УДК 681.3.068:

Минаев Ю.Н., д.т.н.,
Филимонова О.Ю., к.т.н.,
Минаева Ю.И., к.т.н.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧЕТКИХ И НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Рассматриваются вопросы моделирования НМ 2-адическими моделями. Показана возможность рационального определения ФП в ситуациях, где отсутствует предшествующая информация за счет учет внутренней структуры объекта.Структурирование НМ 2-адическими моделями позволяет использовать при принятии решений их визуализационные возможности, в ряде случаев НМ и универсум, на котором задано НМ, имеет практически совпадающие фрактальные характеристики (структуры). Это обстоятельство можно использовать при реализации нечетких выводов и принятии приближенных решений

Введение

Теория нечетких множеств (ТНМ) открыла широкие перспективы в решении целого ряда новых задач управления в условиях неопределенности. Одним из фундамен-тальных вопросов, связываемых с приложениями ТНМ - определение функций принадлеж-ности (ФП). В большинстве приложений параметрическая форма ФП считается известной, но в ситуациях, где нет предшествующей информации, задача существенно усложняется. Во-зникает необходимость в разработке новых методов и моделей, позволяющих снизить влия-ние эвристически задаваемой ФП на качество решения. Одним из путей решения данной проблемы есть учет структуры объекта, в частности, методология иерархической кластеризации (ИК), может быть использована для того, чтобы узнать внутреннюю структуру данных и учесть ее при назначении ФП.

Современное состояние исследований

Практически первой работой, в которой был поставлен вопрос применеия ИК в моделировании нечетких объектов была работа [1], которой показано, что на основании результатов, полученных Dunn, Zadeh, и Bezdek , есть эквивалентность между ИК, max-min нечеткими отношениями транзитивности и ультраметрическими расстояниями. Связанная с любой иерархической кластеризацией H(I), всегда существует ультраметрическая матрица расстояния $\mathbf{U} = \left(u_{ij}\right)_{i=1,n}^{j=1,n}$, которая может нормироваться в [0,1], т.е. выступать в роли аналога ФП.

Допуская определение естественных групп в произвольном контексте, кластер-методы могут обеспечить большую гибкость в нечетком моделировании. Благодаря этой гибкости, один из наиболее обещающих классов нечетких моделей тот, который базируется на кластерном анализе. Нечеткая кластеризация используются, чтобы определить разделение пространства, результирующая модель есть обратимой, что означает доступность и обработку с тем же уровнем гибкости. Следовательно, модель становится структурно-свободной и может быть использована для широкого класса задач.

В работе [2] показано, что использование нечеткой кластеризации в контексте нечеткого моделирования в ненаблюдаемой среде позволяет получить определенную информацию о возможных кластерах данных на подготовке образцов, которые показывают аналогичное поведение, поэтому мы можем охарактеризовать это поведение в нечеткой модели. Используя иерархическую кластеризацию в процедурах предобработки информации, можно в известной мере восполнить недостаток информации. Иерархический кластеризация позволяет работать с кратными (возможно вложенными) кластерами, использующие алгоритмы разумной вычислительной сложности, работая со сравнительно небольшим количеством примеров, как это имеет место для нечеткого моделирования в ненаблюдаемых средах. Хотя иерархическая кластеризация имеет недостаток, требующий предварительной подготовки решения, чтобы использовать некоторые дополнительные эвристические критерии для определения наиболее подходящей классификации, современные методы нечеткой кластеризации [3] позволяют снизить влияние этого недостатка.

Постановка задачи

Пусть $\tilde{A}$ –НМ**,** т.е упорядоченная пара $\langle U, \mu \rangle$, где U - универсум, μ - функция принадлежности, НМ - это подмножество декартового произведения универсума U и отрезка [0, 1]: $\tilde{A} \subset U \times [0,1]$. Формально НМ - это четкая ФП, потому часто НМ $\tilde{A}$ определяют только указав его ФП μ_A и УМ U. Отметим при этом, что те элементы УМ, для которых ФП равна нулю, НМ не принадлежат, НМ существует только там, где его ФП больше нуля. В связи с этим исходное НМ будем рассматривать как объект $\left\langle U^0 = \{u_i\}_{i=1}^n,\ \mu^0 = \{\mu_i^{(u)}\}\right\rangle$, для котрого $\mu_i^{(u)}>0$ ($\forall$i), универсум U и НМ представим как множества векторов $\begin{pmatrix} u_1 & 1 \\ \vdots & \\ u_n & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} u_1 & \mu_1^{(u)} \\ \vdots & \\ u_n & \mu_n^{(u)} \end{pmatrix}$ соответственно. Методами ИК для каждого из М построим дендрограмму (бинарное дерево - БДр) и методами р-адического исчисления выполним анализ БДр, предварительно закодировав его символами 0 и 1.

