УДК 532.529

Буйвол В.М., д-р фіз.-мат. наук
Фоміна Н.Б.

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ДОСЛІДЖЕНІ ТОНКИХ КАВЕРН

**Інститут комп'ютерних технологій
Національного авіаційного університету**

Досліджено вплив на тонку просторову вертикальну каверну за осесиметричним тілом реальних властивостей рідини, зокрема капілярності, в'язкості та тяжіння. Застосована енергетична концепція кавітаційних течій. Розрахунки виконані за допомогою прикладного пакету MathCad. Отримані графіки ілюструють залежність форми і основних параметрів каверни від чисел кавітації, Фруда, Вебера і Рейнольдса

Вступ

Процес входу тіла в воду з великою швидкістю дуже складний. Після перетину вільної поверхні тіло засмоктує за собою частину повітря і за ним утворюється незамкнена поверхня, верхні частини якої змикаються на деякій глибині. Після такого глибинного змикання каверни тіло рухається далі разом з приєднаною до нього каверною Саме такий рух, коли вже впливом вільної поверхні рідини можна знехтувати, є предметом цієї статті.

Задача про форму тонкої просторової каверни у важкій рідині вперше ставилась Г.В. Логвиновичем [1]. Пізніше просторова вертикальна каверна у важкій рідині досліджувалась в роботах [2 - 4] та деяких ін. Роботи [2, 3] фактично розвивали ідеї Логвиновича і базувались на енергетичній концепції. І тільки в роботах [4, 9], уточнюючи і узагальнюючи ідеї робіт С.С. Григоряна і Ю.Л. Якимова (посилання на їх роботи можна знайти в [2 - 4]), задача була коректно поставлена в рамках лінеаризованої теорії тонкого тіла з урахуванням особливостей течії на початковій стадії утворення каверни. Проте, як виявилося, на основі енергетичного підходу можна побудувати цілком прийнятний, але більш простий розв'язок задачі, узагальнений на дію поля сил тяжіння, поверхневого натягу і в'язкості.

Постановка задачі

Будемо розглядати течію, яка формується навколо каверни, що виникає при вертикальному зануренні з великою швидкістю V_0 тіла в рідину, яка наділена властивостями вагомості, в'язкості та капілярності. В загальному випадку, якщо зовнішні сили мають потенціал ($\vec{F} = -\nabla U$), така течія описується рівнянням Нав'є-Стокса [5]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + rot\,\vec{v} \times \vec{v} = -\nabla\left(\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\vec{v},$$

де $\vec{v}$ – вектор швидкості, p – тиск, ρ – густина рідини, ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості (в системі *СІ* вимірюється у стоксах: 1 стокс=10^{-4}м^2/сек), ∇ – оператор Гамільтона. При достатньо малих числах кавітації така каверна буде досить видовженою і можна очікувати, що основне значення має осесиметрична течія в площині, перпендикулярній до осі каверни. Така модель течії нагадує поршневу теорію Іллюшина-Болотіна в газодинаміці. Якщо припускати, що рідина нестислива ($div\vec{v} = 0$), то видно, що характеристики в'язкості в рівняння не входять, а за умови, що течія потенціальна ($\vec{v} = \nabla\varphi$), рівняння Нав'є-Стокса перетворюється в інтеграл Лагранжа-Коші

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} = \frac{p_\infty - (p + \rho g X)}{\rho}, \qquad (1)$$

де p_∞ – тиск в рідині на рівні центра кавітатора в нескінченно віддаленій точці, а $X = const$ – еквіпотенціальна площина.

Розв'язок задачі

Рівняння форми тонких вертикальних каверн можна отримати з основних рівнянь гідродинаміки тонкого тіла [2, 3]. Якщо ввести циліндричну систему координат O,x,r,ϑ, початок якої знаходиться в площині спостережень $x=\text{const}$, а вісь Ox направлена вздовж лінії дії сили тяжіння, то для тонкої видовженої каверни можна отримати диференціальне рівняння

$$\mu\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2}+\sigma_0-\frac{2t}{Fr_L^2}=0\,. \qquad (2)$$

Тут розмірні величини віднесені до L_k – *половина довжини* каверни в невагомій рідині, число Фруда $Fr_L=\dfrac{V_0}{\sqrt{gL_k}}$, а $\mu=\ln\psi(\varepsilon)$ – не визначений коефіцієнт, залежний від відношення $\varepsilon=\dfrac{R_k}{L_k}$, ($R_k$ – максимальний радіус каверни).

