УДК 519.218.82(045)

Ігнатов В.О., д.т.н.,професор
Андреєв О.В.,
Андреєв В.І., к.т.н., доцент

МЕТОД ЧОТИРИПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМАЛЬНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ НА ФОНІ ЗАВАД

Національного авіаційного університету

Запропоновано новий метод чотирипараметричної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів на фоні завад, який дозволяє по попереднім значенням процесу, що спостерігається, та певній апріорній інформації щодо процесу, дозволяє екстраполювати п'яте значення нестаціонарного випадкового процесу.

Вступ

Вирішення задач екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів (ВНП) на фоні завад займають важливе місце як в теорії випадкових процесів, так і в практичному використанню цієї теорії.

В статтях [1], [2] було запропоновано рекурсивний метод, складовою частиною якого є трипараметричний спосіб оптимальної екстраполяції, який дозволяє по двом значенням значеннях попередніх спостережень - Y_1, Y_2 і результатам двопараметричної екстраполяції - Y_3^*, $D[Y_3^*]$ дозволить екстраполювати Y_4^* майбутнього значення Y_4. Чотирипараметричний метод є подальшим розвитком рекурсивного методу оптимальної екстраполяції. Використання чотирипараметричного методу оптимальної екстраполяції дозволить збільшити час екстраполяції порівняно з дво- та трипараметричним методами.

Метою роботи є розробка чотирипараметричного методу оптимальної екстраполяції, який по двом значеннях попередніх спостережень - Y_1, Y_2 і результатам двопараметричної і трипараметричної екстраполяції - Y_3^*, $D[Y_3^*]$, Y_4^*, $D[Y_4^*]$ дозволить екстраполювати Y_5^* майбутнього значення Y_5 .

В роботі подається змістовна трактовка задачі чотирипараметричної оптимальної екстраполяції ВНП на фоні завад, вводяться необхідні позначення і виводиться математична постановка задачі, розглядаються особливості вибору моделі для екстрапольованого значення, а також критерії оптимізації.

Постановка задачі

Розглянемо постановку задачі чотирипараметричного методу оптимальної екстраполяції ВНП на фоні завад, яка має наступний вигляд. Вводяться такі основні позначення:

$X(t)$ – випадковий нестаціонарний сигнал, значення якого прогнозуються;

$\xi(t)$ – випадкова завада, що спотворює дані спостережень;

$Y(t)$ – випадковий сигнал, реалізація якого спостерігається;

t_i, i=1, n – i-й момент спостереження;

$Y(t_i)=Y_i$ – i-е значення $Y(t)$ в момент часу спостереження t_i;

Y_{n+1} – $Y(t_{n+1})$ – значення $Y(t)$, що прогнозується (екстраполюється);

$T=t_n - t_1$ – інтервал спостереження;

$\tau=t_{n+1} - t_n$ – інтервал екстраполяції (прогнозу);

$M[Y(t)]=m(t)$ – математичне сподівання $Y(t)$;

$D[Y(t)]=M[Y(t)–m(t)]^2$ – дисперсія $Y(t)$;

$k(t_i, t_j)=M\{[Y(t_i–m(t_i)][Y(t_j–m(t_j)]\}$ – кореляційна функція $Y(t)$;

$k_\xi(t_i, t_j)=M\{[\xi(t_i)-m_\xi][\xi(t_j)–m_\xi]\}$ – кореляційна функція завади $\xi(t)$;

$M[\xi(t)]=m_\xi(t)$ – математичне сподівання завади $\xi(t)$;

$\alpha_1^{(4)}$, $\alpha_2^{(4)}$, $\alpha_3^{(4)}$, $\alpha_3^{(4)}$ – параметри чотирипараметричної оптимізації.

Основні характеристики і параметри чотирипараметричного методу наведені на рис 1.

Оцінку Y_5^* істинного значення Y_5 в момент часу t_5 розглянемо як лінійну комбінацію попередніх значень, що спостерігаються

$$Y_{5opt}^* = Y_5(Y_1, Y_2, Y_{3opt}^*, Y_{4opt}^*, \alpha_1^{(4)}, \alpha_2^{(4)}, \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)}) \; Y_5^* = \alpha_1^{(4)}Y_1 + \alpha_2^{(4)}Y_2 + \alpha_3^{(4)}Y_3^* + \alpha_4^{(4)}Y_4^*, \quad (1)$$