Рассмотрим несколько НМ на одном универсуме: $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \ldots, \tilde{A}_k\} \subset U$, определим М р-адических (структурных) характеристик $S(\tilde{A}_1)$, $S(\tilde{A}_2)\ldots$, $S(\tilde{A}_k)$ и S(U) и путем перебора вычислим НМ $\tilde{A}_j \subset \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \ldots, \tilde{A}_k\}$, $\tilde{A}_j \subset U$, для которого $abs(S(\tilde{A}_j)-S(U)) \rightarrow min$.

Алгоритм решения

Интерпретация НМ на уровне р-адических моделей. Рассмотрим коротоко р-ади-ческий анализ, т.к. его знание необходимо для дальнейшего понимания излагаемого материала. Множество X вместе с заданной в нем метрикой d называется метрическим пространством (МП), одно и то же множество X может допускать много различных структур МП (X, d). Обычное расстояние между рациональными числами определяется в виде $d(r_1, r_2)=|r_1 - r_2|$, однако расстояние можно определить по т.н. *р-адической норме* [4]. Известно, что любое рациональное число r однозначно записывается в виде дроби $r = p^k \cdot \frac{m}{n}$, где $k \in \mathbf{Z}$, $\frac{m}{n}$- несократимая дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты с р. Величина p^{-k} имеет название *р-адическая норма* числа r и записывается как $\|r\|_p$. Показано, что расстояние, определяемое из выражения $|r_1 - r_2|_p$ обладает свойствами обычного расстояния, т.е. удовлетворяет, в частности, аксиоме треугольника $d_p(r_1, r_2)+d_p(r_2, r_3) \geq d_p(r_1, r_3)$.

Однако есть принципиальные отличия вновь определенного расстояния, что заклю-чается в наличии у р-адического расстояния т.н. не-Архимедовых свойств (ультраметрика). В частности, в отличие от обычного расстояния р-адическое расстояние таково, что целые числа образуют в его метрике ограниченное множество диаметра 1. Если применить к этому М процедуру пополнения, то получают компакт – $\mathbf{Q}_p$, элементы которого *целые р-адические числа.*

Они допускают запись в р-ичной системе счисления, т.е. целое р-адическое число *с* однозначно записывается в виде бесконечной влево последовательности $\ldots a_n \ldots a_2 a_1 a_0$, $0 \leq c \leq p-1$, которую рассматривают как сумму сходящегося ряда $a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n+\cdots$, сходимость которого вытекает из условия, что $\|a_np^n\| \leq p^{-n}$.

Ультраметрическое расстояние измеряет степень делимости рационального числа на 2, чем лучше число делится на 2, тем оно ближе к нулю, например, $8=2^3$ ближе к нулю, чем $½=2^{-1}$, $16= 2^4$ ближе к нулю, чем 8; 480 ближе к нулю, чем 16, 384 ближе к нулю, чем 480 и т.п.

Целые р-адические числа можно складывать, вычитать и умножать, т.к. в общем случае они образуют кольцо, однако в отличие от **Z** в $\mathbf{Q_p}$ *отсутствует естественный по-рядок*, понятия положительного и отрицательного чисел в $\mathbf{Q_p}$ не имеют смысла, - $1=\lim (p^n -1)$ при $n \rightarrow \infty$. Важным свойством р-адических чисел является то, что многие р –адические числа в отличие от обычных целых чисел *обратимы*, т.е. если $sgn_p\, a \neq 0$, то a^{-1} –целое положительное число, кроме того, все рациональные числа со знаменателем, взаимно простым с р, являются целыми р.-а.ч. Нетрудно видеть, насколько эффективным может быть применение р-а.ч. к анализу нечетких чисел и нечетких переменных, для которых вопросы обратимости не решены, с точки зрения решения задач управления в условиях неопределенности.

