УДК 004.043

Гамаюн В.П., д.т.н.,
Коврижкин И.О.

СТРУКТУРНО-АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫСОКОТОЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ РАЗРЯДНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Национальный авиационный университет

Предложен метод высокоточных вычислений на основе реализации обратного алгоритма на базисе разрядно-логарифмической арифметики. Адаптивный выбор параметра для размерности разрядной сетки операндов выполняется по критериям обеспечения заданной точности.

Введение

Рост производительности компьютерных средств расширяет спектр и размерность решаемых задач, а также повышает требования к точности компьютерных вычислений. Решение проблемы точности компьютерных вычислений особенно важно при обработке данных в задачах ядерной физики, наноэлектроники, высокоточной химии и т.д.

В настоящее время существует множество библиотек, поддерживающих высокоточные вычисления как средство борьбы с ошибками округления: ZREAL(Россия), MPARITH (Германия), GMP (США) и др. Основой проблемой существующих библиотек высокоточных вычислений является сильная зависимость роста времени выполнения арифметических операций от точности вычислений. Указанная проблема требует поиска новых способов, связанных с применением нетрадиционных систем счисления и компьютерных арифметик для представления и обработки чисел. Одной из таких арифметик является модулярная арифметика как продолжение работ И.Я Акушского, Д.И. Юдицкого, В.М. Амербаева, которая имеет свойства распараллеливания, отсутствия информационных обменов в процессе вычислений [1,2]. Недостатками этой системы являются сложность сравнения, деления , округления чисел. Развитие модулярных вычисления продолжаются как в теоретическом так и прикладном направлениях.

Улучшение операционных характеристик при высокоточных вычислениях реализуется при применении разрядно- логарифмической системы счисления нетрадиционной системы счисления с использованием свойств логарифмов [3, 4].

Разрядно-логарифмическим (РЛ) представлением (кодированием) данных называют изображение двоичного операнда в виде набора двоичных кодов ненулевых разрядов $\{Nx_i\}$ того же операнда, каждый из которых определяется как результат вычисления логарифма от веса этого разряда:

$$x_i \to \{Nx_i = log_2 x_i * p^i \mid x_i \neq 0\},$$

где x_i – ненулевой разряд, p – основание системы счисления.

Например, двоичное число с фиксированной запятой $\grave{A} = \overset{12}{1}\overset{11}{0}\overset{10}{0}\overset{9}{0}\overset{8}{1}\overset{7}{1}\overset{6}{0}\overset{5}{1}\overset{4}{0}\overset{3}{0}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1}.\overset{-1}{1}\overset{-2}{0}\overset{-3}{1}$ в разрядно-логарифмическом представлении будет иметь такой вид:

$$A = 12.8.7.5.2.0.\text{-}1.\text{-}3.$$

Наиболее удобной для использования разрядно-логарифмическом изображения с практической точки зрения есть структура, в которой для числа А будет указан знак этого числа, количество значащих единиц и набор разрядно-логарифмических кодов. Общий вид такой структуры следующий:

$$A \to sign\ A\ Q_A N_1\ N_2\ N_3\ N_4 \ldots N_Q,$$

где $signA$ – поле знака числа А (0 – положительное число; 1 – отрицательное число), Q_A – поле количества значащих единиц, $N_1 N_2 N_3 \ldots N_{Q_A}$ – поле РЛ кодов. Для приведенного выше примера число А будет записано как $A_{РЛ} = 0.8.12.8.7.5.2.0.\text{-}1.\text{-}3$.

Переход от двоичной формы представления A к форме, где каждый ненулевой разряд представлен своим значением, определяется однозначно и реализуется без дополнительных функциональных преобразований – выполняется операция подстановки по каждому ненулевому разряду или с помощью алгоритма перевода. Для обратного перехода в двоичное представление (двоичный код) надо применить операцию дешифрования.

Разрядно-логарифмическое представление определяет значительно больший диапазон чисел в ЭВМ, чем при двоичной системе счисления (на несколько порядков – в зависимости от размерности разрядной сетки для целых чисел). Однако точность вычислений зависит также от параметра количества значащих единиц Q в структуре РЛ-операнда. Определим условия и пределы влияния этого параметра при вычислениях.