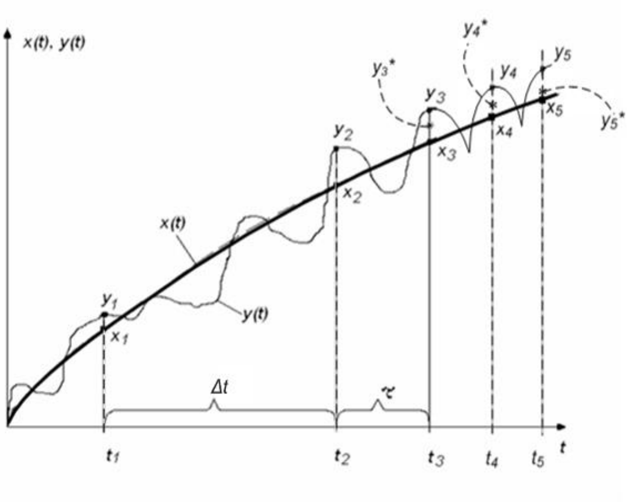

Рис. 1. Основні характеристики і параметри чотирипараметричного методу

Таким чином, для оптимізації оцінки Y_5^* обираємо критерій оптимізації такий же як в роботі [3], [4] і використовуємо $\alpha_1^{(4)}$, $\alpha_2^{(4)}$, $\alpha_3^{(4)}$, $\alpha_4^{(4)}$ як керовані змінні оптимізації.

Використаємо середньоквадратичний критерій методу найменших квадратів у вигляді квадрату відстані між Y_5 та Y_5* :

$$D(\varepsilon) = M[(Y_5 - Y_5^*)^2]. \qquad (2)$$

Для розв'язання задачі оптимізації будемо враховувати співвідношення для характеристик випадкових процесів, що спостерігаються (16) – (21) з роботи [3].

Для розв'язання задачі оптимізації використовуємо класичний метод знаходження мінімуму функції чотирьох змінних. Беремо похідні від D_ε по $\alpha_1^{(4)}$, $\alpha_2^{(4)}$, $\alpha_3^{(4)}$, $\alpha_4^{(4)}$ та прирівнюємо їх до нуля (це необхідна умова екстремума функції чотирьох змінних):

$$\frac{\partial D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(4)}} = 0 \ ; \frac{\partial D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(4)}} = 0 \ ; \frac{\partial D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(4)}} = 0 \ ; \frac{\partial D_\varepsilon}{\partial \alpha_4^{(4)}} = 0 \ ,$$

враховуючи те, що другі похідні мають такий вигляд:

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(4)2}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(4)} \partial \alpha_2^{(4)}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(4)} \partial \alpha_3^{(4)}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(4)} \partial \alpha_4^{(4)}} \ ; \\
\dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(4)} \partial \alpha_1^{(4)}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(4)2}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(4)} \partial \alpha_3^{(4)}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(4)} \partial \alpha_4^{(4)}} \ ; \\
\dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(4)} \partial \alpha_1^{(4)}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(4)} \partial \alpha_2^{(4)}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(4)2}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(4)} \partial \alpha_4^{(4)}} \ ; \\
\dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_4^{(4)} \partial \alpha_1^{(4)}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_4^{(4)} \partial \alpha_2^{(4)}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_4^{(4)} \partial \alpha_3^{(4)}} \ ; & \dfrac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_4^{(4)2}} \ ,
\end{array} \qquad (3)$$

де $D_\varepsilon = D_\varepsilon(\alpha_1^{(4)},\ \alpha_2^{(4)},\ \alpha_3^{(4)},\ \alpha_4^{(4)})$ записано для скорочення запису, вирішуємо систему рівнянь четвертого порядку відносно $\alpha_1^{(4)}$, $\alpha_2^{(4)}$, $\alpha_3^{(4)}$, $\alpha_4^{(4)}$, отримаємо $\alpha_{1opt}^{(4)}$, $\alpha_{2opt}^{(4)}$, $\alpha_{3opt}^{(4)}$, $\alpha_{4opt}^{(4)}$.

Підставимо у вираз (2) замість Y_5* його значення з (1). Тоді отримаємо:

$$D_\varepsilon(\alpha_1^{(4)}, \alpha_2^{(4)}, \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)}) = M[(Y_5 - \alpha_1^{(4)} Y_1 - \alpha_2^{(4)} Y_2 - \alpha_3^{(4)} Y_3^* - \alpha_4^{(4)} Y_4^*)^2]. \qquad (4)$$

Розв'язуючи рівняння (4), отримаємо:

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha_1^{(4)}, \alpha_2^{(4)}, \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)})}{\partial \alpha_1^{(4)}} = M\{2(Y_5 - \alpha_1^{(4)} Y_1 - \alpha_2^{(4)} Y_2 - \alpha_3^{(4)} Y_3^* - \alpha_4^{(4)} Y_4^*)(-Y_1)\} = 0 \ ; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha_1^{(4)}, \alpha_2^{(4)}, \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)})}{\partial \alpha_2^{(4)}} = M\{2(Y_5 - \alpha_1^{(4)} Y_1 - \alpha_2^{(4)} Y_2 - \alpha_3^{(4)} Y_3^* - \alpha_4^{(4)} Y_4^*)(-Y_2)\} = 0 \ ; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha_1^{(4)}, \alpha_2^{(4)}, \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)})}{\partial \alpha_3^{(4)}} = M\{2(Y_5 - \alpha_1^{(4)} Y_1 - \alpha_2^{(4)} Y_2 - \alpha_3^{(4)} Y_3^* - \alpha_4^{(4)} Y_4^*)(-Y_3^*)\} = 0 \ ; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha_1^{(4)}, \alpha_2^{(4)}, \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)})}{\partial \alpha_4^{(4)}} = M\{2(Y_5 - \alpha_1^{(4)} Y_1 - \alpha_2^{(4)} Y_2 - \alpha_3^{(4)} Y_3^* - \alpha_4^{(4)} Y_4^*)(-Y_4^*)\} = 0 \ . \qquad (8)$$

