упорядоченностью. Другими словами, неопределенность можно и, по-видимому, необходимо рассматривать и в условиях полного или частичного отсутствия порядка. Отметим, что до настоящего времени такой постановки задачи анализа ТНМ не было.

Не-архимедова метрика определяется способом измерения расстояния между рациональными числами, возникающим из следующей «арифметической» конструкции. Пусть $p \in \boldsymbol{N}$ – произвольное простое число. Определим отображение $|\cdot|_p$ на $\boldsymbol{Q}$ следующим образом:

$$|\mathrm{x}|_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{ord_p x}}, & \textit{åñëè}\ \mathrm{x} \neq 0, \\ 0, & \textit{åñëè}\ \mathrm{x} = 0, \end{cases},$$

где

$$ord_p x = \begin{cases} \text{íàèáîëüøàÿ ñòåïåíü ÷èñëà } \eth, \\ \text{êîòîðàÿ äåëèò x, åñëè } x \in Z \\ ord_p a - ord_p b, \text{åñëè } x = a/b, a, b \in Z, b \neq 0. \end{cases}$$

Метрика, определенная с учетом введенной аксиомы, относится к *не-архимедовым* [5], обладающим целым рядом парадоксальних свойств. Например, для не-архимедова поля справедливо $\|x \pm y\| \le \max(\|x\|,\|y\|)$ и при $\|x\| \ne \|y\|$ достигается равенство. Это свойство называют «принципом равнобедренного треугольника». Заметим, что функция $|.|_p$ может принимать только «дискретное» множество значений, а именно Z $\{p^n, n \in \wedge\} \cup \{0\}$. Если $a, b \in N$, то $a \equiv b(\mathrm{mod}\, p^n)$ тогда и только тогда, когда $|a-b| \le 1/p^n$.

ФП «рождена» в ментальном пространстве со своей метрикой, но используется в физическом пространстве с другой метрикой. Естественно, должны быть определены связи между этими разными (по своей природе) метриками, ФП должна анализироваться с учетом этого обстоятельства, отдельно следует отметить иерархию α-уровней у ФП. Главный элемент ТНМ–ФП как продукт умственной деятельности человека должна учитывать, что пространство умственной деятельности не является *однородным и упорядоченным*: невозможно сравнить два произвольных ментальных объекта. В реальных условиях ФП различных типов используют достаточно произвольно, процедура их назначения в ряде случаев носит случайный характер и определяется подсознанием.

Показано [3], что в ментальном мире существует четкая иерархическая структура, неупорядоченность вполне согласуется с иерархичностью. Для двух ментальных объектов x и y всегда существует некоторый ментальный объект z, который стоит в иерархической системе выше x и y. Однако при этом x и y могут быть несравнимы между собой. Например, сигмоидальная и Гауссова ФП не сравнимы (на основании линейного порядка), но равномерная ФП иерархически стоит выше, т.к. она считается более «общей» (наиболее дезинформативной).

P-адическое число имеет иерархическую древовидную структуру [4], именно это обстоятельство позволяет использовать ветви *p*-адических деревьев $\boldsymbol{Q}_p$ в качестве ментальных координат. В простейшей модели духовное пространство математически представляется как декартово произведение *p*-адических деревьев $\boldsymbol{Q}^n_p = Q_p \times \ldots \times \boldsymbol{Q}_p$. По существу предлагается «оцифровать» духовные объекты, используя *p*-адические числа, что дает возможность описать духовные процессы с помощью их анализа в *p*-адических числовых полях.

Одним из свойств *p*-адических чисел есть то, что множество *p*-адических чисел не упорядочено. В отличие от числовой прямой на *p*-адическом дереве существуют несравнимые части. В то же время на *p*-адическом дереве существует жесткая иерархия, основанная на положении части по отношению к более общему объекту. В [3] древовидную структуру этой иерархии рассматривают в качестве важнейшей отличительной черты духовных пространств. Заметим, что, например, на прямой или плоскости тоже существует иерархия по отношению к включению в более общий объект.

Главный элемент ТНМ – ФП является в большинстве случаев результатом *интутивного мышления,* которое, в свою очередь, имеет свою *динамику*, эволюцию духовных объектов предложено в [3] описывать с помощью *p*-адических динамических систем в пространстве $\boldsymbol{Q}^n_p$. Это модель мышления не основанного на правилах логики, хотя логическое мышление не исключается из рассмотрения. Но многие динамические системы моделируют *интуитивное* мышление. Напомним, что дискретные динамические системы задаются итерациями отображений – в нашем случае из *p*-адического дерева в себя. Далее будет показано, что эти итерации отображений представляют собой *сжимающие* отображения, задающие новое множество ФП для каждого значения универсального множества.

В *p*-адических динамических системах существуют решения в виде неподвижных точек и аттракторов, что предполагает необходимость рассматривать новую метрику p_p на *p*-адическом дереве. Известно, что на Q_p существует естественная метрика, задаваемая так: две бесконечные ветви дерева *близки*, если длина их общей части, выходящей из корня, *велика*. Метрика p_p является *ультра-метрикой,* для которой выполняется усиленное неравенство треугольника. Ультраметрическая геометрия принципиально отличается от евклидовой геометрии. В работе [2] высказано предположение, что духовные явления адекватно описываются именно ультраметрическими геометриями.

Постановки основных задач

Определение НМ дано в работах Л. Заде, в соответствии с которым НМ $\widetilde{A}$ множества E представляет собой множество упорядоченных пар $\{(x/\mu_{\widetilde{A}}(x))\}$, $\forall x \in E$, где $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ – степень принадлежности x в A, $\mu_{\widetilde{A}} \to [0,1]$. Если M – множество значений ФП, то $x \sim \xrightarrow[\mu_A]{} M$. В соответствии с принятой в [2] методологией исследования, рассматривая НП – значение/ФП (очень часто НП отождествляют с ФП) как продукт мыслительной деятельности следует определить соответствующее информационное пространство. Известно, что для ментального пространства информационное пространство $\boldsymbol{X}_j$ – это множество последовательностей, состоящих из символов, с заданными на них некоторыми операциями. В рассматриваемом случае (НМ) это пространство должно быть таким, чтобы моделировать значения ФП для определенных значений элементов универсального множества, на котором определена НП: интервал $A^{\alpha} = [A_1^{\alpha}, A_2^{\alpha}]$, $A^{\alpha 1} \subset A^{\alpha 2}$ и $\widetilde{A}_1^{\alpha_2} \le \widetilde{A}_1^{\alpha_1} \le \widetilde{A}_2^{\alpha_1} \le \widetilde{A}_2^{\alpha_2}$ когда $\alpha_1 > \alpha_2$.

