УДК 004.043

Гамаюн В.П., д-р техн. наук
Чайка М.П.

ОБРАХУНОК ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ В РОЗРЯДНО-ЛОГАРИФМІЧНІЙ АРИФМЕТИЦІ

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету

Розглянуто модель обрахунку елементарних функцій з використання розрядно-логарифмічної арифметики, яка забезпечує обробку у великому діапазоні чисел та значне зменшення впливу округлення. Запропоновано метод обрахунку елементарних функцій з заданою точністю, основою якого є апарат ланцюгових дробів з використанням розрядно-логарифмічної арифметики

Вступ

В процесі вирішення багатьох практичних задач необхідно досліджувати функціональні залежності між величинами, які можна описати наближено або точно з використанням елементарних функцій. Необхідно відмітити, що обрахунок елементарних функцій займає значну частину часу розв'язання всієї задачі на ЕОМ та потребує точності отриманих обрахунків. Вимога до високої точності ЕОМ набуває особливого значення при вирішенні класу погано обумовлених задач, де не допускається накопичення помилок округлення. Вказаний факт вимагає пошуку нових методів обробки чисел, в тому числі і при обчисленні елементарних функцій.

Постановка проблеми

Методи обробки можуть базуватися на нових методах представлення даних, що можуть бути реалізовані через відповідні арифметики. Такі комп'ютерні арифметики мають за мету забезпечити розв'язання задач чутливих до похибок обчислень в комп'ютерному середовищі. Проблема, що досліджується є апарат ланцюгових дробів, який раніше не використовувався через вплив похибок при використанні традиційних комп'ютерних арифметик. В роботі представлені результати досліджень обрахунку елементарних функцій при застосуванні розрядно-логарифмічної арифметики.

Методика досліджень

В якості перспективної комп'ютерної арифметики для розв'язання поставленої проблеми було обрано розрядно-логарифмічну арифметику. Розрядно-логарифмічна арифметика є розширенням двійкової системи числення за умов кодування кожного ненульового розряду двійкового операнду [1]. Такий код дорівнює значенню логарифму від ваги цього ненульового розряду:

$$N_i = \log_2 a^i p^i .$$

Нехай A – двійкове число з розрядністю n представлене у форматі з фіксованою комою:

$$A = \sum_i a_i p^i ,$$

де a_i={0,1}, p=2 – основа системи числення.

Кожен не нульовий розряд a_i, представляється у вигляді номеру позиції (розряду) N_i:

$$A \to A_N = \{N_n, \dots, N_2, N_1\} .$$

Так наприклад, якщо число представлене в двійковій арифметиці – 1110001101_2, то в розрядно-логарифмічній арифметиці дане число матиме вигляд – 9.8.7.3.2.0.

Крім цього розрядно-логарифмічна арифметика забезпечує розширення діапазону представлення чисел, що особливо важливо при обрахунку даних, де точність є критичною характеристикою. В табл. 1 представлена порівняльна характеристика двійкової та розрядно-логарифмічної арифметики по діапазону даних [2].

Таблиця. 1. Діапазони даних в двійковій та розрядно-логарифмічній арифметиці

Розрядність двійкового коду	Діапазон двійкових чисел	Розрядність числа в розрядно-логарифмічній арифметиці	Діапазон чисел в розрядно-логарифмічній арифметиці
4	$2^{-3} \le A \le 2^{+3}$	16	$2^{-7} \le A \le 2^{+7}$
8	$2^{-7} \le A \le 2^{+7}$	256	$2^{-127} \le A \le 2^{+127}$
16	$2^{-15} \le A \le 2^{+15}$	65536	$2^{-32767} \le A \le 2^{+32767}$
32	$2^{-31} \le A \le 2^{+31}$	4294967296	$2^{-2147483647} \le A \le 2^{+2147483647}$

Під елементарною функцію зазвичай розуміють функцію одного аргументу $y=f(x)$, що включає в себе кінцеву кількість арифметичних операцій, які виконуються над аргументом залежної змінною та деякими константами [3]. Елементарні функції звичайно ділять на алгебраїчні, які можливо задати за допомогою алгебраїчних виразів, та трансцендентні. Основними методами для обрахунку елементарних функцій на ЕОМ є [4]:

1) степеневі розкладання;
2) многочленні наближення;
3) раціональні наближення;
4) розкладання в ланцюгові дроби;
5) використання ітеративних процесів.

Вибір метода обрахунку елементарних функцій на ЕОМ залежить від важливих характеристик ЕОМ, таких як швидкодія, розрядності, форми представлення чисел та ін. Останнім часом найбільше розповсюдження набули алгоритми, що використовують многочленну апроксимацію. В ЕОМ, що працюють з довільною розрядністю, спеціалізовані та проблемно-орієнтовані, широко використовують алгоритми, що базуються на ітеративних процесах. В зв'язку з зменшенням часу між виконанням часу множення та ділення також широке розповсюдження отримали алгоритми, що базуються на раціональній апроксимації.