Використовуючи властивості математичного сподівання для виразів (5), (6), (7), (8) та перемножуючи складові у фігурних дужках, отримаємо:

$$M[\alpha_1^{(4)} Y_1^2 + \alpha_2^{(4)} Y_1 Y_2 + \alpha_3^{(4)} Y_1 Y_3^* + \alpha_4^{(4)} Y_1 Y_4^* - Y_1 Y_5] = 0 \ ; \qquad (9)$$

$$M[\alpha_1^{(4)}Y_1Y_2+\alpha_2^{(4)}Y_2^2+\alpha_3^{(4)}Y_2Y_3^*+\alpha_4^{(4)}Y_2Y_4^*-Y_2Y_5]=0\ ; \tag{10}$$

$$M[\alpha_1^{(4)}Y_1Y_3^*+\alpha_2^{(4)}Y_2Y_3^*+\alpha_3^{(4)}Y_3^{*2}+\alpha_4^{(4)}Y_3^*Y_4^*-Y_3^*Y_5]=0\ . \tag{11}$$

$$M[\alpha_1^{(4)}Y_1Y_4^*+\alpha_2^{(4)}Y_2Y_4^*+\alpha_3^{(4)}Y_3^*Y_4^*+\alpha_4^{(4)}Y_4^{*2}-Y_4^*Y_5]=0\ . \tag{12}$$

$$\begin{cases} M[\alpha_1^{(4)}Y_1^2+\alpha_2^{(4)}Y_1Y_2+\alpha_3^{(4)}Y_1Y_3^*+\alpha_4^{(4)}Y_1Y_4^*]=M[Y_1Y_5] \\ M[\alpha_1^{(4)}Y_1Y_2+\alpha_2^{(4)}Y_2^2+\alpha_3^{(4)}Y_2Y_3^*+\alpha_4^{(4)}Y_2Y_4^*]=M[Y_2Y_5] \\ M[\alpha_1^{(4)}Y_1Y_3^*+\alpha_2^{(4)}Y_2Y_3^*+\alpha_3^{(4)}Y_3^{*2}+\alpha_4^{(4)}Y_3^*Y_4^*]=M[Y_3^*Y_5] \\ M[\alpha_1^{(4)}Y_1Y_4^*+\alpha_2^{(4)}Y_2Y_4^*+\alpha_3^{(4)}Y_3^*Y_4^*+\alpha_4^{(4)}Y_4^{*2}]=M[Y_4^*Y_5]. \end{cases} \tag{13}$$

У системі рівнянь (13), замінюючи математичні сподівання $M[Y_1^2]$, $M[Y_1Y_2]$, $M[Y_1Y_3^*]$, $M[Y_1Y_4^*]$, $M[Y_1Y_5]$, $M[Y_2^2]$, $M[Y_2Y_3^*]$, $M[Y_2Y_4^*]$, $M[Y_2Y_5]$, $M[Y_3^{*2}]$, $M[Y_3^*Y_4]$, $M[Y_3Y_5^*]$, $M[Y_4^{*2}]$, $M[Y_4^*Y_5]$ їх значеннями, отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_1^{(4)}[m_{Y_1}^2+D_{Y_1}]+\alpha_2^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_2}+k_Y(t_1,t_2)]+\alpha_3^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_3^*}+k_Y(t_1,t_3)]+\alpha_4^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_4^*}+k_Y(t_1,t_4)]= \\ =m_{Y_1}m_{Y_5}+k_Y(t_1,t_5) \\ \alpha_1^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_2}+k_Y(t_1,t_2)]+\alpha_2^{(4)}[m_{Y_2}^2+D_{Y_2}]+\alpha_3^{(4)}[m_{Y_2}m_{Y_3^*}+k_Y(t_2,t_3)]+\alpha_4^{(4)}[m_{Y_2}m_{Y_4^*}+k_Y(t_2,t_4)]= \\ =m_{Y_2}m_{Y_5}+k_Y(t_2,t_5) \\ \alpha_1^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_3^*}+k_Y(t_1,t_3)]+\alpha_2^{(4)}[m_{Y_2}m_{Y_3^*}+k_Y(t_2,t_3)]+\alpha_3^{(4)}[m_{Y_3^*}^2+D_{Y_3^*}]+\alpha_4^{(4)}[m_{Y_3}m_{Y_4^*}+k_Y(t_3,t_4)]= \\ =m_{Y_3^*}m_{Y_5}+k_Y(t_3,t_5) \\ \alpha_1^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_4^*}+k_Y(t_1,t_4)]+\alpha_2^{(4)}[m_{Y_2}m_{Y_4^*}+k_Y(t_2,t_4)]+\alpha_3^{(4)}[m_{Y_3^*}m_{Y_4^*}+k_Y(t_3,t_4)]+\alpha_4^{(4)}[m_{Y_4^*}^2+D_{Y_4^*}]= \\ =m_{Y_4^*}m_{Y_5}+k_Y(t_4,t_5)\ . \end{cases} \tag{14}$$

