УДК 044.896:629.73.01(045)

Кудренко С.О.

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ВЕКТОРНИХ ГЕТЕРОГЕННИХ АЕРОКОСМІЧНИХ КОМПЛЕКСІВ

Інститут комп'ютерних технологій
Національного авіаційного університету

Розглянуто важливі для практичних застосувань властивості векторних гетерогенних вимірювань та ефективність підвищення точності за рахунок використання т надлишкових координат неортогонального базису, розглянуті основні положення і теореми теорії векторних гетерогенних вимірювань. Ефективність підвищення точності розраховувалася по індексному показнику зменшення середнє квадратичної погрішності

Вступ

В роботах [1 - 3] дано теоретичне обґрунтування оптимального управління обробкою сигналів в інтегрованих аерокосмічних комплексах зв'язку, навігації та спостереження, що все ширше застосовують в глобальних системах управління повітряним рухом, побудованих на *CNS/ATM conception*. Подальший розвиток отриманих в цих роботах результатів на векторні системи дозволяє проектувати оптимальні аерокосмічні комплекси, що мають потенційну ефективність.

Метою цієї роботи є узагальнення отриманих в роботах [1 - 3, 5 - 11] оптимальних рішень щодо комплексування скалярних гетерогенних вимірників на випадок векторних гетерогенних вимірювань.

Для досягнення мети ставляться та розв'язуються наступні задачі: розробляються нові поняття і концепції векторних гетерогенних вимірювань; розробляються критерії ефективності виконуються оцінки використання надлишковості в прямому і зворотному *ZG*-перетвореннях, що були запропоновані для розв'язання задач забезпечення надійності бортових систем автоматизованого управління польотом літальних апаратів Ігнатовим В.О. і Захаренковим В.В. [4]; розробляються математичні моделі і алгоритми векторних гетерогенних вимірювань і методи оптимального управління векторними гетерогенними вимірюваннями; виконується порівняльний аналіз ефективності різних оптимальних способів векторних гетерогенних вимірювань.

Постановка задачі

В ролі вихідних даних вибрані теоретичні результати, отримані в попередніх роботах. Методами функціонального аналізу, лінійної алгебри, лінеаризації та гаусовської апроксимації нелінійних функцій випадкових аргументів необхідно отримати оптимальні рішення для задач векторних гетерогенних вимірювань і дати порівняльну оцінку ефективності скалярних і векторних гетерогенних вимірювань, а також ефективності різних методів комплексування.

Рішення задачі

Введемо необхідні позначення і термінологію. Через Z_n позначимо вектор розмірності n з ортогональними декартовими координатами

$$Z_n = (Z_0 Z_1 Z_{n-1}),\ n = 0,1,\ldots,n-1, \quad (1)$$

де нумерація індексів координат векторів починається з нуля. Через

$$X_{n+m} = f_{n+m}(Z_n) = (X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots, X_{n+m}), \quad (2)$$

позначимо вектор розмірності $n+m$, де m – число надлишкових координат.

Будемо казати, що перетворення (2) породжує новий векторний розширений простір, кожний елемент якого несе в собі інформацію щодо усіх координат Z_k, $k=0,\ n$-1, ортогонального базису. При цьому будемо вважати результатом непрямих надлишкових вимірювань є вектор

$$Y_{n+m} = F_{n+m}\left[f_{n+m}\left(Z_n\right)\right] + \xi_{n+m}, \qquad (3)$$

де $\boldsymbol{F_{n+m}}$ – оператор векторних гетерогенних надлишкових вимірювань $\boldsymbol{\xi_{n+m}}$ – адитивний вектор погрішностей вимірювання.

Задача пошуку оптимальних оцінок $\boldsymbol{Z_{n\ opt}}$ полягає в тому, щоб по результатам спостереження за $\boldsymbol{Y_{n+m}}$ при відомих операторах $\boldsymbol{f_{n+m}}$, $\boldsymbol{F_{n+m}}$ і припущенні, що відомі числові характеристики багатомірного гаусівського розподілу $\boldsymbol{\xi_{n+m}}$

$$M[\xi_{n+m}] = 0; \quad D[\xi_{n+m}] = \sigma^2_{n+m}, \quad (4)$$

отримати оптимальні за критерієм максимальної правдоподібності оцінки $\boldsymbol{Z_{n\ opt}}$, оцінити мінімальні значення вектору дисперсій оцінок, визначити порівняльну ефективність векторних гетерогенних вимірювань щодо скалярних гетерогенних вимірювань, показати як впливає введення m надлишкових координат розширеного простору вимірювань на точність вимірювання координат ортогонального базису.

