УДК 519.218.82(043.2)

Ігнатов В.О., д-р техн. наук
Андреєв О.В.,
Андрєєв В.І., канд. техн. наук

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИГНАЛІВ НА ТЛІ ЗАВАД

Інститут комп’ютерних технологій Національного авіаційного університету

Запропоновано новий метод екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на тлі завад, який використовує два попередні дискретні значення сигналу, та по їх значенням виконує оптимальну екстраполяцію для третього моменту часу в майбутньому

Вступ

Завдання екстраполяції випадкових процесів займають центральне місце як в теорії випадкових процесів, так і в додатках цієї теорії до рішення практичних задач надійності, діагностування, контролю якості, обробки сигналів на тлі завад та інших задач. В даний час відносно непогано вирішені задачі екстраполяції випадкових стаціонарних процесів без завад, та екстраполяції цих процесів на тлі стаціонарних завад.

Недостатньо розробленими є задачі екстраполяції нестаціонарних випадкового нестаціонарного сигналу (ВНС) на тлі стаціонарних і нестаціонарних завад. В той же час саме ці задачі найбільш актуальні при контролі працездатності комп’ютерних мереж, обробці звукових сигналів на тлі завад, в інших технічних царинах.

Окремі відомі результати по екстраполяції ВНС на тлі завад мало застосовуються на практиці через свою складність. Тому мета цієї статті – розробити метод оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завад, в зручній для практичного використання формі.

В статті подається змістовна трактовка задачі екстраполяції ВНС на тлі завад, вводяться необхідні позначення і виводиться математична формулировка задачі, розглядаються особливості вибору моделі для екстраполюючого значення, а також критерії оптимізації. В ролі критерію використовується дисперсія похибки екстраполяції. Задача вирішується в простішій постановці: є два дискретні спостереження, по їх значенням необхідно передбачити третє. Вводиться умова нормування “вагових коефіцієнтів спостережень”, що дозволяє вирішити однопараметричну задачу оптимізації. Приводиться рішення оптимальної задачі екстраполяції класичним методом – прирівнюванню похідної від дисперсії похибки екстраполяції по параметру екстраполяції нулю.

Постановка задачі

Розглянемо класичну постановку задачі оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завади має наступний вигляд. Введемо такі основні позначення:
$X(t)$ – випадковий нестаціонарний сигнал, значення якого прогнозуються; $\xi(t)$ – випадкова завада, що спотворює дані спостережень; $Y(t)$ – випадковий сигнал, реалізація якого спостерігається; t_i, $i=1$, n – i-й момент спостереження; $Y(t_i)=Y_i$ – i-е значення $Y(t)$ в момент часу спостереження t_i; $Y_{n+1}-Y(t_{n+1})$ – значення $Y(t)$, що прогнозується (екстраполюється); $T=t_n-t_1$ – інтервал спостереження; $\tau=t_{n+1}-t_n$ – інтервал екстраполяції (прогнозу); $M[Y(t)]=m(t)$ – математичне сподівання $Y(t)$; $D[Y(t)]=M[Y(t)]-m(t)]^2$ – дисперсія $Y(t)$; $k(t_i,t_j)=M\{[Y(t_i)-m(t_i)][Y(t_j)-m(t_j)]\}$ – кореляційна функція $Y(t)$; $k_\xi(t_i,t_j)=$ $=M\{[\xi(t_i)-m_\xi][\xi(t_j)-m_\xi]\}$ – кореляційна функція завади $\xi(t)$; $M[\xi(t)]=m_\xi(t)$ – математичне сподівання завади $\xi(t)$.

На рис. 1 показані всі основні характеристики і параметри екстраполяції ВНС.

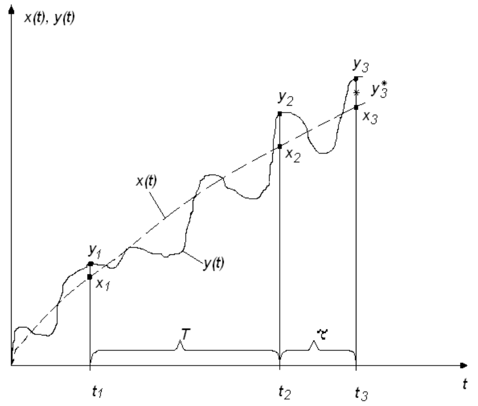

Рис. 1. Ілюстрація умов екстраполяції

Неважко помітити різницю X_{n+1} від Y_{n+1}, та вплив завади $\xi(t)$ на характеристики Y_{n+1}. Для спрощення на рис. 1 показано два спостереження $(n=2)$, в результаті спостереження отримують значення Y_1, Y_2 замість істинних значень X_1, X_2, по яким необхідно визначити X_3, але насправді оптимально спрогнозувати значення Y_3.