Систему рівнянь (14) можна записати у такій формі:

$$\begin{cases} \alpha_1^{(4)}a_{11}+\alpha_2^{(4)}a_{12}+\alpha_3^{(4)}a_{13}+\alpha_4^{(4)}a_{14}=b_1 \\ \alpha_1^{(4)}a_{21}+\alpha_2^{(4)}a_{22}+\alpha_3^{(4)}a_{23}+\alpha_4^{(4)}a_{24}=b_2 \\ \alpha_1^{(4)}a_{31}+\alpha_2^{(4)}a_{32}+\alpha_3^{(4)}a_{33}+\alpha_4^{(4)}a_{34}=b_3 \\ \alpha_1^{(4)}a_{41}+\alpha_2^{(4)}a_{42}+\alpha_3^{(4)}a_{43}+\alpha_4^{(4)}a_{44}=b_4, \end{cases} \tag{15}$$

де

$$\begin{gathered} a_{11}=m_{Y_1}^2+D_{Y_1}\ ;\ a_{12}=m_{Y_1}m_{Y_2}+k_Y(t_1,t_2)\ ;\ a_{13}=m_{Y_1}m_{Y_3^*}+k_Y(t_1,t_3)\ ;\ a_{14}=m_{Y_1}m_{Y_4^*}+k_Y(t_1,t_4)\ ; \\ a_{21}=m_{Y_1}m_{Y_2}+k_Y(t_1,t_2)\ ;\ a_{22}=m_{Y_2}^2+D_{Y_2}\ ;\ a_{23}=m_{Y_2}m_{Y_3^*}+k_Y(t_2,t_3)\ ;\ a_{24}=m_{Y_2}m_{Y_4^*}+k_Y(t_2,t_4)\ ; \\ a_{31}=m_{Y_1}m_{Y_3^*}+k_Y(t_1,t_3)\ ;\ a_{32}=m_{Y_2}m_{Y_3^*}+k_Y(t_2,t_3)\ ;\ a_{33}=m_{Y_3^*}^2+D_{Y_3^*};\ a_{34}=m_{Y_3^*}m_{Y_4^*}+k_Y(t_3,t_4)\ ; \\ a_{41}=m_{Y_1}m_{Y_4^*}+k_Y(t_1,t_4)\ ;\ a_{42}=m_{Y_2}m_{Y_4^*}+k_Y(t_2,t_4)\ ;\ a_{43}=m_{Y_3^*}m_{Y_4^*}+k_Y(t_3,t_4);\ a_{44}=m_{Y_4^*}^2+D_{Y_4^*}; \\ b_1=m_{Y_1}m_{Y_5}+k_Y(t_1,t_5)\ ;\ b_2=m_{Y_2}m_{Y_5}+k_Y(t_2,t_5)\ ;\ b_3=m_{Y_3^*}m_{Y_5}+k_Y(t_3,t_5)\ ;\ b_4=m_{Y_4^*}m_{Y_5}+k_Y(t_4,t_5)\ ; \end{gathered} \tag{16}$$

$m_{Y_4^*}$ –математичне сподівання екстрапольованого значення та його дисперсія $D_{Y_4^*}$, які обчислюються за способом трипараметричної екстраполяції у роботі [1], [2].

Вирішуючи систему рівнянь (15) відносно $\alpha_1^{(4)}$, $\alpha_2^{(4)}$, $\alpha_3^{(4)}$, $\alpha_4^{(4)}$, отримуємо значення α_{1opt}, α_{2opt}, α_{3opt}, α_{4opt}.

Тепер розглянемо другі похідні від $D_\varepsilon(\alpha_1^{(4)}, \alpha_2^{(4)}, \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)})$, отримаємо наступну матрицю:

$$A_{1234}(\alpha_1^{(4)},\alpha_2^{(4)},\alpha_3^{(4)},\alpha_4^{(4)}) = \left| \begin{array}{llll} \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_1^{(4)2}} = M[Y_1^2]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_1^{(4)}\partial\alpha_2^{(4)}} = M[Y_1Y_2]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_1^{(4)}\partial\alpha_3^{(4)}} = M[Y_1Y_3^*]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_1^{(4)}\partial\alpha_4^{(4)}} = M[Y_1Y_4^*]\,; \\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_2^{(4)}\partial\alpha_1^{(4)}} = M[Y_1Y_2]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_2^{(4)2}} = M[Y_2^2]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_2^{(4)}\partial\alpha_3^{(4)}} = M[Y_2Y_3^*]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_2^{(4)}\partial\alpha_4^{(4)}} = M[Y_2Y_4^*]\,; \\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_3^{(4)}\partial\alpha_1^{(4)}} = M[Y_1Y_3^*]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_3^{(4)}\partial\alpha_2^{(4)}} = M[Y_2Y_3^*]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_3^{(4)2}} = M[Y_3^{*2}]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_3^{(4)}\partial\alpha_4^{(4)}} = M[Y_3^*Y_4^*]\,; \\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_4^{(4)}\partial\alpha_1^{(4)}} = M[Y_1Y_4^*]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_4^{(4)}\partial\alpha_2^{(4)}} = M[Y_2Y_4^*]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_4^{(4)}\partial\alpha_3^{(4)}} = M[Y_3^*Y_4^*]\,; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial\alpha_4^{(4)2}} = M[Y_4^{*2}]\,; \end{array} \right| , \qquad (17)$$

