

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ *OFDM* НА ОСНОВІ ВНУТРІБІТОВОЇ ПСЕВДОВИПАДКОВОЇ ПЕРЕБУДОВИ ПІДНЕСУЧИХ ЧАСТОТ ТА КОДІВ РИДА-СОЛОМОНА

Розроблена математична модель системи OFDM на основі внутрібітрової псевдовипадкової перебудови піднесучих частот та кодів Рида-Соломона. Використання розробленої математичної моделі на практиці дозволить підвищити спектральну та енергетичну ефективність засобів відомчого радіозв'язку.

Вступ

Перспективні системи радіозв'язку спеціального призначення повинні забезпечувати передачу інформації у складній радіоелектронній обстановці [1]. Основним режимом роботи радіозасобів спеціального призначення є режим роботи в умовах впливу навмисних завад.

На сьогоднішній день фізичний рівень мобільних систем відомчого радіозв'язку ґрунтується на використанні технологій розширення спектру сигналів та коригувальних кодів [2, 3]. До основних методів розширення спектру сигналів, які широко застосовуються в сучасних системах радіозв'язку, відносяться метод безпосередньої модуляції несучої псевдовипадковою послідовністю та метод псевдовипадкової перебудови робочої частоти [2, 3]. В якості коригувальних кодів використовуються циклічні коди, коди Рида-Соломона та згортувальні коди [2, 3].

Постановка задачі

Сучасні засоби відомчого радіозв'язку, які використовують технології розширення спектру сигналів і які функціонують в умовах впливу навмисних завад, мають порівняно низьку спектральну та енергетичну ефективність [2, 3].

Засоби мобільного радіозв'язку покоління 4G для підвищення спектральної та енергетичної ефективності застосовують технології ортогонально-частотного мультиплексування *OFDM* (*Orthogonal frequency-division multi-*

plexing) та технології завадостійкого кодування [4, 5]. Однак ці засоби не проектувались для використання в умовах впливу навмисних завад.

Таким чином, виникає завдання розробки систем відомчого зв'язку з урахуванням впливу навмисних завад, які б поєднували технології розширення спектру сигналів, технологію *OFDM* та завадостійке кодування.

Метою роботи є розробка математичної моделі побудови системи *OFDM* на основі внутрібітрової псевдовипадкової перебудови піднесучих частот (ПППЧ) та кодів Рида-Соломона.

Виклад основного матеріалу

Система *OFDM* з внутрібітровою ПППЧ та кодами Рида-Соломона складається з передавальної та приймальної частин. Передавальна та приймальна частини мають у своєму складі наступні елементи: кодер (декодер) Рида-Соломона, кодер (декодер) прямого розширення спектру за допомогою кодів Уолша (розширення/звуження Уолша), модулятор (демодулятор) *OFDM* з ПППЧ, формувачі псевдовипадкових послідовностей. За допомогою кодів Уолша та модулятора сигналу *OFDM* з ПППЧ формується саме система *OFDM* з внутрібітровою ПППЧ.

На рис. 1 та рис. 2 показана спрощена структурна схема архітектури передачі та прийому системи *OFDM* з внутрібітровою ПППЧ та кодами Рида-Соломона.



Рис. 1. Структурна схема архітектури передачі системи OFDM, з внутрібітовою ПППЧ та кодами Ріда-Соломона

Основна ідея методу OFDM полягає в тому, що смуга пропускання каналу розбивається на групу вузьких смуг (субканалів), кожна зі своєю піднесучою. На всіх піднесучих сигнал передається одночасно, що дозволяє забезпечити велику швидкість передачі інформації при невеликій швидкості передачі в кожному окремому субканалі [4]. Сигнал OFDM складається із N ортогональних піднесучих, модульованих N паралельними потоками даних.

Формування підканалів з ортогональними піднесучими відбувається за допомогою процедури зворотного дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) [4]. На практиці процедури зворотного ДПФ (на передаючій стороні) та прямого ДПФ (на прийомній) реалізуються за допомогою алгоритму швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) та виконуються процесором ШПФ [4, 5].



Рис. 2. Структурна схема архітектури прийому системи OFDM, з внутрібітовою ПППЧ та кодами Ріда-Соломона

Структурна схема модулятора сигналу OFDM, каналу з адитивним білим гаусівським шумом і навмисними завадами, та демодулятора сигналу OFDM показана на рис. 3.

Таким чином, функції OFDM-модулятора зводяться до формування складового неперервного сигналу, який містить N піднесучих, більша частина з яких модульовані інформаційними символами на інтервалі T_s [4]:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi k\Delta f t}, \quad (1)$$

де N – кількість піднесучих, $X(k)$ – комплексний модулюючий символ (ФМ-М або КАМ-М), який передається на k -й піднесучій $e^{j2\pi k\Delta f t}$, $\Delta f = 1/T_s$ – частота слідування символів, T_s – тривалість символу.