Согласно [2] мыслящие системы (в частности, люди) оперируют с ***I***-последовательностями информации (просто последовательности цифр), которые называются ***I***-состояниями. Иерархические семейства ***I***-состояний образуют ***I***-объекты, которые, в свою очередь, входят в состав новых объектов и т.д. Рассмотрим особенности ФП в свете изложенного. Процесс назначения ФП, которая также представляет иерархическую систему, это акт мышления (на первичном уровне), который совершается динамической системой, работающей с ***I***-состояниями, т.е. существует нелинейное соотношение между ***I***-состояниями на входе и на выходе

$x_{n+1} = f(x_n)$, $x_n \in \boldsymbol{X}_1$, где $\boldsymbol{X}_1$ – конфигурационное пространство динамической системы (пространство ***I***-состояний или ментальное пространство).

В соответствии с нотацией ментальных процессов авторами принято, что мышление *интуитивно* назначает начальную ФП ($\mu(x) \to [0,1]$), заданную на универсальном множестве $\boldsymbol{X}$, $x \in \boldsymbol{X}$ (хотя имеется целый ряд способов вычисления ФП (на основе наблюдений), но в работе рассматривается ФП, назначаемая в виде экспертной оценки, т.к. именно такой подход оправдывает применение в общем случае ТНМ.). Это ***I***-состояние x_0 (или группы ***I***-состояний U_0 (множества значений)), которое сообщается сознанием. Математически это соответствует выбору начальной точки x_0 (или окрестности (множества значений) U_0). В качестве начальной точки x_0 можно, например, принять утверждение типа $\widetilde{a}$ =*примерно a* (с предварительно назначенной ФП). Отправляясь от этой начальной точки x_0, мыслительный процессор π, генерирует новые ***I***-состояния, соответствующие новым значениям $x \in \boldsymbol{X}$, т.е. определяет новые ФП, соответствующие новым $x \in \boldsymbol{X}$. Отметим этот факт: в соответствии с предложенной парадигмой мышления новые значения ФП (для новых значений УМ, отличных от x_0) являются не точками (как это имеет место в современной ТНМ), а представляются *последовательностями значений, другими словами,* новыми утверждениями, полученными, в частности, на основании разнообразных отображений, в частности, аффинных (рассуждение по аналогии).

Нелинейное соотношение между ***I***-состояниями на входе и на выходе, принимаемое в виде $x_{n+1} = f(x_n),\ \ x_n \in X_1$ заставляет учитывать основные положения теории сжимающих отображений, важнейшим из которых являются аттракторы, которые рассматриваются сознанием как возможные решения задачи, рассматриваемой, в свою очередь, как назначение новых значений ФП (с учетом предварительно назначенной). Могут также возникать циклы $(a \to b \to \ldots \to c \to a)$, которые порождают сигналы к остановке динамической системы. Если принять какое-либо решение невозможно, тогда менталитет личности, принимающей решение, может послать новое начальное ***I***-состояние x_0^{new} или сменить режим работы мыслительного процессора.

Математически смена режима может быть описана как смена функции $f(x)$, определяющей динамическую систему. Таким образом, процесс мышления по назначению ФП и дальнейшую работу с ней в дальнейшем следует описывать как работу семейства динамических систем $f_\alpha(x)$, где параметр α выбирается сознанием или случаем (в случайной динамической модели мышления).

Показано [2, 3], что ветви p (или m)-адических деревьев $\boldsymbol{Q}_p$ можно использовать в качестве ментальных координат, отличительной особенностью такой модели является *способ кодирования информации*. Геометрически можно представить систему p-адических целых чисел (которые будут математической основой модели НП) как однородное дерево с p-ветвями, исходящими из каждой вершины, и начинающееся символом *, например, значение НП при максимальном значении ФП. Это корень р-адического дерева. Существует p-адическая алгебраическая структура, заданная на этом дереве, которая дает возможность складывать, вычитать и умножать ветви этого дерева, ветви такого дерева в нашем случае будут представлять возможные значения ФП.

Предполагается, что все мыслящие системы кодируют информацию, используя последовательности состояний (в простейшем случае «да»=1, «нет»=0) с жесткой иерархической структурой. Наличие иерархии в ***I***-последовательностях индуцирует *ультраметрические* геометрии, которые, по-мнению [2] *являются основой математического описания процессов, использующих модели мышления*. Отметим, что Хаусдорфова метрика также индуцирует ультраметрические геометрии.

В общем случае пространство НМ рассматривается как полное метрическое пространство $(\boldsymbol{X}, p)$. В работе показано, что метрические свойства НМ могут быть расширены и обобщены с учетом теоремы Лемина-Щепина [2, 5] об ультраметризации произвольного метрического пространства $(\boldsymbol{X}, p)$. В [2] получен принципиально важный вывод, состоящий в том, что любое физическое метрическое пространство $(\boldsymbol{X}, p)$, в т.ч. пространство НМ, может быть представлено мыслящей системой τ, имеющей ультраметрическое пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ в качестве пространства ***I***-состояний. В свою очередь, физическое пространство (X, p) может быть представлено в виде древоподобной решетки, а физическая динамика в X может рассматриваться как динамика на такой решетке. В частности, нейронная сеть нашего мозга есть не что иное, как *ультраметризация* евклидова пространства $\boldsymbol{R}^3$. Отметим, что меры $\widetilde{\rho}$ и ρ абсолютно разные, т.к. $\widetilde{\rho}$ – ультраметрика.

Второй вывод, вытекающий из [2], состоит в том, что существование ультраметризации (X, p) физического пространства $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ может интерпретироваться как топологическое обоснование возможности создания универсальной мыслящей системы $\tau_{\text{óíèâ}}$ (для физического пространства $\boldsymbol{X}$), которая могла бы «понимать» все мысленные представления пространства $\boldsymbol{X}$.

Обратим внимание на теорему существования и единственности [2], имеющую прямое отношение к интерпретации результатов.

Теорема [2]. Для произвольного метрического пространства $(\boldsymbol{X}, p)$ найдутся ультраметрическое пространство $(\widehat{X}, \widehat{\rho})$ и нерасширяющее отображение u, действующее из $\boldsymbol{X}$ на $\widehat{X}$, такое, что для любого нерасширяющего отображения f: $(\boldsymbol{X}, p)\to(\boldsymbol{Y}, d)$, где $(\boldsymbol{Y}, d)$ – некоторое ультраметрическое пространство, существует *единственное нерасширяющее* отображение uf: $(\boldsymbol{X}, p)\to(\boldsymbol{Y}, d)$ такое, что $f(x)=uf(u(x)), x\in\boldsymbol{X}$.

Таким образом, постановка задачи ментального анализа НМ сводится практически к определению *единственного нерасширяющего* отображения uf: $(\boldsymbol{X}, p)\to(\boldsymbol{Y}, d)$ такое, что $f(x)=uf(u(x))$, $x\in\boldsymbol{X}$, $(\boldsymbol{Y}, d)$ – пространство множеств ФП.