де $D_\varepsilon = D_\varepsilon(\alpha_1^{(4)}, \alpha_2^{(4)}, \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)})$ записано для скорочення запису.

Розглянемо достатню умову екстремуму функції чотирьох змінних [5], у якій квадратична форма матриці других похідних більша нуля.

Тоді квадратична форма від 4-х дійсних змінних α_1, α_2, α_3, α_4 для матриці других часткових похідних буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} x'Ax &= (m_{Y_1}^2 + D_{Y_1})\alpha_1^{(4)2} + (m_{Y_2}^2 + D_{Y_2})\alpha_2^{(4)2} + (m_{Y_3^*}^2 + D_{Y_3^*})\alpha_3^{(3)2} + (m_{Y_4^*}^2 + \\ &+ D_{Y_4^*})\alpha_4^{(4)2} + 2[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)]\alpha_1^{(4)}\alpha_2^{(4)} + 2[m_{Y_1}m_{Y_3^*} + \\ &+ k_Y(t_1,t_3)]\alpha_1^{(4)}\alpha_3^{(4)} + 2[m_{Y_1}m_{Y_4^*} + k_Y(t_1,t_4)]\alpha_1^{(4)}\alpha_4^{(4)} + 2[m_{Y_2}m_{Y_3^*} + \\ &+ k_Y(t_2,t_3)]\alpha_2^{(4)}\alpha_3^{(4)} + 2[m_{Y_2}m_{Y_4^*} + k_Y(t_2,t_4)]\alpha_2^{(4)}\alpha_4^{(4)} + 2[m_{Y_3^*}m_{Y_4^*} + \\ &+ k_Y(t_3,t_4)]\alpha_3^{(4)}\alpha_4^{(4)} > 0 \end{aligned} \qquad (18)$$

При оптимальному значенні параметрів $\alpha_1^{(4)}$, $\alpha_2^{(4)}$, $\alpha_3^{(4)}$, $\alpha_4^{(4)}$ похибка екстраполяції мінімальна та приймає мінімальне значення

$$\begin{aligned} & D_\varepsilon(\alpha_{1opt}^{(4)}, \alpha_{2opt}^{(4)}, \alpha_{3opt}^{(4)}\alpha_{4opt}^{(4)})_{\min} = M[(Y_5 - Y_5^*)^2] = \\ &= m_{Y_5}^2 + D_{Y_5} + \alpha_{1opt}^{(4)2}(m_{Y_1}^2 + D_{Y_1}) + \alpha_{2opt}^{(4)2}(m_{Y_2}^2 + D_{Y_2}) + \\ &+ \alpha_{3opt}^{(4)2}(m_{Y_3^*}^2 + D_{Y_3^*}) + \alpha_{4opt}^{(4)2}(m_{Y_4^*}^2 + D_{Y_4^*}) - 2\alpha_{1opt}^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_5} + k_Y(t_1,t_5)] - \\ &- 2\alpha_{2opt}^{(4)}[m_{Y_2}m_{Y_5} + k_Y(t_2,t_5)] - 2\alpha_{3opt}^{(4)}[m_{Y_3^*}m_{Y_5} + k_Y(t_3,t_5)] - 2\alpha_{4opt}^{(4)}[m_{Y_4^*}m_{Y_5} + \\ &+ k_Y(t_4,t_5)] + 2\alpha_{1opt}^{(4)}\alpha_{2opt}^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] + 2\alpha_{1opt}^{(4)}\alpha_{3opt}^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_3^*} + \\ &+ k_Y(t_1,t_3)] + 2\alpha_{1opt}^{(4)}\alpha_{4opt}^{(4)}[m_{Y_1}m_{Y_4^*} + k_Y(t_1,t_4)] + 2\alpha_{2opt}^{(4)}\alpha_{3opt}^{(4)}[m_{Y_2}m_{Y_3^*} + \\ &+ k_Y(t_2,t_3)] + 2\alpha_{2opt}^{(4)}\alpha_{4opt}^{(4)}[m_{Y_2}m_{Y_4^*} + k_Y(t_2,t_4)] + 2\alpha_{3opt}^{(4)}\alpha_{4opt}^{(4)}[m_{Y_3^*}m_{Y_4^*} + k_Y(t_3,t_4)] \; . \end{aligned} \qquad (19)$$