Задача екстраполяції полягає в тому, щоб у найкращий метод по значенням Y_1, Y_2, що екстраполюються, отримати оцінку Y_3^* майбутнього значення Y_3. З постановки задачі зрозуміло, що найкраща екстраполяція включає не тільки прогнозування Y_3, а й зменшення похибки спостережень

$$\varepsilon = Y_3^* - X_3 .$$

Для коректної постановки задачі введено такі припущення:

1. Сигнал, що спостерігається, розглядається як «адитивна суміш» сигналу $Y(t)$ і завади $\xi(t)$ [3]

$$Y(t) = X(t) + \xi(t) . \tag{1}$$

2. Оцінку Y_3^* істинного значення X_3 в момент часу t_3 розглядаємо як лінійну комбінацію (функцію) попередніх значень, що спостерігається

$$Y_3^* = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 . \tag{2}$$

3. Вважаємо, що параметри α_1, α_2 задовольняють вимозі нормування

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \tag{3}$$

тоді $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=1-\alpha$, а оцінка

$$Y_3^* = Y_2 + \alpha(Y_1 - Y_2) . \tag{4}$$

Оцінка Y_3^* по формулі (4) має наглядне фізичне пояснення: Y_2 – опорне значення, $\alpha(Y_1 - Y_2)$ – ”добавка”, яка є добутком різниці $\Delta Y_{12} = Y_1 - Y_2$ значень сигналу на інтервалі спостереження та параметру екстраполяції α.

4. Припускаємо, що завада $\xi(t)$ являє собою випадковий стаціонарний гаусовський сигнал з характеристиками

$$\begin{aligned} &M[\xi(t)] = m_\xi = 0, \\ &M[\xi(t_1), \xi(t_2)] = k_\xi(\Delta t), \end{aligned} \tag{5}$$

де $k_\xi(\Delta t)$ – кореляційна функція завади, що визначається за формулою

$$k_\xi(\Delta t) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\Delta t) , \tag{6}$$

де дисперсія (потужність) завади $\sigma_\xi^2 = D[\xi(t)]$, $r_\xi(\Delta t)$ – нормована кореляційна функція завади, інтервал часу $\Delta t = t_2 - t_1$.

5. Припускаємо, що математична модель $X(t)$ має вигляд:

$$X(t) = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i t^{\gamma_i} , \tag{7}$$

де $q=1$, детерміновані параметри задання нелінійності і нестаціонарності сигналу γ_0, γ_1 задовольняють умовам: $0 \le \gamma_0 \le 1$, $0 \le \gamma_1 \le 2$, а коефіцієнти a_0, a_1 являють собою випадкові незалежні величини, що мають гаусовські розподіли з такими, відповідно, математичними сподіваннями і дисперсіями:

$$\begin{aligned} &M(a_0) = m_0;\ D(a_0) = \sigma_0^2; \\ &M(a_1) = m_1;\ D(a_1) = \sigma_1^2. \end{aligned} \tag{8}$$

6. Для визначеності припускаємо, що $\gamma_0 = 0$, а $\gamma_1 = \gamma = 1/2$, тоді числові характеристики ВНС приймають такий конкретний вигляд:

$$M[X(t)] = m_0 + m_1\sqrt{t} = m(t), \qquad (9)$$

$$D[X(t)] = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t = \sigma^2(t), \qquad (10)$$

$$k_X(t_i, t_j) = M\{[X(t_i) - m(t_i)][X(t_j) - \\ - m(t_j)]\} = \sigma_0^2 + \sigma_1^2\sqrt{t_i, t_j}, \qquad (10)$$

де через t_i, t_j позначені i-й та j-й моменти спостережень.