Отметим, что если x – точка пространства $\boldsymbol{X}$; $X:\alpha^{(j)}=f_j(x),\quad j=1,2,\ldots$ и $\alpha=u(x)$ – ментальные представления этой физической точки системами τ_j, $j=1,2,\ldots$ и $\tau_{\text{óíèâ}}$ соответственно (в пространствах X_j, $j=1,2,\ldots$ и $\widetilde{X}$ соответственно). Тогда $\alpha^{(j)}=uf_j(\alpha),\quad j=1,2,...$ где отображения $uf_j:\widetilde{X}\to X_j$ играют ту же роль, что и отображения $f_j:X\to X_j$ в теореме Лемина-Щепина. Таким образом, ментальные образы $\alpha^{(j)}$ объекта x являются представлениями одного и того же ментального образа а системы τ. Поскольку отображения uf_j нерасширяющие, то малому изменению образа $\alpha\to\delta+\varepsilon\alpha$ соответствует малое изменение образа $\alpha^{(j)}\to\alpha^{(j)}+\delta\alpha^{(j)}$. Для НМ величина $\alpha^{(j)}$ трактуется как α-уровень.

Принимая НП (ФП) как продукт мышления (поток мыслей), для описания этих объектов однозначно рекомендуется использовать ультраметрические геометрии. Конечным шагом в построении математической модели является описание эволюционного процесса в пространстве $\boldsymbol{I}$-состояний. Для этого необходимо зафиксировать функцию $f:\boldsymbol{X}_{\mathrm{I}}\to\boldsymbol{X}_{\mathrm{I}}$, но если для мыслительных систем она описывает динамическую систему подсознания, то в нашем случае – это множество ФП для различных значений УМ. Процесс мышления реализуем как динамическая система $x_n=f(x_{n-1})$ на пространстве $\boldsymbol{I}$-состояний $\boldsymbol{X}_j$ (в нашем случае пространство НП), начиная с $\boldsymbol{I}$-состояния x_0, получают цепь $\boldsymbol{I}$-состояний $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$.

Следует отметить, что анализ ФП как результата мыслительного процесса имеет следующие особенности. Динамическое мышление основано на процедуре, в соответствии с которой начальное $\boldsymbol{I}$-состояние x_0 посылается в область бессознательного; оно (состояние) итерируется некоторой динамической системой, определяемой отображением $f:\boldsymbol{Z}_m\to\boldsymbol{Z}_m$, аттрактор передается в сознание; именно он будет решением задачи x_0. Может случиться так, что итерации, начинающиеся с некоторого x_0, не сойдутся ни к какому аттрактору. В этом случае мыслящая система τ не может найти определенное решение задачи, что означает невозможность нахождения ФП, адекватной высказыванию.

Адекватность ФП высказыванию, как будет показано далее, необходимо понимать как физическое подобие ФП на всех уровнях представления НМ (мышление по аналогии).

Предложенная в [2] математическая модель мышления, которую пытаемся применить для анализа НМ, базируется на двух предположениях:

– система кодирования, используемая мозгом для записи векторов информации, порождает иерархическую структуру между цифрами этих векторов, т.е. если $x=(a_1,a_2,\ldots,a_n\cdots)$, $a_j=0,1,\ldots m$ – 1-вектор информации, который представляет в мозге $\boldsymbol{I}$-состояние, то цифры a_j обладают различными весами, цифра a_0 наиболее важна, a_1 доминирует над $a_2,\ldots,a_n\cdots$, и т. д.;

– функционирование мозга не основывается на принципах логического мышления.

Подсознание содержит в себе динамические системы $f_s(x)$, которые производят новые ***I***-состояния практически автоматически. Эта динамика управляется механическим изменением параметра s и начального условия x_0. Это управление обеспечивается сознанием.

Иерархическая структура внутри векторов информации влечет близость между ***I***-состояниями, которая соответствует длине общего корня этих ***I***-состояний. Эта иерархическая структура порождает p-адическую *метрику* на пространстве ***I***-состояний. Следовательно, описание ***I***-состояний p-адическими числами – это следствие иерархической структуры на пространстве ***I***-последовательностей. Сказанное не означает, что невозможно рассматривать иные математические модели процесса мышления, которые будут основаны на пространствах ***I***-состояний без какой-либо иерархической структуры, т.е. использовать иные метрики на пространствах информации. Там мы можем применять иные теории динамических систем.

Стандартной метрикой на пространстве ***I***-последовательностей $x=(\alpha_0,\alpha_1, \ldots,\alpha_N)$, $\alpha_j=(0,1)$ является метрика Хэмминга. Она определяется как $\rho(x,y)= =\sum_{j=0}^{N}|x-y|$ и не связана с иерархической структурой, т.е. не является ультраметрикой. Однако метрика Хэмминга рациональна и применима, т.к., как показано ниже, существование вещественной градуирующей функции r дает возможность представлять иерархию порядка на решетке с помощью стандартной структуры порядка вещественной прямой.

Представление пространства НП (ÓÌ $\bigcup$ÔÏ) в виде абстрактного ультраметрического пространства *автоматически* индуцирует иерархическую систему деревьев, т.н. древовидную решетку. Динамика образования новых ФП в каждом ультраметрическом пространстве может представляться как процедура аффинного преобразования(подобная мышлению)на древовидной решетке. Это означает, что если на УМ $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2]$ задана ФП $\mu(x)$, то на подмножестве $\boldsymbol{X}^{(0)}\in\boldsymbol{X}=[x_1^0,x_2^0], x_1\le x_1^0\le x_2, \le x_1\le x_2^0\le x_2$ должна быть задана ФП $\mu^{(0)}(x)$, являющаяся аффинным преобразованием $\mu(x)$, т.е $\mu^{(0)}(x)\to\alpha\cdot\mu(x)$, $\alpha\le 1$. Динамика на p-адических иерархических деревьях является простейшей моделью формирования ФП как мыслительной процедуры.

Формальное признание ультраметричности пространства НП имеет ряд следствий [2, 4]: в частности, множество $L=U\bigcup\{0\}$, где U – набор шаров ультраметрического пространства ***X***, а 0=∅, является решеткой относительно структуры порядка ≤ по включению множеств:

a) для любых двух шаров u_1, u_2 существует третий шар $u=u_1\wedge u_2$, лежащий в обоих шарах u_1, u_2;

b) для любых двух шаров u_1, u_2 существует наименьший шар $u=u_1\vee u_2$, содержащий оба шара u_1, u_2, это либо наибольший из двух данных шаров (если один из них содержит другой), либо шар радиуса $r=p(x,y)$, где $x\in u_1$, $y\in u_2$, с центром в любой точке объединения $u_1\bigcup u_2$. Отметим, что в нотации ТНМ множество L представляет собой универсальное множество.