Для обчислення елементарних функцій на ЕОМ можливо використання раціональних наближень, що потребують меншу кількість операцій обрахунку для отримання необхідної точності ніж інші методи. Раціональне наближення деякої функції або числа можна представити у вигляді кінцевого або безкінечного ланцюгового дробу [5].

Ланцюговим, або неприливним, дробом називається вираз [5]:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cfrac{a_k}{b_k}}}}},$$

де a_k/b_k – k-те ланка ланцюгового дробу; b_0 – нульова ланка; a_i – часткові чисельники; b_i – часткові знаменники (i=1,2,…).

Для ланцюгового дробу використовуються також скорочений запис, запропонований Роджерсом [6]:

$$\mathrm{b}_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k}{b_k}.$$

Дріб, обмежений ланкою a_n/b_n, називається n підходящим ланцюговим дробом:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \mathrm{b}_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_\mathrm{n}}{b_n}.$$

Чисельник та знаменник підходящого дробу також можна обрахувати використовуючи рекурентну формулу Ейлера :

$$\begin{gathered} \mathrm{p}_{-1} = 1, p_0 = a_0, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{gathered}.$$

Більшість елементарних функцій можливо представити у вигляді ланцюгових дробів [3], наприклад:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \ldots -$$
$$- \frac{x}{2} + \frac{x}{2m+1} - \ldots,\ m = 1,2,\ldots,$$

$$(1+x)^x = 1 + \frac{nx}{1} + \frac{(1-n)x}{2} + \frac{(1+3)x}{3} + \ldots +$$
$$+ \frac{(m-n)x}{2} + \frac{(m+n)x}{2m+1} + \ldots,\ m = 1,2,\ldots,$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \ldots -$$
$$- \frac{mx}{2} + \frac{mx}{2m+1} + \ldots,\ m = 1,2,\ldots .$$

Так одним із самих найпоширеніших методів обрахунку елементарних функцій є розкладання в степеневі ряди, ряди Тейлора, які дають найкращі наближення в необхідній точці. Так функція $y = e^x$ представлена у вигляді [5]:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Однак зазначимо, що необхідність обрахунку факторіалів потребує значних ресурсів ЕОМ, що в кінцевому результаті призводить до значного часу обчислень, та можливого переповнення розрядної сітки. Ці недоліки відсутні в апараті ланцюгових дробів, якщо реалізувати їх з використанням розрядно-логарифмічної арифметики. Використання рекурентної формули Ейлера для обрахунку чисельника та знаменника підходящого дробу дає можливість оперувати під час обрахунку лише з цілими числами і лише на останньому n-му кроці діленням чисельника на знаменник отримати значення функції. Це значно прискорює обчислення функції за рахунок зменшення кількості операцій ділення та обчислення такий складних функцій, як факторіал, що використовується, наприклад, в степеневих розкладаннях (ряди Тейлора). Але в той же час потребує достатнього діапазону представлення чисел для зберігання значень чисельника і знаменника та значення самої функції, що забезпечується використанням розрядно-логарифмічної арифметики. Необхідно відмітити можливість паралельного обчислення значень чисельника та знаменника підходящого дробу, що особливо привабливо при наявності навіть у серійній обчислювальній техніці багатоядерних *CPU*.

Також однією із переваг використання апарату ланцюгових дробів є значно швидше наближення до необхідної точки ніж, наприклад, рядів Тейлора, що потребує обрахунку меншого числа членів ряду (дробу) для отримання значення функції з необхідною точністю табл. 2.

Таблиця 2. Результати обрахунку $y = e^x$ з різною точністю

Кіл-ть членів ряду (n)	Ряд Тейлора		Ланцюговий дріб	
	Значення ряду	Кіл-ть вірних цифр (N)	Значення дробу	Кіл-ть вірних цифр (N)
1	1	0	1	0
2	2	1	3	0
3	2,5	1	2,714 285 714 285 71	3
4	2,666 666 666 666 67	1	2,718 309 859 154 93	4
5	2,708 333 333 333 33	2	2,718 281 718 281 71	7
6	2,716 666 666 666 67	3	2,718 281 828 735 69	10
7	2,718 055 555 555 56	4	2,718 281 828 458 56	12
8	2,718 253 968 253 97	5	2,718 281 828 459 045	16
9	2,718 278 769 841 27	5	2,718 281 828 459 045 234 757	18
10	2,718 281 525 573 19	7	2,718 281 828 459 045 235 360 753	22