Дисперсія оцінки Y_5^* визначається за наступною формулою:

$$\begin{aligned} & D[Y_5^*] = D[\alpha_{1opt}^{(4)}Y_1 + \alpha_{2opt}^{(4)}Y_2 + \alpha_{3opt}^{(4)}Y_3^* + \alpha_{4opt}^{(4)}Y_4^*] = \\ &= \alpha_{1opt}^{(4)2}D_{Y_1} + \alpha_{2opt}^{(4)2}D_{Y_2} + \alpha_{3opt}^{(4)2}D_{Y_3^*} + \alpha_{4opt}^{(4)2}D_{Y_4^*} + \\ &+ 2\alpha_{1opt}^{(4)}\alpha_{2opt}^{(4)}k_Y(t_1,t_2) + 2\alpha_{1opt}^{(4)}\alpha_{3opt}^{(4)}k_Y(t_1,t_3) + 2\alpha_{1opt}^{(4)}\alpha_{4opt}^{(4)}k_Y(t_1,t_4) + \\ &+ 2\alpha_{2opt}^{(4)}\alpha_{3opt}^{(4)}k_Y(t_2,t_3) + 2\alpha_{2opt}^{(4)}\alpha_{4opt}^{(4)}k_Y(t_2,t_4) + 2\alpha_{3opt}^{(4)}\alpha_{4opt}^{(4)}k_Y(t_3,t_4) \; . \end{aligned} \qquad (20)$$

Ефективність чотирипараметричного способу оптимальної екстраполяції можна оцінювати за формулами:

h_1 – відношення сигнал/шум після оптимальної екстраполяції:

$$h_1 = \frac{D[Y_5]}{D_\varepsilon(\alpha_{1opt}^{(4)}, \alpha_{2opt}^{(4)}, \alpha_{3opt}^{(4)}, \alpha_{4opt}^{(4)})_{\min}}, \quad (21)$$

де $D[Y_5]$ – дисперсія випадкового процесу, що буде спостерігатися у момент часу t_5, $D_\varepsilon(\alpha_{1opt}^{(4)}, \alpha_{2opt}^{(4)}, \alpha_{3opt}^{(4)}, \alpha_{4opt}^{(4)})_{\min}$ – мінімальна дисперсія похибки екстраполяції.

h_2 – відношення дисперсії випадкового процесу, що буде спостерігатися у момент часу t_5, до дисперсії екстрапольованого значення процесу $D[Y_5*]$

$$h_2 = \frac{D[Y_5]}{D[Y_5^*]}. \quad (22)$$

Для проведення експерименту розроблено схему чотирипараметричного способу оптимальної екстраполяції.

Приклад. Для перевірки дієздатності та ефективності метода проведено експеримент методом статистичного імітаційного моделювання (СІМ). В експерименті була поставлена задача – методом СІМ в системі *MathCAD* [6] встановити часові залежності реалізації наступних випадкових величин: X_i, Y_i (i = 1…15), оптимального екстрапольованого значення Y_5*, а також значення α_{1opt}, α_{2opt}, α_{3opt}, α_{4opt}, $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{min}$, $D[y_5^*]$, h_1, h_2.

Апріорними даними для експерименту вибрані такі значення величин:

t_1=6 с ; t_2=10 с – часові відліки вимірювання параметрів X_i і Y_i ;

t_3=12 с – момент часу для екстраполяції значення Y_3^* ;

t_3=14 с – момент часу для екстраполяції значення Y_4^* ;

t_4=15 с – момент часу для екстраполяції значення Y_5^* ;

m_0 =1 В ; m_1=0,02 В / $\sqrt{c}$ – математичні очікування параметрів a_0, a_1 незалежних випадкових величин, що мають гаусовський розподіл, а σ_0=0,3 В, σ_1=0,002 В – їх середньоквадратичні відхилення ;

σ_ξ=0,01 В – середньоквадратичне відхилення завади ;

γ=0,5 – коефіцієнт нелінійності.

Для проведення експерименту використовують метод СІМ, реалізований у системі *MathCAD* у вигляді програми, розробленій автором. Програма обчислює п’ять реалізацій значення $X(t_i)$ – випадкового нестаціонарного процесу і п’ять реалізацій значення $Y(t_i)$ – випадкового процесу, що спостерігається, та всі параметри ВНП, необхідні для проведення оптимальної екстраполяції і визначення параметрів h_1, h_2, Y_5*, $D[Y_5^*]$, $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{min}$.

За допомогою стандартної функції *MathCAD rnorm* {n, M, y}, де число реалізацій вибране n=1; M – математичне сподівання ВНП; $y=\sigma_i$ – середньоквадратичне відхилення ВНП, обчислюються значення коефіцієнтів a_0 і a_1 і значення завади ξ.

В результаті проведення експерименту очікується отримати наступні результати:

1. Величини – Y_3^*, $D[Y_3^*]$, $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$, Y_4*, $D_\varepsilon(\alpha_{1opt}^{(3)}, \alpha_{2opt}^{(3)}, \alpha_{3opt}^{(3)})_{\min}$, Y_5*, $D[Y_5^*]$, $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{min}$., h_1 , h_2 .