Древоподобность решетки по сути является следствием свойства ультраметрических шаров: $u\bigcap v\neq\varnothing\Rightarrow u\subset v$ или $v\subset u$. Заметим, что пространство замкнутых шаров метрического пространства, которое не является ультраметрическим, не обладает такой структурой дерева. Обратим внимание на вывод, полученный в [4, 5], который будет иметь важное значение для последующего изложения. Доказано, что решетка ξ имеет *вещественную* шкалу, если существует вещественно-значная неотрицательная изотонная функция $r:\xi\setminus\{0\}\rightarrow R\bigcup\{+\infty\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) если x – атом ξ, то $r(x)=0$;

(ii) если $u_1<u_2$, то $r(u_1)<r(u_2)$;

(iii) $\forall 0\subset A(\xi)$,

где $A(\xi)$ – множество атомов решетки(ξ), справедливо равенство $r(\sup\{x{:}x\in 0\})=$ $=\sup\{r(x\vee y){:}x,y\in 0\}$.

В работе [5] сделан важный вывод, что вещественная градуирующая функция r дает возможность представлять иерархию порядка на решетке с помощью стандартной структуры порядка вещественной прямой, см. (i), (II).Условие (III) является техническим. Напомним, что отображение f называют f изотонным, если $u\le v\Rightarrow f(u)\le f(v)$. Решетка шаров $\boldsymbol{L}$ является вещественно градуированной и полной, $r(u)$ – радиус шара u. Имеет место следующее предложение.

Предложение [4]. Для любого ультраметрического пространства (X,p) решетка его шаров $\boldsymbol{L}$ является полной, атомарной, древоподобной и вещественно градуированной.

Анализ НМ в ультраметрическом пространстве (р-адическом базисе)

Отметим следующее обстоятельство: неопределенность рассматривают, как правило, в физическом пространстве, но ФП формулируют в концептуальном. Это приводит, как отмечается в [7], к возникновению абстрактных преград, для преодоления которых необходимо найти внутреннюю интерпретацию задачи с подходящей метрикой между проблемой и целью. Одной из таких метрик является *расстояние Монжа-Канторовича,* формулируемое в следующем виде.

Пусть $g:X\rightarrow\boldsymbol{R}$ – функция с константой $Lip\, g<1$. Метрика *Монжа-Канторовича* в M определяет расстояние между двумя мерами μ и ν как

$$d_M(\mu,\nu)=\sup\left\{\left|\int g d\mu-\int g d\nu\right|\right\},$$

где $|g(x)-g(y)|\le|x-y|, \quad \forall x,y\in X$. Напомним, что если (X,d) – полное метрическое пространство, то отображение $S:X\rightarrow X$ удовлетворяет *условию Липшица*, если для всех x, $y\in X$ существует такое число $c>0$, что $d(S(x), S(y))\le cd(x,y)$. *Постоянной Липшица* Lip S для S называют минимальное с, для которого выполняется условие Липшица. Отображение S называют сжатием, если Lip $S<1$.

Согласно выражению для $d_M(\mu,\nu)$, для того, чтобы вычислить расстояние между двумя мерами, необходимо располагать множеством и *Системой Итерируемых Функций* (*Iterated Function System* – *IFS*). Подставляя каждую из них в это выражение, следует найти верхнюю границу разности двух интегралов, что будет искомым расстоянием. Показано, что пара (M,d_M) образует полное метрическое пространство. Более того, для любых μ, $\nu\in M$ *Марковский оператор* M [7] определяет сжатие в (M,d_M), т. е.

$$d_M(M(v_1),M(v_2))\le c\cdot d_M(v_1,v_2).$$

Отметим, что Марковский процесс может быть рассмотрен на примере *случайной динамической системы,* которая получается, если вместо одного оператора T использовать случайно выбранные отображения из набора $T\equiv\{T_k\}$, $k=1,2,...,N$. Каждое $T_i:X\rightarrow X$ является непрерывным преобразованием на *компактном* подмножестве $X\in\boldsymbol{R}^n$. Случайная орбита такой системы – последовательность точек

$$\{x_m\}_{m=0}^{\infty}:x_m=T_{k_{m-1}}\circ\cdots\circ T_{k_1}\circ T_{k_0}\circ x_0\equiv Tx_0,$$

полученных итеративным применением операторов из набора T. Каждый номер k_i $\in\{1,2,...,N\}$ может быть выбран независимо, либо с вероятностью, зависящей от номера k_{i-1} предшествующего отображения, в этом случае получаем марковский процесс (в работе не рассматривается).

Пространство нечетких множеств. Нечеткий синглтон введен *Zadeh* [1] как упорядоченная пара (x,t), где $x\in X$ и $t\in I$. Этот синглтон представляет элемент множества $\widetilde{X}=X\times I$ (X – универсальное множество). Новое нечеткое пространство создается в зависимости от элементов этого множества, которое определено следующим образом [10].

Определение 1. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $\widetilde{X}$ будет множеством, состоящим из всех нечетких синглтонов (x, t), определенных как отображение $x_t : X \in [0,1]$, где $x \in X$ и $t \in [0,1]$, связывающие с каждым элементом x_t его степень принадлежности μ_x, определенную как непустое подмножество $x_t = \{(x, \mu_x) \quad : x \in X, t \in I\}$, эти элементы определены как

$$x_t(u) = \begin{cases} 0, & x \neq u \\ t, & x = u \end{cases}.$$

Определение 2. Функция расстояния d^* определяется как $d^*(x_t, y_s) \leq \max\{d(x,y), \ |t-s|\},; \ x_t, y_s \in \widetilde{X}$; d^* удовлетворяет аксиомам:

$$d^*(x_t,y_s) \geq 0 \quad \forall x_t,y_s \in \widetilde{X};$$

$$d^*(x_t,y_s) = 0 \quad iff \quad x_t = y_s;$$

$$d^*(x_t,y_s) = d^*(y_s,x_t) \quad \forall x_t,y_s \in \widetilde{X};$$

$$d^*(x_t,y_s) \leq d^*(x_t,z_p) + d^*(z_p,y_s) \, \forall x_t,y_s z_p \in \widetilde{X}.$$

Определение 3. Пространство $F(X) \subseteq \subseteq P(\widetilde{X})$, где $F(x) = \{A \in P(\widetilde{X}) | A: \ X \in I$, $A(x)=t\}$, и $P(\widetilde{X})$ – мощность множества $X \times I$, называется *нечетким пространством*. Пространство $(F(X),d^*)$ – полное метрическое пространство.

Определение 4. Пространство $H(F(X))=\{A \in F(X)|A \neq \varnothing, \ A\text{-}compact\} \subseteq F(X)$ называется *нечетким* Хаусдорфовым пространством.

Определение 5. Пусть $w^*: \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ определено как $w^*(x,t)=(w(x),rt)$. Тогда w^* есть сжимающее отображение на пространстве $(F(X), d^*)$.