Рассмотрим структуру разрядно-логарифмического представления операндов. Используемая разрядная сетка для мантиссы числовых данных компьютерных средств применяется для хранения количества значащих единиц и кодов значащих единиц (рис.1). В гипотетической разрядно-логарифмической ЭВМ и при использовании программных моделей для расчетов величина Q должна выбираться адаптивно, в соответствии с диапазоном решения поставленной задачи. С другой стороны ЭВМ это конечный автомат и следует учитывать особенности вычислений в РЛ-форме.

Sign A	Q	$\pm N_1$	$\pm N_2$	…	…	$\pm N_Q$

Рис.1 Структура разрядно-логарифмического операнда

В соответствии с алгоритмами и методами разрядно-логарифмической компьютерной арифметики величина *Q* вначале определяется алгоритмами перевода из двоичного или десятичного представления в разрядно-логарифмическое [3, 4]. Затем при выполнении алгоритмов базовых операций возможны различные варианты изменения значения *Q*.

Сложение. Коды значащих разрядов первого операнда не совпадают со значащими разрядами второго операнда: тогда в правильном результате должно быть не меньше *2Q* – поэтому асимптотически правильная сумма содержит именно такое количество значащих единиц. Например: *A*=10.9.8.7.6., *B*=5.4.3.2.1. результат *A*+*B*=10.9.8.7.6.5.4.3.2.1. и *Q*=10. При любом другом количестве *Q* результат будет приближенным.

Вычитание. При вычитании прежде всего учитывается фактор значения младшего разряда (МЗЕ) вычитаемого и значение старшего разряда уменьшаемого (СЗЕ), так как формируется последовательность СЗЕ А – МЗЕ В, размерность которой и определяется значениями величины *Q*.

Умножение. Размерность массивов частичных произведений определяется как Q^2 . Сведение к размерности *Q* предполагает возможное отбрасывание-исключение кодов значащих разрядов произведения. Поэтому для точного умножения следует использовать необходимое количество разрядов.

Деление. Значение частного может не иметь предела по *Q*: деление можно заменить дробью или указанием на периодичность.

Обеспечение точных вычислений – обработки при использовании разрядного логарифмического представления достигается при применении следующего метода.

Метод обратных вычислений

Значения РЛ-кодов значащих единиц определяет количество *Q* в результате выполнения операции. Например, если параметр *Q* равен 2, то это не означает, что диапазон при таком небольшом количестве значащих единиц не удовлетворяет требованиям точности. Пусть значения РЛ кодов равны 4096 и –4096 и тогда в ЭВМ представлен операнд с разрядной сеткой в 8193 разряда и это при *Q=2*. В другом случае при *Q=8* и при значениях кодов 17.16.15.14.13.12.11.10. в ЭВМ представлен операнд с разрядной сеткой в 8 разрядов. Очевидно, что точное значение вычислений может быть обеспечено адаптивным выбором *Q* при решении задачи. Каким образом учитывать особенность задачи. её числовой диапазон, чтобы обеспечить заданную точность решения? По положениям разрядно-логарифмической арифметики, а именно основным правилам получения РЛ кода – только для значащих разрядов – пропуск нулевых разрядов существенно влияет на общую размерность разрядной сетки операнда [3, 4]. Поэтому незначительное увеличение параметра *Q* может обеспечить необходимую достаточную точность. Критериями точности результата вычислений в разрядно-логарифмической форме предлагаются оценки сравнения константных значений в исходной постановки задачи и тех же константных значений, определенных в результате вычислений по обратному алгоритму – вычисления от результата к исходным константным значениям.

Пусть прямой алгоритм определяет вычисления как

$$Y= A^* x^2 + D^*x + C.$$

В результате вычислений было определено некоторое значение Y’. Данное значение Y’ следует считать точным, если выполняется следующее равенство

$$A - A' = 0 .$$

Значение A’ определяется в результате выполнения обратного алгоритма

$$A'=(Y'-D^*x-C)/x^2.$$

Если равенство не выполняется, то следует увеличивать значение параметра *Q*. Равенство исходного значения константы и значения этой же константы, вычисленного по обратному алгоритму счета может оцениваться и по заданной точности решения задачи A–A’≤έ, где έ – значение заданной точности.