2. Графіки залежності реалізацій $X(i)$, $Y(i)$, $Y_{опт}(t)$ від часу t .

3. Графіки залежностей дисперсії похибки екстраполяції $D\varepsilon(\alpha)$ від параметра α_{1opt}, α_{2opt}, α_{3opt}, α_{4opt} .

Всі результати експерименту наведені в табл. 1.

На рис. 2 наведені графіки реалізацій X_i, Y_i (при i = 1…15) $Y_{opt}(t_3)=Y_3^*$, $Y_{opt}(t_4)=Y_4^*$, $Y_{opt}(t_5)=Y_5^*$.

На рис. 3 наведений графік $D_\varepsilon=f(\alpha_4)$, при α_{1opt}, α_{2opt}, α_{3opt}=*const*.

Таблиця 1. Результати експерименту

X_1	X_2	X_3
0,763763	0,778081	0,784143
X_4	X_5	Y_1
0,789719	0,792356	0,779228
Y_2	Y_3	Y_4
0,782672	0,771722	0,770553
Y_5	α_{1opt}	α_{2opt}
0,791117	0,372499	0,607778
α_{3opt}	α_{4opt}	Y_3^*
0,083702	0,001918	0,789453
Y_4^*	Y_5^*	$D[Y_3^*]$
0,793082	0,833554	0,091996
$D[Y_4^*]$	$D[Y_5^*]$	$D_\varepsilon(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)_{min}$
0,131702	0,102356	0,003144
h_1	h_2	
28,674258	0,880842	