Виходячи з такої загальної постановки задачі, необхідно знайти оптимальні значення координат Z_i вектору Z_n, які доставляють мінімум сумі

$$S(Z_i, Y_k, \xi_k) = \sum_{k=0}^{n+m-1} \sum_{i=0}^{n-1} [\Psi_{ik}(Z_i) - Y_k]^2, \qquad (5)$$

де оператор зворотного перетворення $\Psi_{ik}(Z_i)$ є невідомим, а

$$Z_{iopt} = \arg\min S(Z_i, Y_k, \xi_k), \quad i = 0, \ldots, n-1. \quad (6)$$

Система рівнянь оптимізації Z_i у цьому загальному випадку має вигляд

$$\sum_{k=0}^{n+m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{ik}(Z_i) \frac{\partial \psi_{ik}(Z_i)}{\partial Z_i} = \sum_{k=0}^{n+m-1} \sum_{i=0}^{n-1} Y_k \frac{\partial \psi_{ik}(Z_i)}{\partial Z_i}, \quad (7)$$

і розв’язується за необхідної умови

$$\frac{\partial^2 S(Z_i, Y_k, \xi_k)}{\partial Z_i^2} > 0, \quad i = 0, n-1. \qquad (8)$$

Нерівність (8) є умовою того, що екстремум критерію оптимальності (5) буде мінімумом.

У вигляді нелінійної системи з n рівнянь оптимізації (7) за умови (8) задача на сьогодні ще не вирішена. Застосування методу Ритца до зворотного перетворення $\Psi_{ik}(Z_i)$ призводить до лінійної форми

$$\psi_{ik}(Z_i) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{ik} Z_i, \; k = 0 \ldots, n+m-1, \quad (9)$$

що не поліпшує розв’язання задачі, тому що коефіцієнти параметризації b_{ik} зворотного перетворення також є невідомими.

Задача у лінійному наближенні може бути розв’язана методом *ZG*-перетворень, який дозволяє в явному вигляді знайти якобіани прямого і зворотного *ZG*-перетворення [4].

Виберемо утворюючу матрицю $A_{(n+m)\times n}$ і виконаємо пряме *ZG*-перетворення у вигляді

$$X_{n+m} = A_{(n+m)\times n} Z_n. \qquad (10)$$

Тоді

$$Y_{n+m} = A_{(n+m)\times n} Z_n + \xi_{n+m}. \quad (11)$$

Зворотне *ZG*-перетворення будемо шукати у вигляді

$$Z_{nopt} = D_{n\times(n+m)} Y_{n+m}, \qquad (12)$$

де оптимальна псевдоматриця зворотного *ZG*-перетворення

$$D_{n\times(n+m)} = (BGA)^{-1} BG, \qquad (13)$$

де матриця $\boldsymbol{B}$ забезпечує існування зворотного перетворення (12), її елементи обираються за умови забезпечення мінімуму суми

$$S(b_{i,k}) = \sum_{k=0}^{n+m-1} \sum_{i=0}^{n-1} (Z_i - b_{i,k} Y_k)^2 \qquad (14)$$

і визначаються методом найменших квадратів, а матриця $\boldsymbol{G}$ реконфігурації системи (12) дозволяє вибирати структуру системи так, щоб існувало рішення і прогрес пошуку оптимального рішення мав властивість збігатися.

Таким чином, узагальнений алгоритм векторних гетерогенних вимірювань включає операції вибору утворюючої матриці $\boldsymbol{A}$, допоміжної псевдоматриці $\boldsymbol{B}$, вибір одного рішення з множини за допомогою матриці $\boldsymbol{G}$, обчислення оптимальної матриці $\boldsymbol{D}_{n\times(n+m)}$ і знаходження оптимального рішення $\boldsymbol{Z}_{n\ opt}$.

Для пояснення алгоритму оптимального оцінювання координат Z_0, Z_1 вектору $\boldsymbol{Z_2}$ по результатам вимірювань координат Y_0, Y_1, Y_2, вектору $\boldsymbol{Y_3}$ необхідно розглянути конкретний приклад векторних гетерогенних вимірювань.