7. Враховуємо те, що ВНС та завада є незалежними сигналами, тоді

$$M\{[X(t_i) - m(t_i)][\xi(t_j) - m_\xi]\} = 0. \qquad (12)$$

Якщо характеристики ВНС (9 - 11) та завади (6) відомі, припущення (1 - 7) виконуються, коректно ставимо задачу оптимізації оцінки (4) значення $X(t)$ в наступний момент часу t_{n+1} шляхом оптимального вибору параметру оптимізації α по відповідному критерію оптимізації.

Таким чином, для оптимізації оцінки Y_3^* необхідно вибрати критерій оптимізації та використати α як керовану змінну оптимізації.

Найбільш розповсюдженим і відповідаючим змісту цієї задачі є метод максимальної правдоподібності [3], який при обраних вхідних даних приводить до використання середньоквадратичного критерію методу найменших квадратів у .вигляді квадрату відстані між Y_3 та Y_3^* в евклідовому просторі:

$$D(\varepsilon) = M[(Y_3 - Y_3^*)^2]. \qquad (13)$$

За змістом критерій (13) є дисперсію похибки екстраполяції ε:

$$D_\varepsilon(\alpha) = M\{Y_3 - [Y_2 + \alpha(Y_1 - Y_2)]\}^2. \qquad (14)$$

Для розв'язання задачі оптимізації використовуємо класичний метод знаходження мінімуму функції однієї змінної. Беремо похідну від D_ε по α, та прирівнюємо її нулю, враховуємо те, що друга похідна більша нуля, вирішуємо отримане рівняння відносно α, отримуємо:

$$\alpha_{opt} = \frac{M[Y_2(Y_2 - Y_1)] - M[Y_3(Y_2 - Y)]}{M[(Y_2 - Y_1)^2]}. \qquad (15)$$

При обчисленні математичних очікувань в формулі (15) враховуємо наступні співвідношення для характеристик випадкових процесів:

$$M[Y_i] = m_0 + m_1 t_i^\gamma; \qquad (16)$$

$$D[Y(t_i)] = \sigma_{Y_i}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_i^2 t_i^{2\gamma} + \sigma_\xi^2; \qquad (17)$$

$$M[Y_i \cdot Y_j] = r_{ij} = m_i m_j + k_Y(t_i, t_j); \qquad (18)$$

$$M[Y_i^2] = m_i^2 + \sigma_Y^2; \qquad (19)$$

$$\sigma_{Y_i}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t_i^{2\gamma} + \sigma_\xi^2; \qquad (20)$$

$$k_y(t_i, t_j) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2\sqrt{t_i t_j} + \sigma_\xi^2 r_\xi(t_i - t_j). \qquad (21)$$

З урахуванням (16 - 21) в кінцевому результаті для α_{opt} отримуємо:

$$\begin{gathered} b = (m_{Y_2} - m_{Y_1})(m_{Y_2} - m_{Y_3}) + \sigma_{Y_2}^2 + \\ + k_Y(t_1, t_3) - k_Y(t_1, t_2) - k_Y(t_2, t_3); \\ c = (m_{Y_2} - m_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1, t_2); \\ \alpha_{opt} = \frac{b}{c}. \end{gathered} \qquad (22)$$

При оптимальному значенні параметра екстраполяції α_{opt} дисперсія похибки екстраполяції приймає мінімальне значення, яке визначаємо за наступною формулою:

$$\begin{gathered} D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min} = m_{Y_3}^2 + \sigma_{Y_3}^2 - 2\{\alpha_{opt}[m_{Y_1} m_{Y_3} + \\ + k_Y(t_1, t_3)] + (1 - \alpha_{opt})[m_{Y_2} m_{Y_3} + k_Y(t_2, t_3)]\} + \\ + [\alpha_{opt} m_{Y_1} + (1 - \alpha_{opt}) m_{Y_2}]^2 + \alpha_{opt}^2 \sigma_{Y_1}^2 + \\ + 2\alpha_{opt}(1 - \alpha_{opt}) k_Y(t_1, t_2) + (1 - \alpha_{opt})^2 \sigma_{Y_2}^2 \end{gathered} .(23)$$

На рис. 2 показана залежність $D_\varepsilon(\alpha)$ для одного з експериментів. Оптимальне рішення існує не при всіх початкових даних, тому треба уважно підходити до їх визначення.