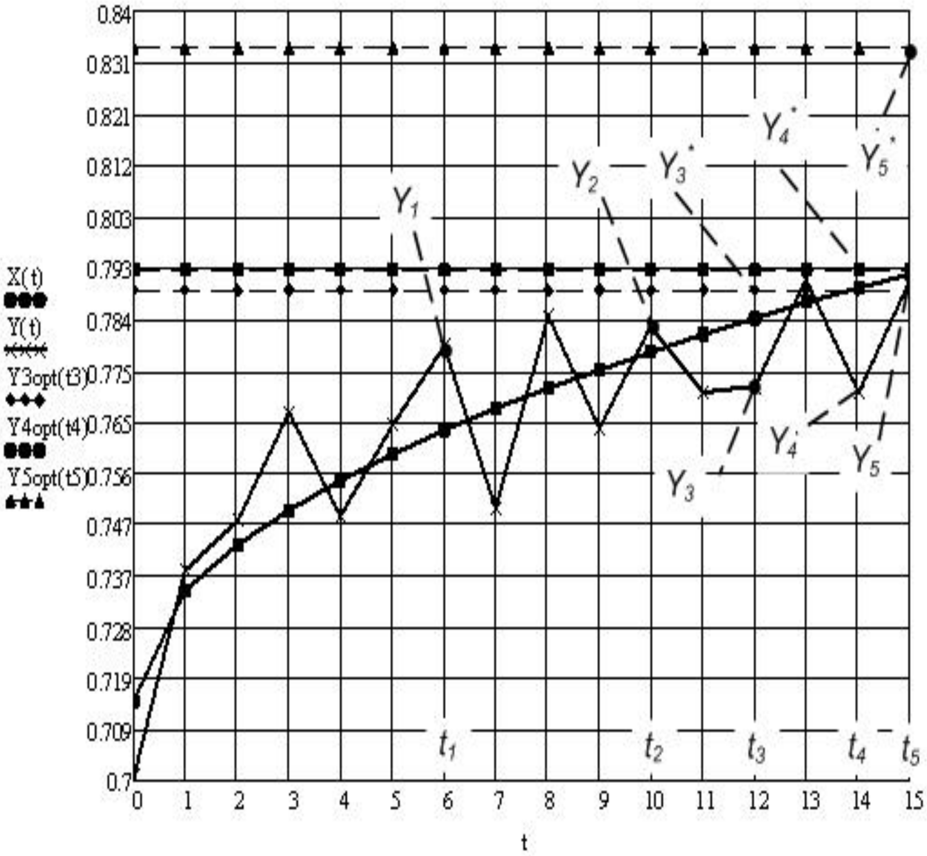

Рис. 2. Графік результатів експерименту

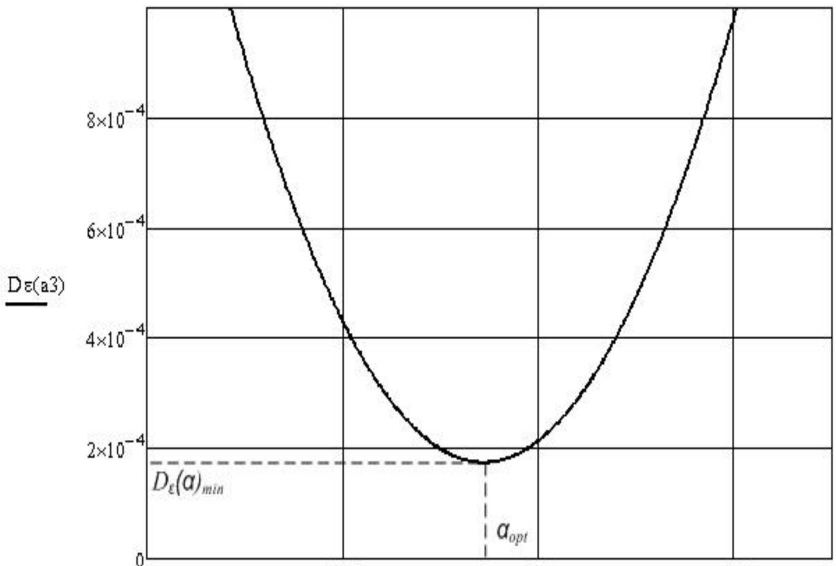

Рис. 3. Графік $D_\varepsilon=f(\alpha_4)$, при α_{1opt}, α_{2opt}, α_{3opt} = *const*

Висновки

Аналіз результатів експерименту показує працездатність і ефективність методу чотирипараметричної екстраполяції.

За результатами експерименту можна зробити наступні висновки:

1. В роботі запропоновано новий метод чотирипараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів на фоні завад, який по двом попереднім значенням сигналу Y_1, Y_2, що спостерігаються, і значенням Y_3^*, $D[Y(t_3)]$, $D[Y_3^*]$, Y_4^*, $D[Y(t_4)]$, $D[Y_4^*]$, які визначені у попередніх ітераціях, дозволяє отримати п'яте прогнозне значення сигналу Y_5^*, та його ймовірностні параметри: $D[Y(t_5)]$, $D[Y_5^*]$, $D_\varepsilon(\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{min}$.

2. Запропонований метод чотирипараметричної екстраполяції передбачає перевірку виконання необхідної та достатньої умов існування мінімуму дисперсії похибки екстраполяції $D_{\varepsilon}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{min}$.

3. З графіка рис. 2 видно, що в момент екстраполяції t =14с екстрапольоване значення Y_4*=Y_{opt} розташоване ближче до реального сигналу X(14) ніж Y_3*=Y_{opt} до X(12), а значення Y_5*=Y_{opt}. розташовано далі від реального сигналу X(15), ніж Y_4*=Y_{opt} до X(14). Крім того, похибка екстраполяції α_{4opt}. на порядок більша ніж для трипараметричного методу $D_{\varepsilon}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_{min}$.

4. З графіка на рис. 3 видно, що дисперсія похибки екстраполяції є мінімальною $D_{\varepsilon}=f(\alpha_4)$, при α_{1opt}, α_{2opt} , $\alpha_{3opt}=const$ і $\alpha=\alpha_{4opt}$. Інші залежності: $D_{\varepsilon}=f(\alpha_1)$, при α_{2opt}, α_{3opt} , $\alpha_{4opt}=const$ і $\alpha=\alpha_{1opt}$; $D_{\varepsilon}=f(\alpha_2)$, при α_{1opt}, α_{3opt}, $\alpha_{4opt}=const$ і $\alpha=\alpha_{2opt}$; $D_{\varepsilon}=f(\alpha_3)$, при α_{1opt}, α_{2opt}, $\alpha_{4opt}=const$ і $\alpha=\alpha_{3opt}$ – будуть такими ж, як на рис. 3.

5. Перевагою методу чотирипараметричної екстраполяції є те, що він дозволяє отримати п'яте значення випадкового нестаціонарного процесу, а недоліком – те, що він дає найбільшу похибку екстраполяції $D_{\varepsilon}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{min}$ у порівнянні з іншими запропонованими методами екстраполяції і більшу дисперсію $D[Y_5^*]$.

6. Таким чином, результати експерименту вказують на те, що метод чотирипараметричної екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на фоні завад працює ефективно, тому мета роботи досягнута.

Список літератури

1. Рекурсивний метод оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / О.В. Андрєєв, В.О. Ігнатов, І.А. Жуков, В.І. Андрєєв. – К.:НАУ, Проблеми інформатизації та управління. Збірник наукових праць. Вип. 3(35), 2011. – С. 13-20.
2. Трипараметричний метод оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / О.В. Андрєєв. – К.:ДУІКТ, Сучасний захист інформації. Збірник наукових праць. №1, 2012. – С. 76-86.
3. Метод оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / В.О. Ігнатов, О.В. Андрєєв, В.І. Андрєєв. – К.:НАУ, Проблеми інформатизації та управління. Збірник наукових праць. Вип. 2(30), 2010. – С. 79-83.
4. Метод двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / В.О. Ігнатов, О.В. Андрєєв, В.І. Андрєєв. – К.:НАУ, Проблеми інформатизації та управління. Збірник наукових праць. Вип. 4(32), 2010. – С. 41-46.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. – 720 с.

Дьяконов В.П. Энциклопедия MathCAD 2001 и MathCAD 11. – М.: Изд. Солон-пресс, 2004. – 832 с.