Приклад. Припустимо, що $n=2$, $m=1$, тоді $i=0,1$, $k=0,1,2$ і задача може бути зручно проілюстрована векторною діаграмою рис. 1.

Система прямого ZG-перетворення має вигляд

$$\begin{aligned} X_0 &= Z_0\cos\alpha_0 + Z_1\sin\alpha_0 \\ X_1 &= Z_0\cos\alpha_1 + Z_1\sin\alpha_1\ , \\ X_2 &= Z_0\cos\alpha_2 + Z_1\sin\alpha_2 \end{aligned} \tag{15}$$

З аналізу системи (15) випливає дві необхідні умови для елементів матриці $A_{3\times2}$

$$A_{3\times2} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 & \sin\alpha_0 \\ \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

щоб усі елементи матриці були відмінні від нуля і щоб

$$\sum_{i=0}^{1} a_{ki}^2 = 1, \tag{17}$$

тобто щоб додавання надлишкової осі X_2 породжувало різноманіття рішень загальним числом рішень, що дорівнюється порядку упорядкованої множини рішень.

$$N_{n+m}^{n} = C_{n+m}^{n} = C_3^2 = \frac{3\cdot2}{1\cdot2} = 3\,. \tag{18}$$

Дія погрішності вимірювань ξ_0 показана у вигляді вектора $\boldsymbol{\xi_0}$ на рис. 1, що має синфазну ξ_{0c} та квадратурну ξ_{0k} компоненти. Квадратурна компонента викликає випадкову зміну кута α_0 на кут $\alpha_{0\xi}$, а синфазна компонента змінює довжину (модуль) вектора X_0. В результаті дії на X_0 погрішності кінець вектора зміщується з точки A в точку B і при зворотному перетворенні замість істинного значення Z_0 буде отримана оцінка Z_{01}, а замість істинного значення Z_1 отримана оцінка Z_{10}. Аналогічно погрішності вимірювань $\boldsymbol{\xi_1}$, $\boldsymbol{\xi_2}$ впливають на точність оцінювання Z_0, Z_1 по результатам спостережень Y_1, Y_2.

Використаємо метод найменших квадратів для оптимального оцінювання Z_0, Z_1 по результатам спостереження за Y_0, Y_1 Y_2. Складаємо суму квадратів у такому вигляді

$$S(Z_0, Z_1) = \sum_{k=O}^{2} (X_k(Z_0, Z_1) - Y_k)^2\ , \tag{19}$$

і діючі за стандартною схемою методу отримаємо систему з двох лінійних рівнянь оптимізації

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(Z_0, Z_k)}{\partial Z_0} &= 2\sum_{k=0}^{2}[x_k(Z_0, Z_k) - Y_k]\frac{\partial X_k(Z_0, Z_k)}{\partial Z_0} = 0 \\ \frac{\partial S(Z_0, Z_k)}{\partial Z_1} &= 2\sum_{k=0}^{2}[x_k(Z_0, Z_k) - Y_k]\frac{\partial X_k(Z_0, Z_k)}{\partial Z_1} = 0 \end{aligned}\ . \tag{20}$$

Врахуємо значення $X_k(Z_0, Z_1)$ з системи (15), отримаємо наступну лінійну систему рівнянь оптимізації значень Z_0, Z_1

$$\begin{aligned} Z_0\sum_{k=0}^{2}\cos^2\alpha_k + Z_1\sum_{k=0}^{2}\cos\alpha_k\sin\alpha_k &= \sum_{k=0}^{2} Y_k\cos\alpha_k \\ Z_0\sum_{k=0}^{2}\sin\alpha_k\cos\alpha_k + Z_1\sum_{k=0}^{2}\sin^2\alpha_k &= \sum_{k=0}^{2} Y_k\sin\alpha_k \end{aligned}\ . \tag{21}$$

