

<sup>1</sup>Печурин Н.К., д.т.н.,  
<sup>2</sup>Кондратова Л.П., к.т.н.,  
<sup>2</sup>Печурин С.Н., к.т.н.,  
<sup>1</sup>Яценко Н.Н.

## СРАВНЕНИЕ СРЕДСТВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

<sup>1</sup>Факультет компьютерных систем НАУ

<sup>2</sup>УНК «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ»

*Проведено аналіз чисельних методів розв'язання задач керування літальними апаратами, що описуються диференціальними рівняннями, з методом аналогового моделювання відносно точності та тривалості обчислень. У прикладі задачі навігації з системою диференціальних рівнянь 2-го порядку за похибкою обчислень метод моделювання на аналогових обчислювальних машинах (АОМ) 2-го покоління не поступився методу Рунге-Кутта 4-го порядку, що характеризується найбільш високою точністю. Час розв'язання вказаних задач методом моделювання на удосконалених аналого-обчислювальних комплексах 3-го покоління є співмірним зі швидкістю комп'ютера з тактовою частотою до 1,0 ГГц.*

### Введение

Задачи управления летательными аппаратами (ЛА) различного класса (космические станции, беспилотные летательные аппараты) могут описываться дифференциальными уравнениями (системами дифференциальных уравнений) для навигационной системы, результатом решения которых являются параметры вектора состояния, характеризующего координаты, проекции скорости, угловой ориентации ЛА [1, 2]. В общем виде движение ЛА описывается в нормальной форме Коши системой дифференциальных уравнений с вектором  $x(t)$  случайных переменных состояния, вектором  $\xi(t)$  случайных воздействий с заданными характеристиками моментов  $M_{\xi}(t), R_{\xi}(t_1, t_2)$ , вектором  $v \in \{M_v, K_v\}$  случайных проектных параметров с заданными характеристиками моментов  $M_v, K_v$ , вектором  $x(t_0)$  случайных начальных условий с заданными моментными характеристиками  $M_{x_0}, K_{x_0}$  [3]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u, \xi, v, t), \\ x(t_0) = x_0 \in \{M_{x_0}, K_{x_0}\}, \\ \xi(t_0) \in \{M_{\xi_0}(t), R_{\xi_0}(t_1, t_2)\}, \end{cases} \quad (1)$$

$v \in \{M_v, K_v\}$ . Для решения задач с математической моделью вида (1) наиболее широко используются численные методы, объединяемые в категорию методов Рунге-

Кутта различных порядков точности [4]. Увеличение порядка точности метода Рунге-Кутта способствует увеличению объема вычислений и, соответственно, обеспечивает большую точность. Решение указанных задач осуществляется также с использованием аналогового моделирования. Составляющие структуру аналоговых вычислительных машин (АВМ) измерительные устройства, решающие элементы и система питания объединяет система управления, обеспечивающая функционирование указанных блоков и управление ими [5, 6]. Системы автоматического управления, используемые для стабилизации ЛА на траектории, стабилизации высоты полета, управления маневрами ЛА и приведения его в горизонтальный полет, функционируют на основе принципа регулирования по углу, угловой скорости, угловому ускорению, как на рис. 1, измеряемым датчиками крена, тангажа, курса, высоты и т.п. [7].

На рис. 1 введены следующие обозначения:  $\delta_v$  – угол отклонения руля высоты;  $v_3$  – заданное значение угла тангажа;  $v$  – угол тангажа;  $3$  – датчик угла тангажа; ИУ – измерительные устройства (датчики  $v$  и  $\omega_v$ );  $U_{v3}, U_v, U_{\omega v}$  – напряжения, пропорциональные значениям  $v_3, v, \omega_v$ ; СУ – суммирующее устройство;  $U_{oc}$  – напряжение обратной связи;  $U_{\Sigma}$  – суммарное напряжение; У – усилитель; ОС – датчик обратной связи;  $k$  – коэффициент усиления усилителя; РМ – рулевая машина.