Другой оценкой точности может быть значение априорного критерия. Например, при вычислении обратной матрицы правильное значение оценивается по значениям единичной матрицы , получаемой как произведений прямой и вычисленной обратной

$$C= A^* A^{-1}.$$

В случае, когда единичная матрица на удовлетворяет заданным требованиям, то для достижения необходимой точности также следует применять увеличение параметра *Q*.

***Етапы метода обратных вычислений следующие*:**

1. Решение заданного алгоритма с выбором константы - А. Если константы на заданы в прямом виде, то следует воспользоваться Значением единичного коэффициента при переменной.

2. Решение обратного алгоритма относительно выбранной константы – A’.

3. Сравнение заданной константы и вычисленной константы по обратному алгоритму.

Алгоритм считается реализованным с заданной точностью, при выполнении следующих условий:

- A –A’ = 0,

разность равна нулю;

- A –A’≤ε,

где έ – значение заданной точности;.
- соответствие априорному критерию точности.

4. При выполнении одного из условий выполнение вычислений является точными метод считается выполненным. При невыполнении условий п.3 увеличивается значение параметра количества значащих единиц *Q=Q+k*, где *k* –шаг увеличения параметра, выбирается из условий решения задачи. Переход на п.1 метода.

Рассмотрим пример метода в реализации высокоточных вычислений полинома:

$$Y= a_7 x^7 + a_7 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0.$$

Первый вариант вычислений реализован при *Q=2*. Константой контроля выбрано значение коэффициента a_7.

Изменение результата при изменении параметра *Q* приведено в таблице 1. Параметр *Q* задается при начале вычислений. Затем методом обратной проверки определяется соответствие контрольной константе a_7. При несоответствии выполняется корректировка параметра согласно методу и сохранение текущего результата. При завершении вычислений с правильными значениями контрольных констант определен массив отклонений таких констант и массив полученных результатов. По данным табл. 1 возможно определить отклонение как контрольной константы так и отклонение результата при заданном параметре *Q*.

Анализ данных показывает, что обратные вычисления необходимы (контроль), так как не происходит при реализации разрядно-логарифмических вычислений компенсаций по инструментальной погрешности – начальное представление данных и неполное исключение округления влияют на конечный результат.

Таблица 1. Процесс изменения параметров вычислений с различными значениями Q

Изменения Q	Δ Y(дес)	Δa_7(дес)
2	1.31184+06	1.33333
6	33889.6	0.135088
10	57.8808	5.7066-05
14	1.25583	2.70264-07
18	0.00143296	4.57528-09
22	1.29372-05	1.57786-10
26	1.78992-07	2.20778-12
30	1.49529-09	1.87298-14
34	0	3.41981-17

Выводы

Разрядно-логарифмическая система счисления относится к конструктивным системам счисления, на основе которой реализуется компьютерная арифметика и алгоритмический базис обработки данных в ЭВМ.

Точность вычислений достигается адаптивным выбором параметра значащих единиц в структуре разрядно-логарифмического операнда по предложенному методу обратных вычислений для РЛ арифметики.

Перспектива применения предложенного метода заключается в использовании в высокоточных вычислениях на компьютерных средствах, а также определении асимптотических констант для различных приложений.

Список литературы

1. Амербаев В.М. Теоретические основы машинной арифметики. – Алма-Ата, Наука, 1976. – 323 с.

2. Акушский И.А., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. – М.: Советское радио, 1968. – 444 с.

3. Гамаюн В.П. Разрядно-логарифмическая арифметика. Методы и алгоритмы: Монография. – К.: Книжное из-во НАУ, 2007. – 272 с.

4. Гамаюн В.П. Моделювання багаторозрядних комп’ютерних систем: Навч. посібник . – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 112 с.