Арифметика над р-а.ч. выполняется как с обычными десятичными дробями с тем исключением, что все операции проводятся, начиная с последней цифры. Наиболее полный набор процедур, связанных с р-адическим анализом, содержится в разделе Number ПММ Mapple. Важным свойством р-адического анализа есть то, что естественным аналогом отрезка [0,1] является «р-адический отрезок», который как и обычный, является шаром.

Определим $|x|_p = p^{-n}$, $|0|_p = 0$, $ord_p(x)=n$ и $ord_p(0)=\infty$, они удовлетворяют следующим свойствам, если вместо $|\cdot|_p$ использовать $ord_p(\cdot)$:

$$ord_p(x+y) \geq \min\{ ord_p(x), ord_p(y) \},$$

$$ord_p(x\cdot y) \geq \{ ord_p(x) + ord_p(y) \},$$

$ord_p(\cdot)$ называют р-адическим порядком, $|\cdot|_p$ - р-адическая оценка .

$$ord_p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{если} \quad a_i = 0\ (\forall i) \\ \min\{s \mid a_x \neq 0\} & \text{иначе} \end{cases}$$

и

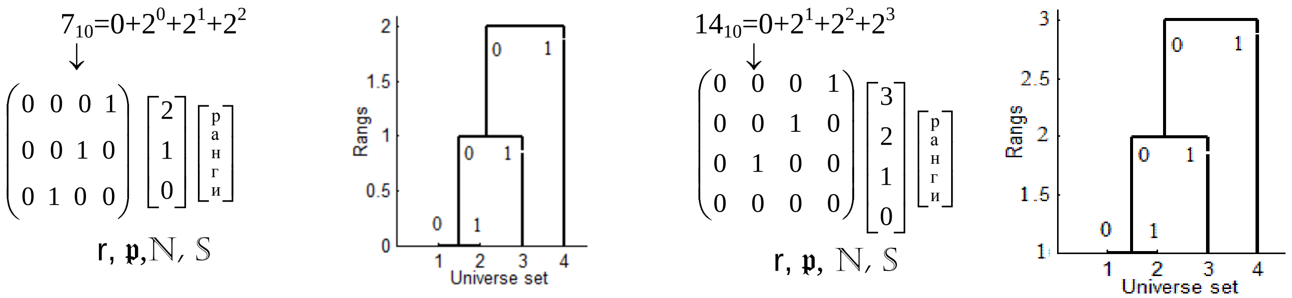
$$|x|_p = p^{-ord_p(x)}$$

Определение. Норма называется *неархимедовой*, если для всех х и у выполнено неравенство $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$.

Расстояние, индуцированное неархимедовой нормой, называется *ультраметрикой,* неравенство треугольника для обычной функции расстояния $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, трансформируется в у*силенное* неравенство треугольника $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$. Соответствующие МП называются *ультраметрическими* пространствами. Отметим, что функция $|.|_p$ может принимать только «дискретное М значений», а именно $\{p^n, n \in \mathbf{Z}) \cup \{0\}\}$. Если $a, b \in \mathbf{N}$, то $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\, p^n)$ тогда и только тогда, когда $|a-b|_p \leq 1/p^n$.Таким образом, ряд a представляется сходящимся (по р-адической норме) рядом $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$. М целых р-а.ч. обозначается $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Z}_p = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i\}$, $\mathbf{Z}_p = \{a \in \mathbf{Q}_p : |a|_p \leq 1\}$.

Доказана теорема А.М.Островского, что любая норма на **Q** эквивалентна либо обычному абсолютному значению, либо р-адической норме для некоторого простого числа р, р-адическая норма $|x|_p$ определяется как $|x|_p = 1/p^{\nu}$. При этом учитывается, что любое раци-ональное число однозначно представимо в виде $x = p^{\nu}\frac{m}{n}$, где m, n-целые, которые не делятся на р. Для этой нормы справедливо УНТ: $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.

Весьма важным для анализа есть то, что р-а.ч. имеют *иерархическую струкутуру* [5, 6] и, с другой стороны, все иерархические структуры описываются р-а.ч. На рис. 1 представлены числа $7_{10} = 0+2^0+2^1+2^2$ - а) и $14_{10} = 0+2^1+2^2+2^3$ - б) в 2-адическом базисе; слева - матричное представление, справа - графическое представление (иерархическое дерево).