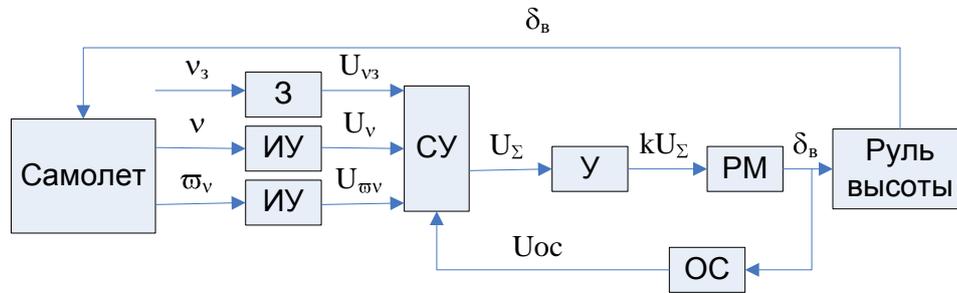


Рис. 1. Функциональная схема автоматического управления рулями высоты.

Данная статья посвящена сравнительному анализу численных методов решения дифференциальных уравнений с аналоговым моделированием.

### Постановка задачи

Множество средств решения дифференциальных уравнений включает численные методы решения, реализуемые на ЦВМ и методы машинного моделирования для АВМ. Указанные классы аппаратных средств характеризуются множеством параметров, определяющих их выгодное отличие, которое включает быстрдействие, точность решения, наличие программного обеспечения.

Задача заключается в сравнении средств решения дифференциальных уравнений с учетом характеризующих их параметров.

### Характеристика средств решения задач управления ЛА

Семейство методов Рунге-Кутты задается рекуррентными формулами [4]:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^p b_i \cdot k_i, \quad k_1 = hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + c_2h, y_n + a_{21}k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + c_3h, y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2), \\ k_p &= hf(x_n + c_ph, y_n + a_{p1}k_1 + a_{p2}k_2 + \dots + a_{p,p-1}k_{p-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

где коэффициенты  $b_i$ ,  $a_{ij}$ , шаг интегрирования  $h$  выбираются из соображений точности аппроксимации, причем  $\sum_{i=1}^p b_i = 1$ . Погрешность аппроксимации зависит от выбранного шага интегрирования и составляет  $O(h^p)$ .

Технология моделирования на АВМ предусматривает использование в дифференциальных уравнениях машинных переменных. Связь исходных переменных дифференциальных уравнений с машинными устанавливается соотношениями подобия

заданием коэффициентов масштабирования. Масштабные коэффициенты выбираются из условия  $m_x \leq \frac{U_m}{|x_m|}$ , где  $U_m$ ,  $x_m$  – соответственно

максимальные значения напряжения на выходе операционного усилителя и моделируемой переменной [5, 6]. Определение параметров соотношений подобия представляет один из факторов, обуславливающих погрешность вычислений в машинной модели. Уменьшением шкалы напряжения до 10В достигается уменьшение погрешности интегрирования в комплексах АВМ 3-го поколения (АВК-32, АВК-33, АЦВС-41, АЦВС-42, АЦВС-43). Длительность решения дифференциальных уравнений на указанных аналого-вычислительных комплексах достигает значений 3,6-0,9 нс (табл. 1), что соизмеримо с быстрдействием вычислительного комплекса на базе процессора с тактовой частотой до 1,0 ГГц.

### Пример решения задачи навигации

Рассмотрим обратную задачу динамики материальной точки (МТ), в которой по заданным силам и массе определяется закон движения. Начальными условиями движения МТ определяются ее координаты в начале движения и проекции скорости на оси координат. Пусть МТ движется под действием силы тяжести  $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$  (проекции на координатные оси  $G_x = 0$ ;  $G_y = -m \cdot g$ ) в среде с сопротивлением  $R$ . В момент времени  $t = 0$  МТ находилась на высоте  $h$  над поверхностью земли и имела горизонтально направленную скорость значением  $V_0$ . Уравнения движения МТ с начальными условиями записываются в виде:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= -R, \quad m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g, \\ x|_{t=0} &= 0, \quad y|_{t=0} = h, \\ \dot{x}|_{t=0} &= V_0, \quad \dot{y}|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Таблица 1. Характеристики АВМ и их комплексов различных поколений.