Біркгоф і Луміс [6] ще в 1945 р. на основі енергетичного підходу отримали схоже (без урахування сили тяжіння) рівняння. подібне до якого пізніше отримав В.В. Серебряков [3]. Але ці рівняння, як і рівняння (2), мали в своїй структурі невизначену величину μ, яку, проте, можна визначити, якщо скористатися деякими експериментальними даними. Рівняння першого наближення Нестерука [4] (при протилежному напрямі руху) мають таку саму структуру і в своєму складі не мають невизначеного коефіцієнта. В якості такого коефіцієнта у рівнянні Нестерука виступає множник $\ln\varepsilon$, який можна визначити методом послідовних наближень. Для величини "тонкості" каверни ε автор отримав рівняння, яке пов'язує її з числом кавітації: $-8\varepsilon\ln\varepsilon=\sigma$. Така залежність $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ не дає можливості прямого розв'язку задачі і вимагає ітеративного процесу.

Тому далі ми будемо розв'язувати задачу типу задачі Біркгофа-Луміса-Серебрякова з урахуванням трьох вказаних сил. Використавши умови

$$R(0)=R(L)=R_{\text{н}},$$

$$\left.\frac{dR^2}{dt}\right|_{t=0}=cR_{\text{н}},\ \text{де}\ c=2\sqrt{2\mu c_x}$$

з рівняння (2) отримуємо

$$R^2(t)=1+t\sqrt{\frac{2c_x}{k\mu}}-\frac{\sigma_0 t^2}{2\mu}+\frac{t^3}{6\mu Fr^2}\,. \qquad (4)$$

Фактично це є розв'язок дещо узагальненої моделі каверни Рябушинського.

При переважно радіальному характері течії, як це має місце у нашому випадку, компоненти тензора напружень p_{rr}, $p_{\vartheta\vartheta}$, тиск p, який завжди діє по нормалям до відповідних площадок, і радіальна швидкість v_r пов'язані співвідношеннями [7] $p_{rr}=-p+2\rho\nu\dfrac{\partial v_r}{\partial r}$, $p_{\vartheta\vartheta}=p$. Радіальна складова швидкості в такій течії визначається формулою $v_r=\dfrac{R\dot{R}}{r}$, згідно з якою радіальна компонента тензора напружень, пов'язана з дією в'язких сил, набуває вигляду $p_\mu=-2\rho\nu\dfrac{\dot{R}}{R}$.

Дія сили поверхневого натягу залежить від кривизни поверхні каверни і ця дія еквівалентна появі додаткового тиску на стінки каверни $p_\tau=-2\tau H$, де τ – коефіцієнт поверхневого натягу, а H – середня кривизна поверхні. Якщо враховується також і поле сили тяжіння, то його дія виявляється еквівалентною появі тиску $p_g=\rho gX$. Таким чином, врахування дії сил в'язкості, поверхневого натягу і тяжіння приводить до того, що тиск на стінки каверни має обчислюватися за формулою

$$\sigma=\frac{p_\infty-(p_i+\rho gX-2\tau H-2\rho\nu\dot{R}/R)}{0{,}5\rho V_0^2}\,.$$

Процес занурення каверни в рідину (у площині спостережень $x=const$) у цьому разі замість рівняння (2) буде описуватися рівнянням

$$\mu\frac{d^2R^2}{dt^2}+$$

$$+\pi\left(\sigma_0-\frac{t}{Fr^2}+\frac{8}{WeR}+\frac{8}{\mathrm{Re}}\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)=0$$

$$We=\frac{\rho V_0^2 d_i}{\tau},\ \ \mathrm{Re}=\frac{V_0 d_i}{\nu}. \qquad (5)$$