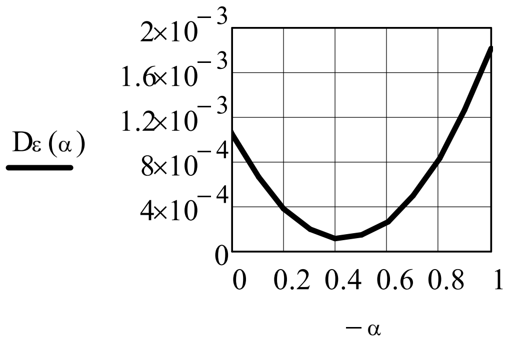

Рис. 2. Залежність $D_\varepsilon(\alpha) = f(\alpha)$ для різних значень α

Структура формули (23) стає вельми наглядною, якщо її представити у вигляді:

$$D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min} = M[Y_3^2] - 2M[Y_3 Y_3^*] + \\ + M[Y_3^{*2}] \quad . \quad (24)$$

Якщо кореляція Y_3 та Y_3^* є повною, тоді $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min} = 0$, тому що

$$M[Y_3^2] + M[Y_3^{*2}] = 2M[Y_3 Y_3^*] = \\ = 2M[Y_3^2] \quad . \quad (25)$$

Дисперсію оцінки Y_3^* отримуємо за формулою (4)

$$D[Y_3^*] = \alpha_{opt}^2 \sigma_{Y_1}^2 + (1-\alpha_{opt})^2 \sigma_{Y_2}^2 + \\ + 2\alpha_{opt}(1-\alpha_{opt}) k_Y(t_1, t_2) \quad . \quad (26)$$

Оцінку Y_3^* отримаємо у вигляді зваженої суми значень Y_1, Y_2, що спостерігаються, з оптимальними ваговими коефіцієнтами α_{opt} та $(1-\alpha_{opt})$, тому дисперсія оптимальної оцінки

$$D[Y_3^*] < D[Y_3] \, . \quad (27)$$

Нерівність (27) показує, що оптимальна екстраполяція дає меншу дисперсію оптимальної оцінки, ніж дисперсія очікуваного значення, що спостерігається. Цей висновок дуже важливий для практичних застосувань. З нього випливає, що оптимальна екстраполяція, якщо вона можлива, є дуже корисною тому, що суттєво підвищує точність оцінювання значень ВНС.

Ефективність оптимального способу екстраполяції пропонуємо оцінювати за наступними формулами системи оцінювання ефективності екстраполяції.

Відношення сигнал/шум на виході оптимального екстраполятора:

$$h_1 = \frac{D[Y_3]}{D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min}} \, , \quad (28)$$

де $D[Y_3]$ – дисперсія випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3, $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min}$ – мінімальна дисперсія похибки екстраполяції.

Відношення дисперсії випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3, до дисперсії екстрапольованого значення сигналу $D[Y_3^*]$

$$h_2 = \frac{D[Y_3]}{D[Y_3^*]} \, . \quad (29)$$

Відношення різниці між дисперсією випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3, та дисперсією екстрапольованого сигналу $D[Y_3^*]$ до мінімальної дисперсії похибки екстраполяції:

$$h_3 = \frac{D[Y_3] - D[Y_3^*]}{D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min}} \, . \quad (30)$$

Приклад. В цьому прикладі наведені результати експерименту, що був проведений методом цифрового статистичного імітаційного моделювання способу. Виконуємо оптимальну екстраполяцію значення Y_3^* по двом попереднім значенням Y_1, Y_2. Результати вимірювання X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 моделюємо реалізаціями випадкових величин за допомогою функції (31) системи *MathCAD* [2]

$$Y_i = rnorm\{n, M[Y], \sigma\} \\ i = 1,3 \quad , \quad (31)$$

де число n реалізацій для кожної точки вибрано $n = 1$, $M[Y_i]$ – математичне очікування ВНС, σ – середньоквадратичне відхилення спостерігаємого ВНС, яке обчислюються за формулою (17).

Для моделювання роботи способу була розроблена програма на мові системи *MathCAD*. Вона дозволяє використовувати різні вхідні дані експериментів і виконувати статистичні експерименти.