Тип установки	Вид решаемых на установке дифференциальных уравнений	Максимальный порядок системы дифференциальных уравнений	Допустимая длительность решения в с	Габаритные размеры (мм) или занимаемая установкой площадь (м <sup>2</sup> )	Потребляемая мощность, кВт	Шкала напряжения, В
МН-7	Линейные и нелинейные с небольшим числом нелинейных операций	6	200	700x440x 380	0,73	100
МН-8	Линейные и нелинейные с большим числом переменных коэффициентов и нелинейных решающих элементов	32	1800	60	35	100
МН-14	Линейные и нелинейные с большим числом нелинейных решающих элементов	30	10000	40	15	100
МН-17	Линейные и нелинейные с постоянными коэффициентами	60	0,1 – 1000	7520x 2390x 1024	5	100
МН-18	Линейные и нелинейные с постоянными коэффициентами	10	0,1 – 1000	1714x1086x 530	0,5	50
АВК-32	Линейные и нелинейные с постоянными коэффициентами	20	$3 \cdot 10^{-9}$	1150x1450x 1810	2,4	10
АВК-33	Линейные и нелинейные с постоянными коэффициентами	60	$1 \cdot 10^{-9}$	1150x4650x 1810	5,4	10
АЦВС-41	Линейные и нелинейные с постоянными коэффициентами	24	$3,6 \cdot 10^{-9}$		11,35	10
АЦВС-42	Линейные и нелинейные с постоянными коэффициентами	48	$1,8 \cdot 10^{-9}$		12,95	10
АЦВС-43	Линейные и нелинейные с постоянными коэффициентами	96	$0,9 \cdot 10^{-9}$		17,25	10

Введем допущение линейной зависимости сопротивления  $R$  от скорости  $V$ :  $R = k \cdot V$  ( $k$  – коэффициент пропорциональности).  
Уравнения (2) преобразуются к виду:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{k}{m} dt, \quad \ddot{y} = -g,$$

из которых получим:

$$\ln V = -\frac{k}{m} \cdot t + C_1, \quad \dot{y} = -g \cdot t + C_2. \quad (3)$$

С учетом начальных условий получим:

$$C_1 = \ln V_0, \quad C_2 = 0.$$

Подставляя в (3) значения  $C_1, C_2$ ,

уравнения будут иметь вид:

$$\dot{x} = V_0 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}, \quad \dot{y} = -g \cdot t \quad (4)$$

Интегрирование уравнений (4) с учетом начальных условий даст соотношения для координат МТ:

$$x = \frac{m \cdot V_0}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \quad y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h. \quad (5)$$

Выразив  $t$  из (5) в виде  $t = \frac{m}{k} \cdot \ln \frac{m \cdot V_0}{m \cdot V_0 - k \cdot x}$

, получим траекторию МТ в виде:

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \cdot \left[ \frac{m}{k} \cdot \ln \frac{m \cdot V_0}{m \cdot V_0 - k \cdot x} \right]^2 + h.$$

Рассмотрим случай квадратичной зависимости  $R = k \cdot V^2$  сопротивления  $R$ .