Как известно, пространство НМ $D(\Omega)$ на Ω определяется как множество верхних полунепрерывных и нормальных отображений $u{:}\Omega \to [0,1]$. Для $0 \leq \alpha \leq 1$ уровневое множество есть четким множеством: $[u]^\alpha = \{x \in \Omega{:}u(x) \geq \alpha\}$; метрика на $D(\Omega)$ может быть определена как $d_\alpha(u, v)=d_H([u]^\alpha,[v]^\alpha)$, где $d_H(\cdot)$ – метрика Хаусдорфа. Другими словами, пространство НМ является метрическим. Пусть (Ω,d) – полное метрическое пространство с метрикой d, $\Im(\Omega)$ – пространство, чьи точки есть компактным множеством Ω за исключением пустого множества. Для $x \in \Omega$ и $B \in \Im(\Omega)$ определим расстояние от точки x до множества B: $d(x,B)=\mathrm{Min}\{d(x,y);\ y \in B)\}$ и отдельно между множествами A, $B \in \Im(H)$: $d(A,B)=\mathrm{Max}\{d(x,B);\ x \in A)\}$. Тогда метрика Хаусдорфова между A та B определяется как $d_H(A,B)=\mathrm{Max}\{d(A,B),\ d(B, A)\}$.

Показано [10, 11], что метрика Хаусдорфа на НМ *генерирует* ультраметрическое пространство фракталов $\Im(\Omega,d_H)$, что предполагает работу сжимающих отображений. Пусть w_i, $i=1,2,\ldots,n$ – система сжимающих отображений на Ω, тогда преобразование $W{:}\Im(\Omega) \to \Im(\Omega)$, определенное как $W(B) = \bigcup_{i=1}^{n} w_i(B)$, $(\forall B \in \in \Im(\Omega))$ есть сжимающим отображением на $\Im(\Omega, d_H)$. Эта уникальная фиксированная точка имеет название аттрактора системы итерируемых функций (СИФ, англ. *IFS*). Когда сжимающий оператор определен на $D(\Omega,d_\alpha)$, его уникальные фиксированные точки определяют НМ атрактора. В пространстве компактов (H, d_H) сжатием в метрике Хаусдорфа d_H является оператор Хатчинсона с неподвижной точкой – аттрактором *IFS*.

Отметим. три главных положения *Теоремы о сжимающем отображении*. В евклидовом метрическом пространстве (X,d) – универсальное множество, на котором определено НМ $\widetilde{X}$, сжатием является отображение Липшица с Lip<1, которое имеет единственную неподвижную точку. В пространстве компактов (H,d_H) – пространство НМ – сжатием в метрике Хаусдорфа d_H является оператор Хатчинсона с неподвижной точкой – аттрактором *IFS*. Наконец, в пространстве борелевых мер (M,d_M) сжатие в метрике Монжа-Канторовича задает оператор Маркова для *IFS* с вероятностями. Неподвижной точкой является здесь единственная инвариантная мера, носитель которой – аттрактор *IFS*. Отметим, что в работе рассматривается Борелева мера на прямой и такая, что ее значение на произвольном отрезке равно длине этого отрезка.

В соответствии с простейшим определением, которое базируется на классическом принципе расширения, отображение $f:\Omega\to\Omega$ отвечает фадзификации $\tilde{f}: D(\Omega)\to D(\Omega)$, определенной на пространстве $D(\Omega)$ НМ на множестве Ω как

$$(\tilde{f}u)(y)=\sup\{u(x): x\notin f^{-1}(y)\}.$$

Простая фадзификационная схема основана на определении уровневых множеств и теоремы резолюций, в связи с чем любое НМ $\tilde{X}=\sum u(x)/x$ может быть представлено в виде $\tilde{X}=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha[u]^{\alpha}$. В этом выражении $[u]^{\alpha}$ интерпретируется как НМ с ФП, величина которой есть объединение уровневых множеств, удовлетворяющих трансформационному правилу $[\tilde{f}u]^{\alpha}=f([u]^{\alpha})$.

В метрическом пространстве $(\boldsymbol{H}(X),d_H)$ можно определить действие *оператора Хатчинсона* как объединение сжатий $\{w_i\}: W=\boldsymbol{H}(X)\to\boldsymbol{H}(X): B\to\bigcup_{i=1}^{N} w_i(B)$. Доказано, что оператор Хатчинсона является сжатием в $(\boldsymbol{H}(X),d_H)$ и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку. Понятие *IFS* вводится как объединение сжатий: $\{w_i\}$, $i=1,2,\ldots,N$; w_i: $\boldsymbol{H}(X)\to\to\boldsymbol{H}(X)$, в данном случае – сжатие ФП. Из теоремы о неподвижной точке и принципа сжимающих отображений [7 - 9] следует, что *IFS* имеет под действием оператора Хатчинсона единственное инвариантное множество – *аттрактор A*, причем для любого начального компакта итерации оператора Хатчинсона приводят к аттрактору.

Отметим, что результат работы СИФ можно определить как Преобразование подобия – преобразова-ние S: $\boldsymbol{R^n}\to\boldsymbol{R^n}$ с коэффициентом подобия r ($r>0$), если $\|S(x)-S(y)\|=r\|x-y\|_2$, $x, y\in\boldsymbol{R^n}$. Метрика $d_H(A,B)$ имеет два свойства, которые напрямую связаны с ФП. *Первое* свойство гласит. Пусть множества A и B составлены из объединения конечного числа компонентов-кластеров (α-уров-невых множеств). Тогда расстояние между двумя кластерами не превышает максимального расстояния между их компонентами:

$$d_H\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right)\le \max_{1\le i\le N} d_H(A_i,B_i).$$

Второе свойство метрики Хаусдорфа заключается в том, что d_H сохраняет свойство сжатия в пространстве Н: $d_H(F(A),F(B))\le r d_H(A,B)$. Запись $F(A)$, где A – компактное множество, мы будем понимать в смысле действия F на каждую точку компакта, т.е. $F(A)=F(x)|\forall x\in A\}$. Пара (H,d_H) является полным метрическим пространством. Следовательно, любое сжимающее отображение будет иметь в этом пространстве единственную неподвижную точку. Напомним, что НМ обладает метрикой $d_H(A,B)$, следовательно, пространство НМ обладает 1-м и 2-м свойствами пространства H, кластеры – α-уровневые множества соответствующих НМ.