а б

Рис.1. Стандартные (четкие) числа $7_{10} = 0+2^0+2^1+2^2$ - а) и $14_{10} = 0+2^1+2^2+2^3$ - б) в 2-адическом ба-зисе ; слева) - матричное представление, справа - графическое представление (иерархическое дерево).

Каждое БДр характеризуется 4 параметрами: максимальный ранг - r, р-адическое число - $\mathfrak{p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$, фрактальная размерность – $\mathcal{N} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$, где $N(\varepsilon)$ - число кубов (квадратов), необходимых для покрытия всего множества кубами (квадратами) $\{B_i\}$ с величиной ребра (стороны), не превышающей ε, и структура – $\mathbb{S}$. Можно построить зависимости: $r(j)$, $\mathfrak{p}(j)$, $\mathcal{N}(s)$, $\mathbb{S}(j)$, j=1, c; и таким образом получить закономерности изменения данных параметров трафика для различных НМ на общем УМ. Фрактальная размерность изображения БДр, соответствующих числам 7 и 14 в 2-адическом базисе, совпадает с топологической, в чем можно убедиться, вычислив эту величину при помощи программы fractdim (), входящей в состав стандартного МО пакета МатЛаб [7, 8].

	1	2	3	4	Элементы дендрограммы	
	0	0	1	2	1	Элемен-ты денд-рограм-мы
	0	0	1	2	2	
	1	1	0	2	3	
	2	2	2	0	4	

а

0	0	0.5	1
0	0	0.5	1
0.5	0.5	0	1
1	1	1	0

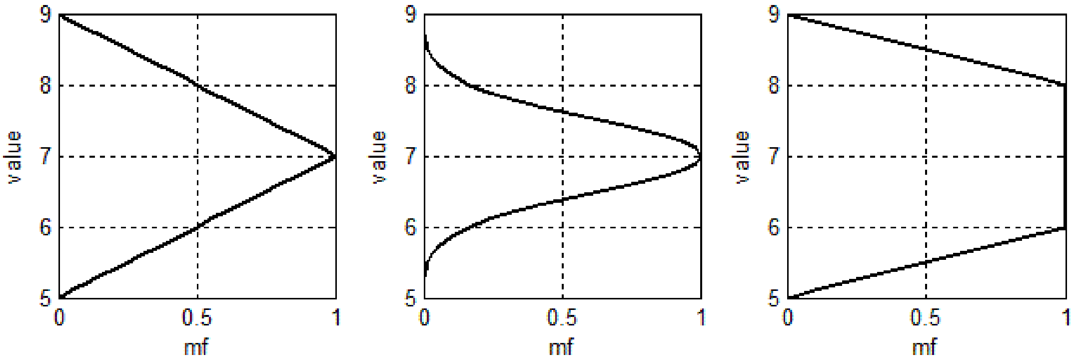
б

Рис. 2. Матрица ультраметрических расстояний для стандартного (четкого) число 7_{10} в 2-адическом базисев, г: в- полученная на основании дендрограммы, г- нормированная

Отметим изоморфизм БДр: стандартное (четкое) число 7_{10} (рис.2) в 2-адическом базисе, $7_{10}=0+2^0+2^1+2^2$ вкладывается в стандартное (четкое) число 14_{10} в 2-адическом базисе, $14_{10}=0+2^1+2^2+2^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix} \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ \ 0\ \ 0 \end{pmatrix}$$

Экспериментальное исследование структурных свойств множеств. НП $\langle$ *примерно 7* $\rangle$ с треугольной, Гауссовой и трапециевидной ФП на УМ А =[5:0.1: 9] приведено на рис. 3, при этом выполнено условие, чтобы количество элементов УМ для всех типов НП было одинаковым.