Рівняння (5) можна розв’язати методом послідовних наближень. Спершу вважаємо, що $We=\mathrm{Re}\to\infty$, тоді рівняння має розв’язок (4). Зауважимо, що тут лінійні величини віднесені до радіуса R_{i} перетину зриву, а час – до швидкості V_0, тобто $\overline{R}=\dfrac{R}{R_{\mathrm{i}}}, \bar{t}=\dfrac{V_0 t}{R_{\mathrm{i}}}$, проте, заради простоти, риски над символами опущені. Звідси, до речі, видно, що "час" $\bar{t}=\dfrac{x}{R_i}=\bar{x}$ фактично є відносною координатою вздовж осі Ox, пов’язаної з центром кавітатора і направленої проти руху каверни.

Оскільки величина μ теоретично не визначена, то для її обчислення Гарабедян [4], наприклад, запропонував формулу $\mu=-\sqrt{\dfrac{\sigma}{-4\ln\sigma}}$. У всякому разі для кожного значення числа кавітації можна

знайти відповідне значення величини μ за формулою Гарабедяна або Нестерука.

З рівняння (4) при $R(x_l)=R(0)$ отримуємо вираз для довжини каверни

$$x_l=\frac{3}{2}\sigma_0 Fr^2\left(1-\sqrt{1-\frac{4c}{3\sigma_0^2 Fr^2}}\right).$$

Зрозуміло, що має виконуватися нерівність $\dfrac{4c}{3\sigma_0^2 Fr^2}<1$. Поклавши $\dfrac{dR}{dt}=0$, знайдемо координату максимального радіуса каверни

$$x_k=\sigma_0 Fr^2\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{\sigma_0^2 Fr^2}}\right),$$

де знову має виконуватися нерівність $\dfrac{c}{\sigma_0^2 Fr^2}<1$. Тобто каверна буде існувати, якщо $\dfrac{4c}{3\sigma_0^2 Fr^2}<1$, оскільки друга нерівність тоді виконується автоматично. Крім цієї основної умови ще потрібно, щоб координата t задовольняла нерівність: $1+t+\dfrac{t^3}{12Fr^2}\geq\dfrac{\sigma_0 t^2}{4}$, тобто, щоб підкореневий вираз у формулі для $R(t)$ не був від’ємним. Ці дві умови забезпечують існування каверни.

Маючи формулу для координати міделя, можна знайти і формулу для радіуса самого міделя

$$B=\left[1-\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{c}{\sigma_0^2 Fr^2}}-m(\sigma,Fr)\right],$$

$$R_k=\sqrt{1+\frac{c\sigma_0 Fr^2}{2\mu}B},$$

$$m(\sigma,Fr)=\frac{2\sigma_0^2 Fr^2}{3c}\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{\sigma_0^2 Fr^2}}\right).$$

Аналіз результатів

Якщо врахувати, що для кавітатора-диска $c_x\approx 0{,}82(1+\sigma_0)$, а також $\mu\approx 2$, то при малих числах кавітації можна покласти $c\approx 4$ і тоді матимемо таке рівняння для радіуса каверни

$$R^2(t)=1+t-\frac{\sigma_0 t^2}{4}+\frac{t^3}{12Fr^2}. \qquad (6)$$

Без врахування сили тяжіння радіус осесиметричної каверни описується рівнянням

$$R^2(t)=1+t-\frac{\sigma_0 t^2}{4},\ R=\sqrt{1+t-\frac{\sigma_0 t^2}{4}}.$$

Це рівняння еліпса

$$4\sigma R^2+\sigma^2\left(t-\frac{2}{\sigma}\right)^2=4(1+\sigma),$$

з півосями

$$R_k=\sqrt{\frac{1+\sigma}{\sigma}},\ L_k=\frac{2\sqrt{1+\sigma}}{\sigma}.$$

При збільшенні числа Фруда каверна змінюється поволі, і тільки при

$Fr = 500$ сила тяжіння вже не впливає на розміри каверни, хоча практично цей вплив малий уже при $Fr > 100$.