З наведених даних можна зробити висновок, що для отримання значення функції $y=e^x$ з N-ю кількістю вірних знаків необхідно обрахувати n_T для ряду Тейлора та n_D для ланцюгового дробу, тоді:

$$n_T \approx]N \cdot 2 + 2[,$$

$$n_D \approx]N / 2 + 1[.$$

Отже при використанні апарату ланцюгових дробів необхідно обраховувати значно меншу кількість членів ряду (ланцюгів) порівняно з рядами Тейлора:

$$\frac{n_T}{n_D} \approx \frac{]N \cdot 2 + 2[}{]N / 2 + 1[} \approx 4 .$$

Під час обрахунку проміжних та кінцевих результатів виникають похибки представлення та обробки числових даних в ЕОМ представлених в форматі *IEEE* 754 [7], що призводить до отримання не точних, а бо зовсім невірних результатів обрахунку. Тому для забезпечення необхідної точності представлення та обробки даних в широкому діапазоні використовується розрядно-логарифмічна арифметика. В табл. 3 - 5 представлено обчислення чисельника та знаменника підходящого дробу рекурентною формулою Ейлера з використанням чисел з фіксованою та плаваючою комою (32 біти), та в розрядно-логарифмічній арифметиці. Вже починаючи з 10-ї ланки при використанні чисел з фіксованою комою та з 13-ї при використанні чисел з плаваючою комою з'являються похибки обчислення та представлення даних, що призводить до отримання невірного результату.

Таблиця 3. Розрахунок чисельника та знаменника підходящого дробу

Кіл-ть ланок (n)	Числа з фіксованою комою			
	p		q	
	p	Δ	q	Δ
1	1	0	1	0
2	3	0	1	0
3	19	0	7	0
4	193	0	71	0
…				
9	848456353	0	312129649	0
10	-1189009341	30064771072	2032864497	8589934592

Таблиця 4. Розрахунок чисельника та знаменника підходящого дробу

Кіл-ть ланок (n)	Числа з плаваючою комою			
	p		q	
	p	Δ	q	Δ
1	1	0	1	0
2	3	0	1	0
3	19	0	7	0
4	193	0	71	0
…				
12	46150226651233	0	16977719590391	0
13	2124008553358849	1	781379079653017	0
14	106246577894593680	320	39085931702241240	-40

Таблиця 5. Розрахунок чисельника та знаменника підходящого дробу

Кіл-ть ланок (n)	Розряно-логарифмічна арифметика			
	p		q	
	p	Δ	q	Δ
1	1	0	1	0
2	3	0	1	0

продовження табл. 5.

3	19	0	7	0
4	193	0	71	0
…				
12	46150226651233	0	16977719590391	0
13	2124008553358850	0	781379079653017	0
14	106246577894594000	0	39085931702241200	0

Для оцінки ефективності обчислення елементарних функцій в розрядно-логарифмічній арифметиці проведемо моделювання обрахунку функції $y=e^x$ з необхідною точністю. Для моделювання використовувалась раніше написана бібліотека на мові *C*++. Перевантаження базових операцій (+, - , * , /) дало можливість оперувати на етапі проектування моделі звичним математичним апаратом над класом, що представляє розрядно-логарифмічне число. Результати дослідження представлені в рис. 1.

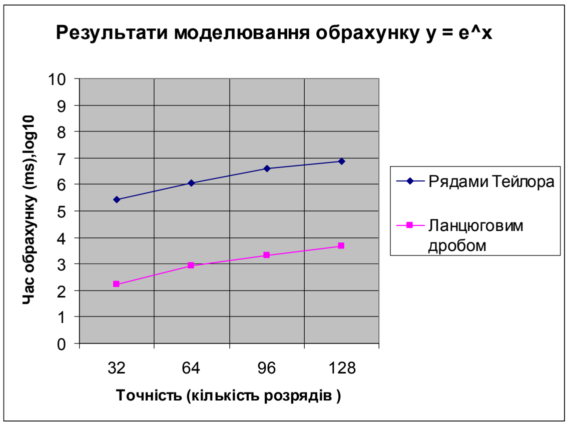

Рис. 1. Результати моделювання обрахунку функції $y=e^x$ з необхідною точністю

Висновки

Таким чином, в результаті досліджень запропоновано метод обрахунку елементарних функцій в розряно-логарифмічній системі з необхідною точністю ланцюговими дробами, та експериментально підтверджено ефективність його використання в порівнянні з степеневими рядами та можливість використання даної методики для побудови універсального програмно-апаратного комплексу високоточних обрахунків.

Список літератури

1. *Гамаюн В.П.* Разрядно-логарифмическая арифметика, Методы и алгоритмы. – К.: Книжное издательство НАУ, 2007. – 272 с.

2. *Гамаюн В.П.* Моделювання багаторозрядних комп'ютерних систем: Навч. посіб. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 112 с.

3. *Благовещенский Ю.В., Теслер Г.С.* Вычисление элементарных функций на ЭВМ. – К.: Издательство «Техника», 1977. – 208 с.

4. *Байков В.Д., Смолов В.Б.* Аппаратурная реализация элементарных функций в ЦВМ. – Л.: Изд-во Ленингр. унив-та, 1975. – 96 с.

5. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 112 с.

6. *Хованский А.Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Государственное издательство технико-теоритической литературы, 1956. – 206 с.

7. IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic (IEEE 754) .

Подано до редакції 19.04.10