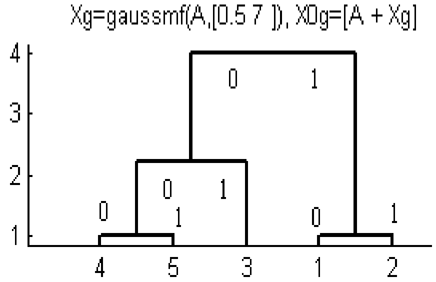


а б в

Рис. 3. Рассчетные НП *примерно 7*: а-X=trimf(A,[5 7 9]); б- Xg=gaussmf(A,[0.53 7]); в- Xtr=trapmf(A,[5 6 8 9]); А = [5:1:9];

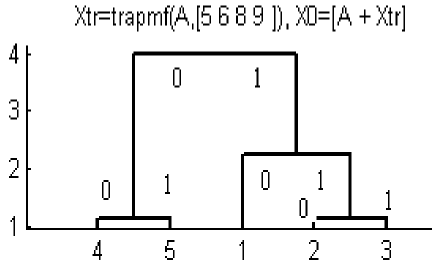
2-адические модели НП $\tilde{7}_{gaussmf}$, $\tilde{7}_{trapmf}$, $\tilde{7}_{trimf}$ и универсума А = [5:1:9] приведены на рис. 4, правые части рис. представляют бинарные деревья 2-адических моделей НП и универсума А.

Основными характеристиками рассматриваемых объектов приняты фрактальные числа и фрактальные размерности БДр – аналогов НМ $\tilde{7}_{gaussmf}$, $\tilde{7}_{trapmf}$, $\tilde{7}_{trimf}$ и универсума А = [5:1:9], как видно из приведенных вычислений *наиболее близким* к универсуму является НМ $\tilde{7}_{trapmf}$, т.к. в этом случае имеет место: N_{TRAP} = N_{UNI}=60, D_{TRAP} =D_{UNI} =1.2091. На рис. 5 приведены матрицы ультраметрических расстояний между элементами структур НМ $\tilde{7}_{gaussmf}$, $\tilde{7}_{trapmf}$, $\tilde{7}_{trimf}$ и УМ А = [5:1:9].



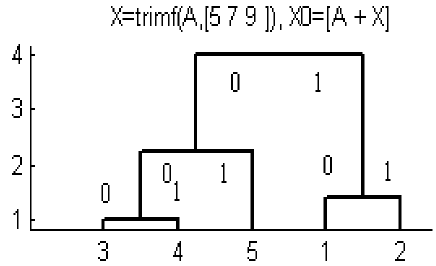
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2^4 & 2^1+2^4 & 2^2 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$$

$N_{GAUS}=16+18+4+2=40$ $D_{GAUS}=1.0000$



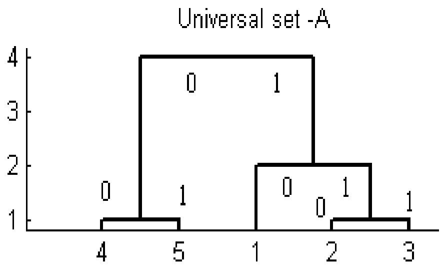
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2^4 & 2^2+2^4 & 2^1+2^2+2^4 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$$

$N_{TRAP}=16+20+22+2=60$ $D_{TRAP}=1.2091$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2^4 & 2^1+2^4 & 0 & 2^1 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$N_{TRI}=16+18+2+4=40$ $D_{TRI}=1.0000$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2^4 & 2^2+2^4 & 2^1+2^2+2^4 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$$

$N_{UNI}=16+20+22+2=60$ $D_{UNI}=1.2091$

а) б)

Рис.4. Иерархическая кластеризация НМ *примерно 7* на УМ А=[5:1: 9] в евклидовой метрике методом НУдС для различных видов ФП: а- рассчетное бинарное дерево (БД), б –матрица БД

Примечание: $A+X \to A \bigcup X=[a_1\ x_1;\ a_2\ x_2;\ldots\ a_n\ x_n]$

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\qquad \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & & 1 & 0 \end{array}\qquad \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\qquad \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

r1 r2 r3 r4

Рис. 5. Матрицы ультраметрических расстояний (ультраметрической близости) для БДр, представляющих НМ *примерно 7* на УМ А= [5:1:9] в евклидовой метрике, кластеризованных методом НУдС, для различных видов ФП.

Расчет Фробениусовских норм для матриц ультраметрической близости дал результаты:

F-нормы матриц

r1	r2	r3	r4
3.7666	3.6401	3.6912	3.7666

Анализ результатов показывает, что в данном случае роль ФП значительно преувеличена, абсолютно аналогичные выводы могли быть получены как при использовании только универсума или НП $\tilde{7}_{trimf}$, хотя в общем случае такой вывод, по-видимому, не справедлив.