Уравнения (2) преобразуются к виду:

$$\frac{dV}{V^2} = -\frac{k}{m} dt, \quad \ddot{y} = -g,$$

из которых получим:

$$\frac{1}{V} = \frac{k}{m} \cdot t + C_1, \quad \dot{y} = -g \cdot t + C_2. \quad (6)$$

С учетом начальных условий получим:

$$C_1 = \frac{1}{V_0}, \quad C_2 = 0.$$

Подставляя в (6) значения  $C_1, C_2$ , уравнения

будут иметь вид:

$$\dot{x} = \frac{m \cdot V_0}{k \cdot V_0 \cdot t + m}, \quad \dot{y} = -g \cdot t. \quad (7)$$

Интегрирование уравнений (7) с учетом начальных условий даст: соотношения для координат МТ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{k}{m} \cdot V_0 \cdot t + 1\right), \\ y &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h. \end{aligned} \quad (8)$$

Выразив  $t$  из (8) в виде  $t = \frac{m}{k \cdot V_0} \cdot \left(e^{\frac{k}{m} \cdot x} - 1\right)$ , а траекторию МТ получим в виде  $y(x) = -\frac{1}{2} g \cdot \left[\frac{m}{k \cdot V_0} \cdot \left(e^{\frac{k}{m} \cdot x} - 1\right)\right]^2 + h$ . Решение системы дифференциальных уравнений (2) получено с использованием численного метода Рунге-Кутты в интервале  $t \in [0,1]$ . Результаты решения представлены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты решения задачи навигации.

Вид зависимости силы сопротивления	Значение момента времени $t$	Значение координаты $x$	Значение относительной погрешности $\varepsilon_x$	Значение проекции скорости $v_x$	Значение относительной погрешности $\varepsilon_{v_x}$
$R = k \cdot V$	0,5632	0,2636	0,27%	0,4359	0,903%
	0,6382	0,2959	0,376%	0,4274	1,45%
	1,0	0,4431	0,92%	0,3862	3,03%
$R = k \cdot V^2$	0,5632	0,2752	0,053%	0,4771	0,209%
	0,6382	0,3108	0,096%	0,4741	0,252%
	1,0	0,4797	0,213%	0,4594	0,65%

### Реализация системы дифференциальных уравнений на АВМ

Рассмотрим систему (2) для приведения ее к машинному виду. Уравнениям данной системы соответствуют машинные уравнения в виде [5]:

$$M_t^x \cdot \frac{d^2 X}{d\tau^2} = -\frac{k}{m} \cdot \frac{dX}{d\tau}, \quad \frac{d^2 Y}{d\tau^2} = -\frac{g \cdot M_y}{(M_t^y)^2}. \quad (9)$$

Масштабные коэффициенты  $M_t^x$ ,  $M_t^y$ ,  $M_y$

в (9) определяются как

$$M_t^x = \frac{k}{m}, \quad M_t^y = \sqrt{g}, \quad M_y = \frac{100}{h}.$$

Подставляя значения масштабных коэффициентов в (9), преобразуем уравнения к виду:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = -\frac{dX}{d\tau}, \quad \frac{d^2 Y}{d\tau^2} = -\frac{100}{h}. \quad (10)$$

Начальные условия для системы машинных уравнений (10) определяются как:

$$\left. \frac{dX}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -\frac{50m}{k}, \quad X|_{\tau=0} = 0, \quad \left. \frac{dY}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0,$$

$Y|_{\tau=0} = 100$ . Решения системы (10) определяются в виде:

$$\begin{aligned} X(\tau) &= \frac{50m}{k} \cdot (1 - e^{-\tau}), \\ Y(\tau) &= -\frac{50}{h} \cdot \tau^2 + 100. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом масштабных коэффициентов  $M_t^x$ ,  $M_t^y$ ,  $M_y$  из (11) получим решения системы исходных уравнений в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mV_0}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \\ y(t) &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h. \end{aligned} \quad (12)$$

Схему набора решения задачи на АВМ, соответствующую полученным значениям, составляют интеграторы, сумматоры и усилители (рис. 2).