Система рівнянь (21) є зворотнім ZG-перетворенням лінійного розширеного простору з неортогональними координатами Y_0, Y_1 Y_2 в лінійний простір ортогонального базису Z_0, Z_1. Матриця зворотного перетворення за МНК має вигляд

$$B1_2 = \begin{pmatrix} b1_{0,0} & b1_{0,1} \\ b1_{1,0} & b1_{1,1} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Вектор-стовпчик вільних членів

$$C1 = \begin{vmatrix} c1_0 \\ c1_1 \end{vmatrix}. \qquad (23)$$

Розв'язуючи систему за правилом Крамера, отримаємо оптимальні за МНК оцінки Z_0, Z_1

$$Z1_0 = \frac{\begin{pmatrix} c1_0 & b1_{0,1} \\ c1_1 & b1_{1,1} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b1_{0,0} & b1_{0,1} \\ b1_{1,0} & b1_{1,1} \end{pmatrix}} = \frac{c1_0\ b1_{1,1} - c1_1\ b1_{0,1}}{b1_{0,0}\ b1_{1,1} - b1_{1,0}\ b1_{0,1}},$$

$$Z1_1 = \frac{\begin{pmatrix} b1_{0,0} & c1_0 \\ b1_{1,0} & c1_1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b1_{0,0} & b1_{0,1} \\ b1_{1,0} & b1_{1,1} \end{pmatrix}} = \frac{b1_{0,0}\ c1_1 - b1_{1,0}\ c1_0}{b1_{0,0}\ b1_{1,1} - b1_{1,0}\ b1_{0,1}}. \qquad (24)$$

До цього моменту принципово новим було тільки те, що у векторних гетерогенних вимірюваннях замість двох використовується три вектори, кожен з яких містить інформацію щодо двох параметрів, що оцінюються. Завдання тепер полягає в тому, щоб показати, що дає введення надлишкового вимірювання Y_2 і чому звичайний МНК не дає найкращі оптимальні оцінки Z_0, Z_1.

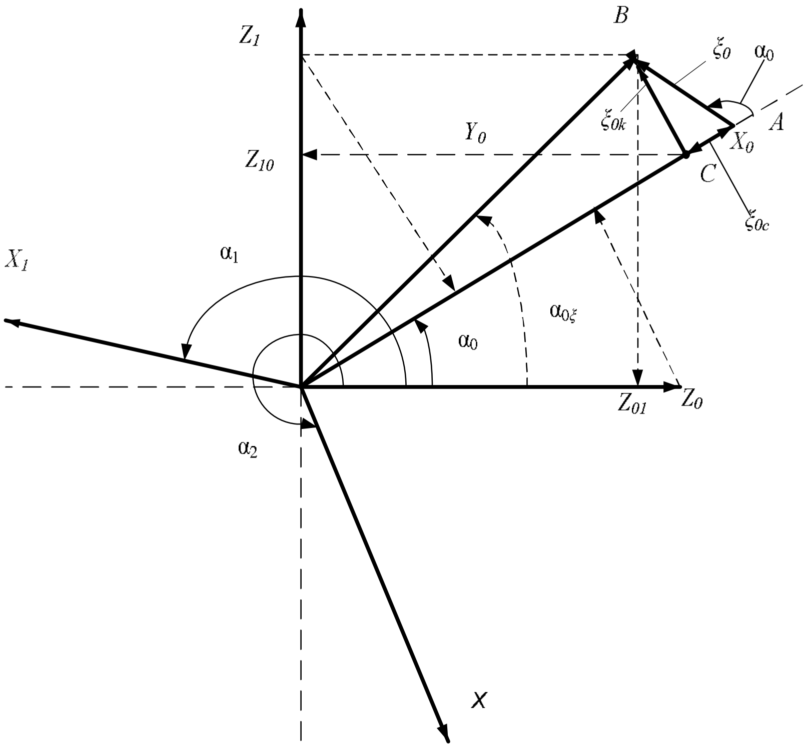

Рис. 1. Ілюстрація прямого *ZG*-перетворення при *n*=2, *n*+*m*=3

Інтуїтивно і за досвідом скалярних вимірювань оцінки звичайного МНК можливо поліпшити, якщо ввести вагові коефіцієнти в критерії (5), що враховують ймовірність відхилення X_k від Y_k, тобто використовувати модифікований критерій

$$S(Z_0, Z_1) = \sum_{k=0}^{2} g_k [X_k(Z_0, Z_1) - Y_k]^2, \qquad (25)$$

де для вагових коефіцієнтів g_k повинна бути справедлива умова нормування

$$\sum_{k=0}^{2} g_k = 1. \qquad (26)$$

Більш простим є пропонуємий нами спосіб використання матриці реконфігурації *G* таким чином, щоб отримати усі три рішення (24), знайти дисперсії оцінок для Z_0, Z_1 в усіх рішеннях і використати їх як і в скалярному випадку для визначення оптимальних вагових коефіцієнтів кожного рішення.