На рис. 1 показані форми поздовжніх перетинів вертикальних

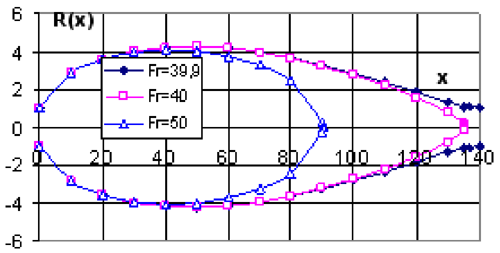

Рис. 1. Каверни при зануренні (σ=0,06)

каверн при зануренні в течії з числом кавітації $\sigma = 0{,}06$ та різних значеннях числа Фруда. Каверна при Fr=39,918 – це так звана гранична каверна, яка реалізується за умови $\dfrac{4c}{3\sigma_0^2 Fr^2} = 1$. Характерним для таких граничних каверн є замикання їх на гострий кут. Для даної каверни відношення $h = \dfrac{xk}{xl} = \dfrac{47{,}2}{130{,}219} = 0{,}362$ При $Fr \geq 40$ всі каверни замкнені. При $Fr < 40$ розрахунки за формулою (4) дають межі каверно подібного утворення, але ці межі не замкнені і після досягнення мінімального значення радіуса починається його необмежене збільшення. При цьому довжина і координата міделя каверни уже не існують.

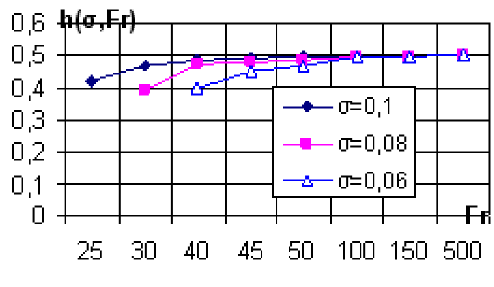

Рис. 2. Відношення *h=xk/xl*

На рис. 2 показані відношення координати xk міделя каверни до її довжини xl при трьох значеннях числа кавітації і різних числах Фруда по діаметру перетину зриву. Добре видно, що мідель каверни при зануренні зміщений ближче до кавітатора і лише із збільшенням числа Фруда він займає середнє положення, як у каверни в невагомій рідині. Крайнє ліве значення числа Фруда є граничним значенням (для кожного числа кавітації), при якому каверна замикається на точку загострення.

Гранична каверна, тобто каверна за умови $\dfrac{4c}{3\sigma_0^2 Fr^2} = 1$ є дуже не стійкою: при

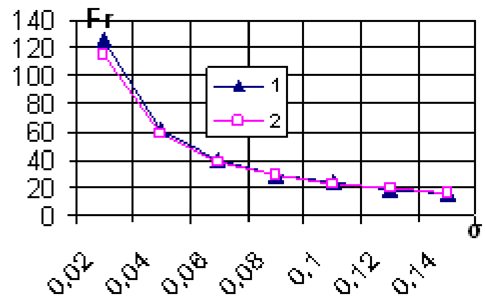

Рис. 3. Критичні числа Фруда

заданому числі кавітації навіть зовсім мале зменшення числа Фруда веде до зникнення каверни. На рис.3 показана залежність критичного числа Фруда від числа кавітації, обчисленого при $\mu = -\sqrt{\dfrac{\sigma}{-4\ln\sigma}}$ (крива 1) і при $\mu = 2$ (крива 2). Видно, що тільки при дуже малих значеннях числа кавітації (σ =< 0,01) починається помітне розходження результатів.

Складову числа кавітації від сили в'язкості (без врахування дії сили тяжіння!) можна перетворити в такий спосіб

$$f(\sigma_0, t) = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{2\left(\dfrac{2}{\sigma_0} - t\right)}{\left[\dfrac{4(1+\sigma_0)}{\sigma_0^2} - \left(\dfrac{2}{\sigma_0} - t\right)^2\right]}.$$

Оскільки при $Fr \to \infty$ маємо границю

$$x_l(\sigma, Fr) = \frac{3}{2}\sigma Fr^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16\sqrt{1+\sigma}}{3\sigma^2 Fr^2}}\right) \to \frac{4}{\sigma},$$