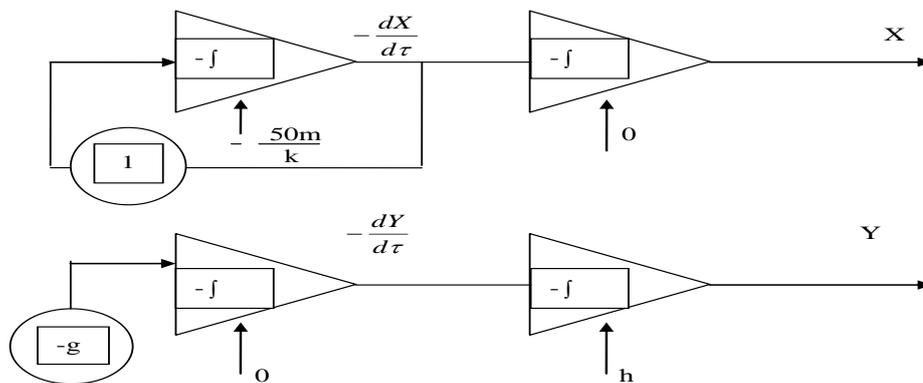


Рис. 2. Схема набора решения системы дифференциальных уравнений (2).

Точность решения системы дифференциальных уравнений (10) по схеме рис. 2 оценивается выражением  $\varepsilon_m = \varepsilon_\delta \cdot n_\delta + \varepsilon_\sigma \cdot n_\sigma$ , где  $\varepsilon_\delta, n_\delta$  – погрешность и число интеграторов,  $\varepsilon_\sigma, n_\sigma$  – погрешность и число усилителей). Коэффициент передачи в уравнении (9) принимает значение равно 1, соответствующее требуемому значению в интервале  $[0,1; 10]$ , значение погрешности интегрирования  $\varepsilon_\delta \in [0,02\%; 1,0\%]$  для различных типов АВМ [6, 8]. Значение  $\varepsilon_m$  достигает для уравнений системы (9) значений 0,14-2,5%. Указанные значения не превысили значений  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_{v_x}$ , полученных с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

### Выводы

Сравнение численного метода семейства Рунге-Кутты с методом аналогового моделирования, которые используются для решения задач управления ЛА с моделью в виде дифференциальных уравнений (систем дифференциальных уравнений), проведено по отношению к точности вычислений и длительности решения. В примере задачи навигации, описываемой системой дифференциальных уравнений 2-го порядка, погрешность вычислений, полученная с использованием метода аналогового моделирования, не превысила значения ошибки аппроксимации при использовании метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Время решения дифференциальных уравнений на аналого-вычислительных комплексах 3-го поколения, разработка которых приходится на 80-90-е годы XX столетия, соизмерима с быстродействием компьютера с тактовой частотой до 1,0 ГГц.

### Список литературы

1. Лазарев Ю.Н. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. – Самара: Самар. науч. центр РАН, 2007. – 274 с.
2. Кулик А.С. Нелинейная модель космического летательного аппарата с четырьмя двигателями-маховиками / Кулик А.С., Гордин А.Г., Резникова О.В. // Авиационно-космическая техника и технология. – 2009. – №1 (58). – С. 54-60.
3. Белоконов И.В. Статистический анализ динамических систем (анализ движения летательных аппаратов в условиях статистической неопределенности): Уч. пособие. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. – 484 с.
4. Мышенков В.И. Численные методы. Ч.2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Уч. пособие // Мышенков В.И., Мышенков Е.В. – М.: МГУЛ, 2005. – 109 с.
5. Бабаков М.Ф. Методы машинного моделирования в проектировании электронной аппаратуры: Уч. пособие // Бабаков М.Ф., Попов А.В. – Харьков: Национальный аэрокосмический университет «Харьковский авиационный институт». – 2001. – 90 с.
6. Анисимов Б.В., Голубкин В.Н., Петраков С.В. Аналоговые и гибридные ЭВМ. – М.: Высш. шк., 1986. – 288 с.
7. Воробьев В.Г. Автоматическое управление полетом самолета / Воробьев В.Г., Кузнецов С.В. – М.: Транспорт. – 1995. – 448 с. Беляков В. Г. Аналоговые машины, разработанные в НИИСчетмаше // Режим доступа: <http://housea.ru/index.php/computer/50395>. – Copyright, 2010.