Схема обчислення оптимальних вагових коефіцієнтів рішень для координати

Z_0 приведена на рис. 2. Аналогічно розраховуються оптимальні вагові коефіцієнти $q_{k1,\,opt}$, k=0,2, для координати Z_1. Із схеми рис. 2 можна помітити, що введення третього надлишкового векторного вимірювання призводить до можливості вибирати оптимально вагові коефіцієнти для кожного рішення з множини розмірністю $N^n_{n+m} = C^n_{n+m}$.

В роботі розглянуто важливі для практичних застосувань властивості векторних гетерогенних вимірювань та ефективність підвищення точності за рахунок використання m надлишкових координат неортогонального базису, розглянуті основні положення теорії векторних гетерогенних вимірювань. Ефективність підвищення точності розраховувалася по індексному показнику зменшення середнє квадратичної погрішності. Результати розрахунків показані в табл. 1 і на рис. 3, 4.

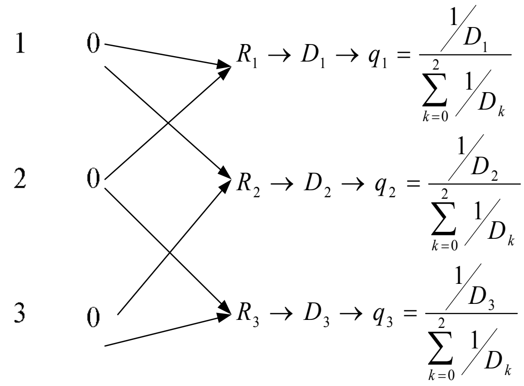

Рис. 2. Схема обчислення оптимальних вагових коефіцієнтів $q_{k0,\,opt}$ для координати Z_0

Таблиця 1. Значення індексного показника ефективності $W_n(n,m)$ векторних гомогенних вимірювань відносно скалярних гомогенних вимірювань

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,5	1,5	3	5	7,5	10,5	14	18	22,5	27,5	33
3 D	0,33	1,33	3,333	6,667	11,667	18,667	28	40	55	73,3	95,3
4 D	0,25	1,25	3,75	8,75	17,5	31,5	52,5	82,5	123,75	178,75	250,25
5	0,2	1,2	4,2	11,2	25,2	50,4	92,4	158,4	257,4	400,4	600,6

Висновки

В роботі узагальнені отримані в роботах [1 - 3] оптимальні рішення щодо комплексування скалярних гетерогенних вимірників на випадок векторних гетерогенних вимірювань. Введені нові поняття і розроблені концепції векторних гетерогенних вимірювань. Розроблені критерії ефективності і виконані оцінки використання надлишковості в прямому і зворотному ZG-перетвореннях. Розроблені математичні моделі і алгоритми векторних гетерогенних вимірювань і і запропоновані нові методи оптимального управління векторними гетерогенними вимірюваннями. Виконано порівняльний аналіз різних оптимальних способів обробки результатів векторних гетерогенних вимірювань.

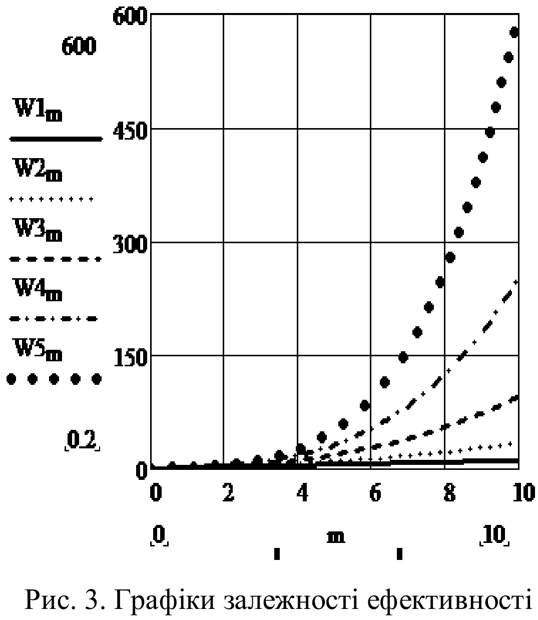

Рис. 3. Графіки залежності ефективності векторних гомогенних ZG комплексів при m=0,…,10