Как правило, для определения свойств объекта рассматривают конечный набор сжатий. Если набор состоит из $(W_1,W_2,...,W_N)$ сжатий, где каждое из W_i имеет свой собственный коэффициент сжатия r_i, то их коллективное действие на компакт A определяется *оператором Хатчинсона* $W(A)=\bigcup_{i=1}^{N} W_i(A)$, когда на A независимо действует каждый из W_i, а затем берется объединение их образов. Показано, что W является сжатием в H с коэффициентом $r=\max\{r_i\}$, для любых A_1, A_2 $\in H$ мера $d_H(W(A_1),W(A_2))$ имеет вид:

$$d_H(W(A_1),W(A_2)) = d_H(\bigcup_{i=1}^N W_i(A_1),\bigcup_{i=1}^N W_i(A_2)) \le \max_{1\le i\le N}\left(d_H(\bigcup_{i=1}^N W_i(A_1),\bigcup_{i=1}^N W_i(A_2))\right)\le$$
$$\le r\cdot d_H(A_1,A_2).$$

На основании *принципа сжимающих отображений* получаем, что существует единственная неподвижная точка в H, т.е. непустое компактное множество, которое называется *аттрактором и IFS*, такое, что $A=W(A)=\bigcup_{i=1}^N W_i(A)$ и $\forall B\in H \lim_{k\to\infty} W^{\circ k}(B)=A$. Первое выражение определяет неподвижную точку – компактное множество A – как объединение своих собственных уменьшенных копий. Этот важный вывод заставляет в дальнейшем рассматривать НМ не как объединение пар x/μ_x, $x\in X$, $\mu_x\to[0,1]$, $x\in X$, а как объединение нечетких п/подмножеств -$\bigcup X_j$, $X_j\subseteq X_{j-1}$, $X_j=\{x_j^{(j)}/\mu_{x_j})$. Иначе говоря, A является *коллажем*. Например, для N=2 мы получим

$$A=W_1(A)\bigcup W_2(A)=W_1(W_1(A)\bigcup W_2(A))\bigcup W_2(W_1(A)\bigcup W_2(A))=$$
$$=W_{11}(A)\bigcup W_{12}(A)\bigcup W_{21}(A)\bigcup W_{22}(A),$$

где $W_{ij}=W_i\circ W_j$. Повторяя это разложение k раз, получим $A=\bigcup_{i\le\sigma_1\le\cdots\le\sigma_ё\le2}^N W_{\sigma_1\cdots\sigma_ё}(A)$, где $W_{\sigma_1\cdots\sigma_ё}=W_{\sigma_1}\circ\cdots\circ W_{\sigma_ё}$. Отметим, что в общем случае необходимо учитывать ФП, т.е каждое преобразование может быть выполнено частично, $A=\mu_1\cdot W_1(A)\bigcup\mu_2\cdot\cdot W_2(A)$. В случае генерации отображения, рассматриваемого как зрительный образ, $\mu(w_i)$ зависит от нормализованного серого пикселя интенсивности уровня величины. Можно также принимать, что $\mu(w_i)=p_i$, где p_i – стохастическая мера, $0\le p_i\le1$ и $\sum_i p_i=1$ (рис. 1).

В [7] приведен пример. При выборе $W=W_1\bigcup W_2$, где $W_1=x/3$, $W_2=x/3+2/3$, а в качестве В единичного интервала $B=I=[0,1$, продолжая процедуру сжатия *ad infinitum*, получают множество Кантора – пример классического фрактала. Именно это множество является неподвижной точкой выбранного оператора.

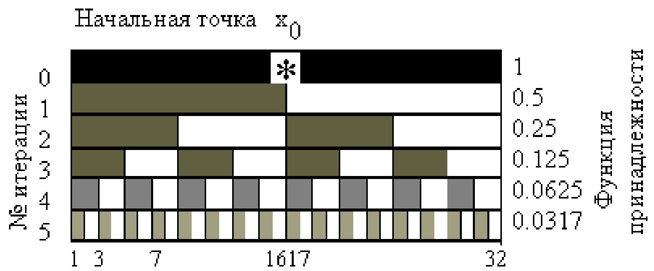


Рис. 1. Коллаж – результат работы СИФ
$W_1(x)=x/2$, $W_2(x)=x/2+½$

На рис. 1 рассмотрен пример *IFS* с аттрактором $I=[0,1]$:$W_1(x)=x/2$, $W_2(x)=x/2+1/2$. Начальная произвольная точка $x_0\in[0,1]$, $x_0=1/2$. Результат действия приведен на рис. 1, он представляет собой аттрактор A и его «раскраску», т.е. меру μ на нем. Теория утверждает, что носитель (аттрактор A и его «раскраска) на основе теории сжимающих отображений *однозначно* определяются *IFS* с вероятностями.

Обратная задача теории Систем Итеративных Функций состоит в нахождении подходящей *IFS* $\{W_i\}_{i=1}^N$, $W_i=c_ix+a_i$ и соответствующих вероятностей $\{p_i\}$. Для большинства практических задач проблема упрощается. Так, для 2-адического базиса естественно использовать бинарный алфавит {0,1}. Поэтому можно выбрать *IFS* с фиксированными коэффициентами в виде: $W_1(x)=x/2$, $W_1(x)=x/2+1/2$ и аттрактором [0,1]. Если рассматривать аффинные преобразования, тогда обратная задача сводится к нахождению вероятностей p_1, p_2, но это отдельный вопрос и в работе не рассматривается.

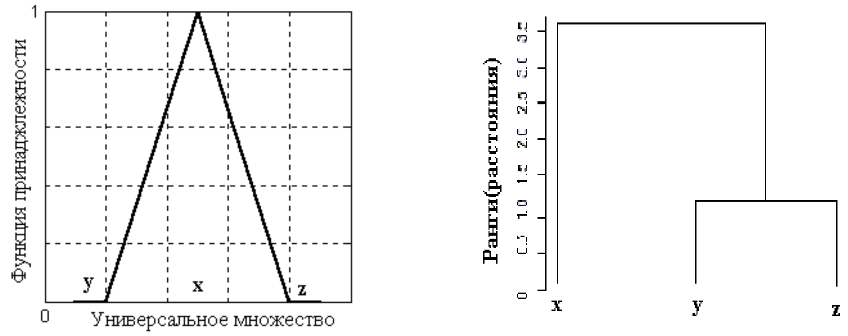
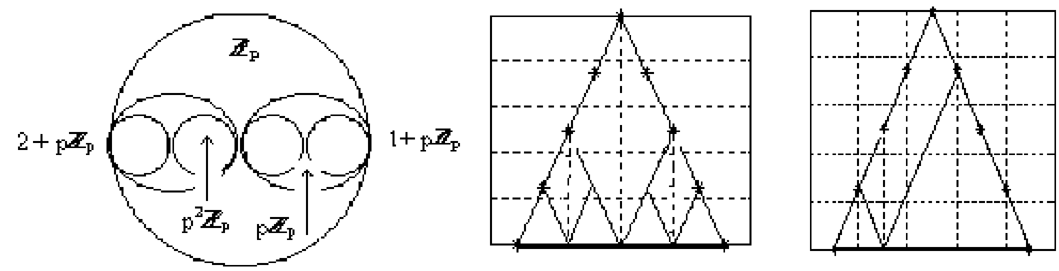


Рис. 2. Простейшее бинарное дерево для НП (ÓÌ ⋃ÔÏ)