Отдельно отметим визуализационные возможности 2-адических моделей НМ.

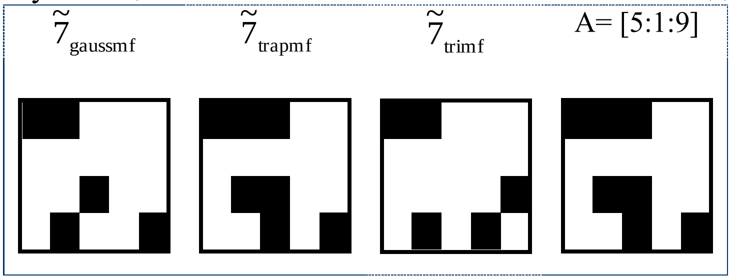


Рис. 6. Визуализация НМ и УМ.

Ранее было отмечено, что НМ $\tilde{7}_{\text{trapmf}}$ и универсум A= [5:1:9] имеют практически совпадающие фрактальные характеристики, это наглядно видно на представленном ниже рис. , изображения НМ $\tilde{7}_{\text{trapmf}}$ и универсума A= [5:1:9] практически совпадают. Это обстоятельство можно использовать при реализации нечетких выводов и принятии приближенных решений.

В заключение отметим, что наличие матриц близости, а также некоторые известные отношения между иерархическим кластеризациями и max-min нечеткими отношениями транзитивности позволяют ставить вопрос о выборе "хорошего качества" меры, которое должно быть использовано, когда предшествующая информация о структуре данных не доступна (ненаблюдаемый случай), но решение необходимо принимать.

Выводы

1. Одним из фундаментальных вопросов, связываемых с приложениями ТНМ является определение функций принадлежности. В большинстве приложений параметрическая форма ФП считается известной, но в ситуациях, где нет предшествующей информации, задача существенно усложняется. Возникает необходимость в разработке новых методов и моделей, позволяющих снизить влияние эвристически задаваемой ФП на качество решения. Одним из путей решения данной проблемы есть учет структуры объекта, в данном случае НМ. Методология, подобная кластеризации, может быть использована для определения внутренней структуру данных и ее учета при назначении ФП.

2. Анализ результатов показывает, что в ряде случаев роль ФП значительно преувеличена, абсолютно аналогичные выводы могли быть получены как при использовании только универсума или заданного НМ, хотя в общем случае такой вывод, по-видимому, не справедлив.

3. Структурирование НМ 2-адическими моделями позволяет использовать при принятии решений их визуализационные возможности, в ряде случаев НМ и универсум, на котором задано НМ, имеет практически совпадающие фрактальные характеристики (структуры. Это обстоятельство можно использовать при реализации нечетких выводов и принятии приближенных решений.

Список литературы

1. M. Delgado, A. F. Gomez-Skarmeta, A. Vila. On the Use of Hierarchical Clustering in Fuzzy Modeling* International Journal of Approximate Reasoning 1996. – P. 237-257.

2. Витяев Е.Е. Извлечение знаний из данных. Компьютерное познание. Модели когнитивных процессов: Моногр./ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2006. – 293 с.

3. Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И. Иерархическая кластеризация нечетких данных Электрон. Моделир. 2012, т. 34, № 4. – С. 3-22.

4. Каток С. Б. p-адический анализ в сравнении с вещественным./Пер.с англ.П.А. Колгушкина. – М.: МЦНМО, 2004. – 112 с.

5. Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. Р-адический анализ и мат. физика. М.: Физматлит, 1994. – 352 с.

6. Хренников А. Ю. Неархимедов анализ и его приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 216 с.

7. S. Albeverio, R. Cianci and A.Yu. Khrennikov. OPERATOR CALCULUS FOR *p*-ADIC VALUED SYMBOLS AND QUANTIZATION. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino Vol. 67, 2 (2009), 137 – 150. Second Conf. Pseudo-Differential Operators

8. Stany De Smedt. p-adic Arithmetic. The Mathematica Journal **9**:2 © 2004 Wolfram Media, Inc. Available at www.mathematica-journal.com. PadicArithmetic.m. – P. 348-357.