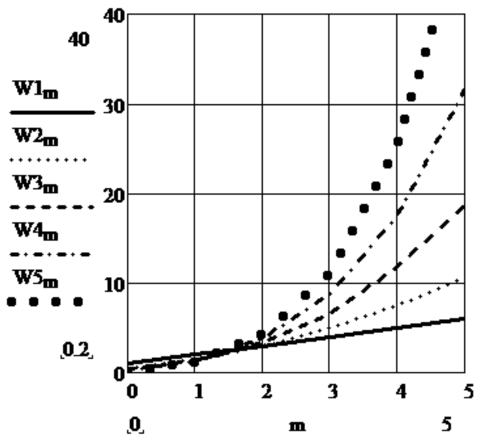

Рис. 4. Графіки залежності ефективності векторних гомогенных *ZG* комплексів при *m*=0,…,5

Список літератури

1. *Игнатов В.А.* Теоретическое обоснование оптимального управления обработкой сигналов в интегрированных аэрокосмических навигационных комплексах / Игнатов В.А., Кудренко С.А., Никулин В.И., Вельдяскина М.И. // Авиационно-космическая техника и технология. – Х.: НАКУ, 2007. – № 3 (39). – С. 66–71.

2. Необходимые условия для оптимального управления обработкой сигналов в интегрированных аэрокосмических навигационных системах. Ігнатов В.О., Кудренко С.О., Нікулін В.І., Нориця М.І. – Харьков, НАКУ. – Авиационно-космическая техника и технология, 2007. №4 (40) – С. 86–91.

3. Характеристические числа высокоточных структур структурно-избыточных информационно-измерительных комплексов из относительно неточных систем. Ігнатов В.О., Кудренко С.О., Нікулін В.І., Нориця М.І. –Харьков, НАКУ. – Авиационно-космическая техника и технология, 2007. №1(37). – С.40–44.

4. *Игнатов В.А.* Теория информации и передачи сигналов. Учебник для вузов. – М.: Радио и свіязь, 1991. – 2-е изд., перераб. и доп. – 280 с.

5. *Игнатов В.А., Захаренков В.В.* Мажоритарное устройство для выделения проекций векторной величины. А.С. СССР №782162. Б.И. СССР. №6. 1978.

6. *Игнатов В.А., Захаренков В.В.* Устройство выбора непрерывного сигнала по принципу большинства. А.С. СССР №828448. Б.И. СССР. №8. 1981.

7. *Кудренко С.О.* Potential efficiency of optimum heterogeneous informational measuring complexes / Кудренко С.О. // Збірник тез VIII Міжнар. наук. конф. студентів та молодих учених [«Політ»]. – К.: НАУ, 2005. – том 1. – С. 110.

8. *Кудренко С.О.* PVA parameters error estimation by onboard optimal complexes on CNS/ATM conception / Кудренко С.О., Нікулин В.І., Нориця М.І. // матеріали науково-технічної конференції студентів та молодих учених [«Наукоємні технології»]. – К.: НАУ, 2005. – С. 46.

9. *Кудренко С.О.* Optimal complexation aircraft automatic control systems on CNS/ATM conception / Кудренко С.О. // Інтегровані інформаційні технології та системи (ІІТС-2005): матеріали науково-практичної конференції молодих учених та аспірантів. – К.: НАУ, 2005. – С. 124–125.

10. *Кудренко С.О.* Recurrent equations of unequal accuracy measurement results processing optimum control / Кудренко С.О., Нікулин В.І. // Матеріали VII Міжнар. наук. конф. студентів та молодих учених [«Політ»] – К.: НАУ, 2005. – С. 456.

11. *Кудренко С.О., Аль Шаро Я.М.* Модели и алгоритмы диагностирования и реконфигурации функционально-избыточных систем // Інтегровані інтелектуальні робото-технічні комплекси (ІІРТК-2009) ІІ міжнародна конференція. – К.: НАУ, 2009. – С. 170–173.

12. *Аль Шаро Я.М.* Миноритарный принцип диагностирования функционально-избыточных систем на основе ***ZG*** –преобразования / Аль Шаро Я.М., Захаренков В.В., Игнатов В.А. Кудренко С.О. // Вісник інженерної академії України. – К.: НАУ, 2009. – №1. – С. 70–76.

Подано до редакції 25.05.10