На рис. 2 представлено ультраметрическое пространство ÓÌ ⋃ÔÏ для простейшей (треугольной) ФП и его бинарное дерево. Характерной особенностью дерева является то, что любая ФП – независимо от ее вида может быть представлена в виде простейшего бинарного дерева, физическое пространство ($\boldsymbol{X}$, p) представлено в виде древоподобной решетки. Выводы 1 и 2 названы авторами как **концепция ментальных образов физических объектов.**

Прикладные результаты анализа НМ в p-адическом базисе

В p-адическом базисе единичный интервал и его подинтервалы представляются в виде шаров (рис. 3), иерархически строго упорядоченных. В частности, для центрированного интервала имеем: $\boldsymbol{Z_2}\boldsymbol{\to}\{\boldsymbol{1+2Z_2}\}\cup\{\boldsymbol{2+2Z_2}\}$ и т.д., для произвольно выбранных подинтервалов – $\boldsymbol{Z_2}\boldsymbol{\to}$ $w_1\{1+2\boldsymbol{Z_2}\}\cup w_2\cdot\{2+2\boldsymbol{Z_2}\}$, где w_i, i=1,2; – весовые коэффициенты, зависящие от длин подинтервалов (диаметров шаров).



а *б* *в*

Рис. 3. 2-адический единичный интервал (*а*) и его геометрическая интерпретация (*б*, *в*) (наложена функция принадлежности): рис. 3 *б*) – центрированный интервал, *в*) произвольное расположение центра

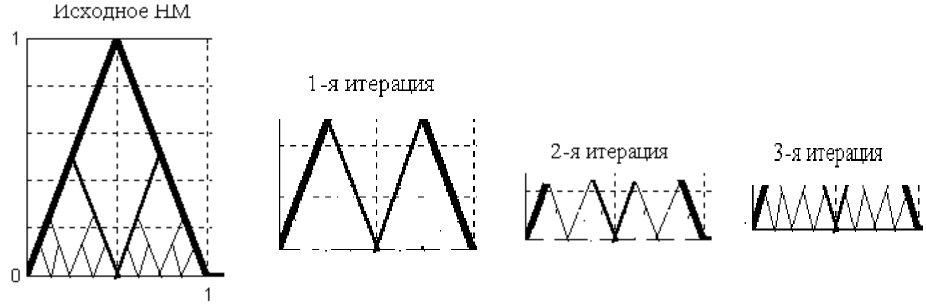
Отметим, что, как видно из рис. 3, поле p-адических чисел имеет кластерную структуру $\boldsymbol{Z}_p= \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} p^n Zp$,

где $\mathbf{Z}_\mathrm{p}= \bigcup\limits_{i,j,k} a_i + p(a_k + pZ_p)\ldots)$,

$$\{0\} \subset \ldots p^2\, Zp\subset p\boldsymbol{Z}p\subset\boldsymbol{Z}_\mathrm{p}\subset p^{-1}\boldsymbol{Z}p \subset \ldots \subset \boldsymbol{Q}p.$$

Эта теорема применительно к поставленной задаче утверждает, что если ($\boldsymbol{X}$,p) – пространство НМ, физически реализующее некоторое утверждение (ментальную процедуру), то ему однозначно соответствует ультраметрическое пространство $(\tilde{\hat{O}}, \hat{\rho})$, способ перехода из X в $\tilde{\hat{O}}$ – СИФ, необходимо определить тип СИФ. Любое новое утверждение, вытекающее из исходного, должно быть представлено в виде $(\boldsymbol{X}^{new}, p)$, $\boldsymbol{X}^{new} \subseteq \boldsymbol{X}$ и физически реализуется при помощи СИФ.

Отметим, что в силу приведенной теоремы нерасширяющее отображение $f{:}(\boldsymbol{X}, p) \to (\boldsymbol{Y}, d)$, в частности, может быть аффинным преобразованием. На рис. 4 представлено действие системы сжимающих отображений [11], примененных к ФП: показаны 3 итерации, в каждом случае соблюдено правило: если на УМ, представленного в виде закрытого интервала $I_x = [x^{\min}, x^{\max}]$, наложена ФП $\mu(x) \to [0,1]$, то для интервала $I_x^{(1)} = \frac{1}{2} I_x$ действует $\mu(x) \to [0, 0.5]$, для интервала $I_x^{(2)} = \frac{1}{2} I^{(1)}{}_x$ – $\mu(x) \to [0, 0.25]$, для интервала $I_x^{(3)} = \frac{1}{2} I^{(2)}{}_x$ – $\mu(x) \to [0, 0.125]$ и т.д.



а *б* *в* *г*

Рис. 4. Ультраметризация пространства НП

Приведем интерпретацию теоремы применительно к НМ. В данном случае речь идет о том, что пространство НП $.\tilde{5} = \{0/0, 0.5/1, 1/0\}$, представленное в виде НМ с треугольной ФП на УМ (0, 1) (рис. 4 *а*), для НП $.\widetilde{25}$ на УМ (0, 0.5) и для НП $.\widetilde{75}$ на УМ (0.5, 1.0) будут представлены в виде НМ рис. 5 *б* и т.д. В общем случае, $\max(\mu_{(0,0.25)}) = \max \mu_{(0.5,0.75)} =$ $= \mu_{(0,1)} \cdot 1/2$ и т.д.

Ранее отмечалось, что совокупность сжимающих отображений представляет собой систему итерируемых функций, главное назначение которой – построения фракталов. В общем случае СИФ – совокупность введенных (выше) отображений в месте с итерационной схемой. Однако следует иметь в виду, что результат применения СИФ, называемый *аттрактором*, не всегда является фракталом. Это может быть любой компакт, включая интервал или квадрат, в данном случае – это интервал.

Определение [6, 10] Отображения f: $\Im \to \Im$ – итерируемая система нечетких множеств (*IFZS*), если $f = (w_1; \ldots; w_N; \mu(w_1); \ldots; \mu(w_N))$. Каждое $w_i{:}\Im \to \Im$ – сжимающее отображение, каждое $\mu(w_i)$ возможность или величину нечеткой принадлежности, связанной с w_i. Для любого $u \in U^n$ выполняется $f([u]^\alpha) = \bigcup_{i=1}^N w_i([u]^\alpha)$, где $[u]^\alpha$ – α-уровневое множество u для $0 \le \alpha \le 1$. Отметим, что итерационная схема, используемая при анализе, имеет вид реализации процедуры последовательно вложенных компактных множеств (рис. 5), представляющих ФП для отдельных подинтервалов.

Основные результаты теории сжимающих отображений связаны с неподвижными точками таких отображений. Точка x называется неподвижной точкой отображения $f(x)$, если $f(x)=x$. Метод Ньютона нахождения нулей функции опирается именно на теорию неподвижной точки. Показано, что если $f(x)$ – непрерывная функция из $[a,b]$ в $[a,b]$ (не обязательно сжатие), то у нее есть неподвижная точка, совпадающая с точкой пересечения графиков $y=f(x)$ и $y=x$.