то дріб $\dfrac{2}{\sigma}$ є наближеним значенням напівдовжини осесиметричної каверни, він збігається зі значенням $\lim\limits_{Fr\to\infty} x_k(\sigma, Fr) = \frac{2}{\sigma}$. Експериментально встановлена Логвиновичем [1] формула напівдовжини каверни $\frac{L_k}{R_1} = \frac{1{,}92 - 3\sigma}{\sigma}$ при достатньо малих значеннях числа кавітації переходить у формулу $x_k(\sigma) = \frac{2}{\sigma}$. Значення функції $f(\sigma_0, t)$ в точці $t = \frac{1}{\sigma}$ (тобто на половині передньої частини каверни) при $\sigma = 0{,}06$ дорівнює $f(0{,}06; 1/0{,}06) = 0{,}037$. Так що наближене значення "в'язкого" члена числа кавітації для цієї течії дорівнює

$$\frac{8}{\mathrm{Re}}\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \pm\frac{8\cdot 0{,}037}{\mathrm{Re}} = \pm\frac{0{,}296}{\mathrm{Re}}$$

(на передній частині каверни знак плюс, на післямідельній – знак мінус). Отже, в таких рідинах, де число Рейнольдса по діаметру кавітатора $\mathrm{Re} > 10$ впливом в'язкості рідини можна знехтувати.

З цих формул випливає важливий висновок. Оскільки до міделя каверна розширюється, а величина $f(\sigma, Fr) > 0$, то врахування в'язкості веде до *збільшення* фактичного числа кавітації і, отже, до *зменшення* радіуса міделя, а це означає, що наявність в'язких сил *гальмує швидкості розширення* каверни. В замідельній частині каверни $f(\sigma, Fr) < 0$, це веде до *зменшення* фактичного числа кавітації, а відтак до *збільшення* внутрішнього тиску і, отже, знову ж таки до *гальмування процесу стиску* каверни в її замідельній частині. Інакше кажучи, в'язкість *стримує* як розширення каверни, так і її стискання.

Поверхневий натяг дає сталу за знаком складову числа кавітації $\frac{8}{WeR}$, вона завжди додатна і тому сили поверхневого натягу *перешкоджають* розширенню каверни (в домідельній частині) і *сприяють* її стисканню (в замідельній частині). Зрозуміло, що на початку і в кінці каверни вплив поверхневого натягу значно більший, ніж в її середній частині. Тому при обчисленні глобального впливу поверхневого натягу на каверну доцільно усереднити значення радіусу, наприклад, величиною $R_c = \frac{2R(0{,}25) + R_k}{3}$. Так для каверни при $\sigma = 0{,}06; Fr = 40$ значення $R_k = 4{,}659$, а "середнє" значення

$$R_c = \frac{R\left(2\frac{xl}{10}\right) + R_k + R\left(8\frac{xl}{10}\right)}{3} = 3{,}953.$$

Так що "капілярним" членом числа кавітації може бути величина $\frac{8}{WeR} = \frac{8}{We\cdot 3{,}953} = \frac{2{,}024}{We}$. Отже, в тих течіях, у яких число Вебера по діаметру кавітатора $We > 100$, вплив сил поверхневого натягу може не враховуватися.

Список літератури

1. *Логвинович Г.В.* Гидродинамика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. – 208 с.

2. *Буйвол В.Н.* Тонкие каверны в течениях с возмущениями. – К.: Наук. думка, 1980. – 296 с.

3. *Серебряков В.В.* К постановке линеаризованных задач осесимметричного суперкавитационного обтекания в нестационарном потоке. В сб. "Математические методы исследования гидродинамических течений". – К.: Наук. думка, 1978. – С. 58–62.

4. *Нестерук И.Г.* К вопросу о форме тонкой осесимметричной каверны в весомой жидкости, Изв. АН СССР, МЖГ, 1979. – №6. – С. 133–136.

5. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.

6. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы, каверны. – М.: Мир, 1964. – 466 с.

7. *Кнепп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.*, Кавитация. – М.: Мир, 1976. – 688 с.

8. *Serebryakov V.* Supercavitation Flows with Gas Injection Prediction and Redaction Problems, Fifth Internat. Simposium on Cavitation, CAV 03-OS-7-003, Osaka, Japan, Nov. 1-4, 2003.

Подано до редакції 26.04.10