В експерименті були обрані наступні початкові дані :

$$t_1 = 6\,\text{с},\ t_2 = 10\,\text{с},\ t_3 = 12\,\text{с},$$

де t_1, t_2 – моменти часу, в які спостерігаються реалізації Y_1, Y_2 випадкового нестаціонарного сигналу (ВНС), t_3 – момент часу, для якого виконується екстраполяція; $\Delta\tau_\xi = 0{,}5\,\text{с}$ – інтервал кореляції завади; $\sigma_\xi = 0{,}01\,\text{В}$, $m_0 = 1\,\text{В}$, $m_1 = 0{,}1\,\text{В/с}$, $\sigma_0 = 0{,}1\,\text{В}$, $\sigma_1 = 0{,}01\,\text{В}$.

Реалізації Y_i утворюють за допомогою функції генерації випадкових чисел (33) з гаусовським розподілом при заданих n, $M[Y_i]$, σ. В експерименті задана точність моделювання "шість знаків після коми".

В табл. показано результати експерименту. На рис. 2 відображений графік $D_\varepsilon(\alpha) = f(\alpha)$ для різних значень α, а на рис. 3 відображені графіки $X(t)$, $Y(t)$ та $Z(t)$, де $Z(t)$ відображає Y_3^* на графіку.

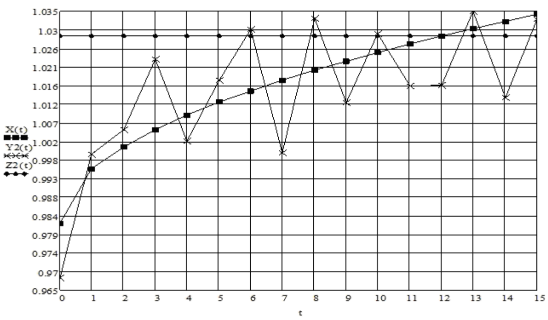

Рис. 3. Графік результатів експерименту

Таблиця. Результати експерименту

X_1	X_2	X_3
1,015018	1,024681	1,028772
Y_1	Y_2	Y_3
1,030483	1,029272	1,016351
Y_3^*	α_{opt}	$D[Y_3]$
1,028786	-0,40124	0,0113
$D[Y_3^*]$	$D_\varepsilon[\alpha_{opt}]_{\min}$	h_1
0,01136	0,0002	56,4905
h_2	ξ_1	ξ_2
0,994706	0,015465	0,004591
ξ_3	$D_\varepsilon(\alpha)_1$	α_1
-0,01242	0,001047	0
$D_\varepsilon(\alpha)_2$	α_2	$D_\varepsilon(\alpha)_3$
0,000121	-0,4	0,000837
α_3	$D_\varepsilon(\alpha)_4$	α_4
-0,8	0,001811	-1

Висновки

Аналіз результатів експерименту показує працездатність і високу ефективність способу навіть при низькому відношенню середньоквадратичних значень сигнал/шум: приблизно 3-4.

За результатами експерименту можна зробити такі висновки:

1) показник ефективності оптимальної екстраполяції h_1 показує, що оптимальна екстраполяція забезпечує достатньо високу точність – дисперсія похибки (шумів) екстраполяції в 56 разів менше дисперсії самого ВНС;

2) в результаті оптимальної екстраполяції значення Y_3^* для моменту часу t_3=12 с знаходиться ближче до X_3 ніж Y_3 (рис. 3); дисперсія $D[Y_3^*]$ оптимально екстрапольованого значення приблизно у h_2=0,99 разів більше, ніж дисперсія $D[Y_3]$ значення сигналу, що буде спостерігатися в t_3;

3) графік рис. 2 показує, що дисперсія $D_\varepsilon(\alpha_{opt})$ має мінімум при значенні α_{opt}.

Список літератури

1. Справочник по теории вероятности и математической статистике / *В.С. Королюк, Н.И. Петренко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин*. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 640 с.

2. *Дьяконов В.П.* Энциклопедия *MathCAD* 2001 и *MathCAD* 11. – М.: Изд. Солон-пресс, 2004. – 832 с.

3. *Игнатов В.А.* Теория информации и передачи сигналов. Учебник для вузов. 2-ое изд. Перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1990. – 280 с.

Подано до редакції 12.05.10