Теорема [7, 9]. Пусть $(\boldsymbol{X},d)$ – полное метрическое пространство $\boldsymbol{T:X\to X}$ – сжимающее отображение. Тогда отображение $T(x)$ имеет в точности одну неподвижную точку, т.е. существует такая точка $x_f\in\boldsymbol{X}$, что $T(x_f)=x_f$. Кроме того, метод итераций $x_n=T(x_{n-1})$, $n=1,2,\ldots$, где x_0 – произвольная точка из $\mathbf{X}$ сходится к неподвижной точке x_f, т.е. $x_f=\lim_{n\to\infty} x_n$.

Замечательным свойством алгоритмов, основанных на теории СИФ, является то, что их результат (аттрактор) не зависит от выбора начального множества E_0 или начальной точки x_0. В случае детерминированного алгоритма это означает, что в качестве E_0 можно взять любое компактное множество на плоскости, для НП выбор x_0 вне центра интервала приводит к тому, что имеем интервалы с разными весами (рис. 4 *б*). Основная задача теории СИФ – определить условия, при которых СИФ порождает предельное множество E_0.

Известно, что любое изображение (рисунок – цветной или серый) можно рассматривать как НМ [10]. Величина принадлежности $x\in(0,1]$, указывает возможность того, что точка x – на переднем плане образа (изображения). С каждым отображением сжатия w_i; $i=1;\ldots;N$ связан уровень (серый) отображения $\phi_i:I\to I$, где $I=[0;1]$ – область оттенков серого уровня. Набор отображений $\{w_i,\phi_i\}$ используют, чтобы определять оператор $T:U^n\to U^n$ (U^n – набор нормальных, верхних полунепрерывных членов $\Im$), который есть сжимающим с соответствующей метрикой δ на U^n. Эта метрика порождается расстоянием Хаусдорфа, определенным на наборе непустых компактных подмножеств $\overline{X}$. Стартуя с произвольного начального нечеткого множества $u_0\in Un$, последовательности $u_n\in U^n$ производимых итерацией $u_{n+1}=T(u_n)$ сходится в δ-метрике к уникальному инвариантному нечеткому множеству $v\in U^n$, где $T(v)=v$, представляющему неподвижную точку – компактное множество A как объединение своих собственных уменьшенных копий.

Отметим, что как видно из рис. 1, НМ в СИФ можно рассматривать как изображение (коллаж) со всеми вытекающими из этого положения следствиями.

Выводы

1. Теория НМ как аппарат решения задач управления в условиях неопределенности может быть рассмотрена с учетом следующих обстоятельств:

– мера порядка в условиях неопределенности может либо полностью отсутствовать, либо быть иной по сравнению с условиями определенности, в частности, эта мера может быть не архимедовой;

– функция принадлежности является продуктом мыслительной (ментальной) деятельности человека, нередко результатом интуитивного мышления, и должна анализироваться именно на этом уровне;

– любой объект в условиях неопределенности следует рассматривать как новый тип объектов, для которых в общем случае необходимо конструировать новые типы "величин" и новые метрики.

2. В теории нечетких множеств широко используется принцип максимина, который приводит к преобладающему использованию в нечеткой математике и логике операций $\max-\min$, это логически приводит к использованию в качестве 3-й аксиомы расстояния т.н. усиленного неравенства треугольника, $d(x,y)\le\max\,[d(x,z),d(z,y)]$, что логически вызывает необходимость анализа НМ в ультраметрике.

В ультраметрическом пространстве все треугольники являются *равнобедренными.* Если неопределенность имеет вид множества точек, то это пространство может быть разбито на несколько подпространств, каждое из которых содержит триплет; триплеты, в которых выполняется УНТ, могут рассматриваться как локальные ультраметрические пространства. В общем случае метрика таких пространств должна определятся с учетом топологии, в наихудшем случае следует применять метрику ультраметрического пространства. Это важный вывод для

ТНМ, так как дает возможность рассматривать только *одну* треугольную ФП.

3. Нечеткая переменная в 2-адическом базисе имеет вид дерева, ветвями которого есть: a^* {1 0 0 0 …...}, a^* {1 0 1 1 …...}, a^* {1 0 1 0 0 …...},... a^* {1 1 1 1 1 …...}, выражение в {....} есть 2-адическое число. Характерной особенностью ветвей является то, что все они имеют одинаковую 2-адическую оценку и 2-адический порядок. Это дает возможность использования 2-адической модели НП не только для выполнения нечеткой арифметики, но и для получения нечетких выводов, при условии использования в качестве антицидентов и консекантов (правило „если-то") 2-адической оценки и 2-адического порядка.

4. ФП α-уровневых п/множеств НМ представляют собой уменьшенные копии ФП исходного НМ, неподвижную точку – компактное множество A – является объединением своих собственных уменьшенных копий ФП исходного НМ, $A = \bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} w_i(\{\alpha[u]^{\alpha}\}_{i=1}^{N})$.

Список литературы

1. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.

2. *Хренников А.Ю.* Моделирование процессов мышления в p-адических системах координат. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 296 с.

3. *Владимиров В.С, Волович И.В., Зеленов Е.И.* (Vladimirov V.S., Volovich I.V., Zelenov E.I.) P-adic numbers in mathematical physics. – Singapoure: World Scientific Publ. – 1993.

4. *Коблиц Н.* *p*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции. Пер. с англ. В.В. Шокурова / Под ред. и с предисловием Ю.И. Манина. – М.: Мир, 1981. – 192 с.

5. *Хренников А.Ю.* Не-архимедов анализ и его приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 216 с.

6. Zardecki A. Fuzzy Fractals, Chaos, and Noise. Los Alamos National Laboratory, MS E541, Los Alamos, NM 87545,USA/Report. Conf-970693-1, LA-UR-97-778

7. *Макаренко Н.Г.* Стохастическая динамика, марковские модели и прогноз. В кн. «Научная сессия МИФИ – 2007». IX всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика – 2007»: лекции по нейроинформатике. Ч. 1. – М.: МИФИ, 2007. – С. 52–93.

8. *Федер Е.* Фракталы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.

9. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.

10. *Nadia M.G., AL-Sa'idi, Muhammad Rushdan Md. Sd., and Adil M. Ahmed.* IFS on the Multi-Fuzzy Fractal Space. World Academy of Science, Engineering and Technology 53 2009. – P. 822–828.

11. *Мінаєв Ю.М., Філімонова О.Ю., Вінник Д.М., Мінаєва Ю.І., Апонасенко Д.В.* Нечіткі множини в ультраметричному просторі // Проблеми управління та інформатизації: Зб. наук. пр. – К.: НАУ, – 2009. – Вип. 1(25). – С. 113–122.

Подано до редакції 06.04.2010