Реалізація функцій OFDM-модулятора на базі цифрового процесора ШПФ передбачає перехід від безперервного часу до дискретного ($t = nT$), при цьому вираз (1), з урахуванням періоду дискретизації $T = T_s / N$, приймає вигляд [4]:

$$s\left(\frac{n}{N}T_s\right) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi k\frac{n}{N}}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (2)$$

Можна представити $s\left(\frac{n}{N}T_s\right)$, як залежність від $n, s(n)$, і тоді (2) приймає вигляд:

$$s(n) = W^{-1}X(k), \quad k, n = \overline{0, (N-1)}, \quad (3)$$

де W – це матриця розміру $N \times N$ дискретного перетворення Фур'є з елементами:

$$[W]_{k,n} = e^{-j2\pi kn/N}, \quad k, n = \overline{0, (N-1)},$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j4\pi/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi(N-2)/N} & e^{-j4\pi(N-2)/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)(N-2)/N} \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & e^{-j4\pi(N-1)/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{bmatrix}.$$

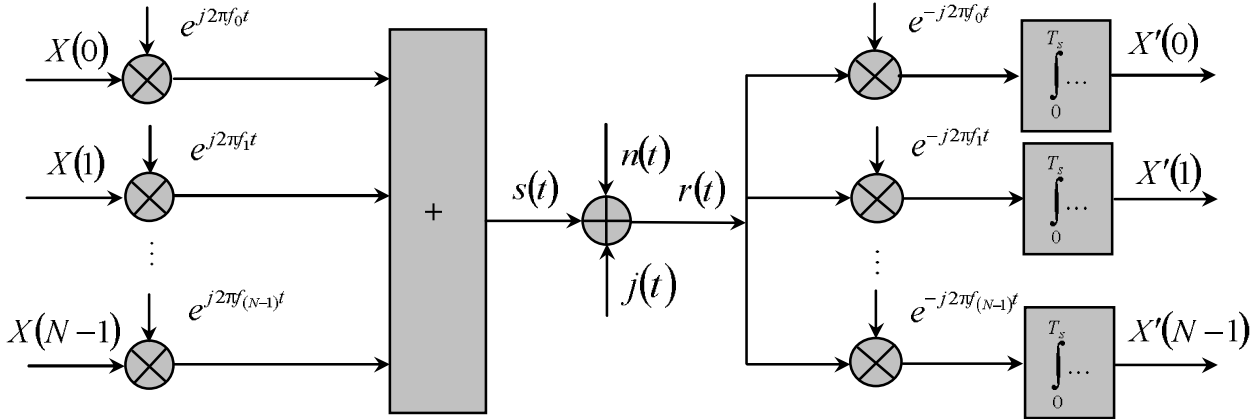


Рис. 3. Структурна схема моделі модулятора сигналу OFDM, каналу з АБГШ і намісними завадами, та демодулятора сигналу OFDM

На приймальній стороні відбуваються наступні перетворення:

$$X'(n) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} [s(t) + n(t)] e^{-j2\pi n \Delta f t} dt, \quad n = \overline{0, N-1}.$$

Для системи OFDM-ПППЧ матрицю зворотнього перетворення Фур'є $[W_F^{-1}]_{k,n}$ можна представити виразом:

$$[W_F^{-1}]_{k,n} = e^{j2\pi n [\Xi]_{k,n} / N}, \quad k, n = \overline{0, (N-1)}.$$

Матриця $[W_F^{-1}]_{k,n}$ дозволяє здійснити розширення спектру сигналу методом псевдовипадкової перебудови піднесучої частоти сиг-

налу OFDM. У виразі (4) матриця $[\Xi]_{k,n}$ формує модель стрибків піднесучих частот.

В звичайній схемі OFDM матриця $[\Xi]_{k,n}$ буде мати наступний вигляд:

$$[\Xi]_{k,n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \\ 0 & 1 & \dots & (N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В цьому випадку $[W_F^{-1}]_{k,n} = [W^{-1}]_{k,n}$:

$$W_F^{-1} = W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j2\pi/N} & e^{j4\pi/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j2\pi(N-2)/N} & e^{j4\pi(N-2)/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)(N-2)/N} \\ 1 & e^{j2\pi(N-1)/N} & e^{j4\pi(N-1)/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{bmatrix}.$$

Матриця $[\Xi]_{k,n}$ отримується наступним виразом:

$$[\Xi]_{k,n} = \text{mod}[(f_n + k), (N-1)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \\ 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (N-1) & 0 & \dots & (N-2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Використовуючи вираз (4), матриця $[W_F^{-1}]_{k,n}$ буде мати наступний вигляд:

$$W_F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j2\pi/N} & e^{j4\pi/N} & e^{j6\pi/N} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{j2\pi(N-2)(N-2)/N} & e^{j2\pi(N-2)(N-1)/N} & 1 & \dots & e^{j2\pi(N-2)(N-3)/N} \\ e^{j2\pi(N-1)(N-1)/N} & 1 & e^{j2\pi(N-1)/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)(N-2)/N} \end{bmatrix}$$

Часова вибірка сигналу *OFDM* з ПППЧ буде мати наступний вигляд:

$$s(n) = W_F^{-1} X(k)$$

Або для $k, n = 0, (N-1)$:

$$\begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{bmatrix} = W_F^{-1} \times \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j2\pi/N} & e^{j4\pi/N} & e^{j6\pi/N} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{j2\pi(N-2)(N-2)/N} & e^{j2\pi(N-2)(N-1)/N} & 1 & \dots & e^{j2\pi(N-2)(N-3)/N} \\ e^{j2\pi(N-1)(N-1)/N} & 1 & e^{j2\pi(N-1)/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)(N-2)/N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

На прийомній стороні необхідно виконати зворотні операції вище описаним.

Формування сигналу *OFDM* з внутрібітовою ПППЧ відбувається за допомогою розширення Уолша.

Нехай $x = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – N комплексних модульованих символів, які передаються. Тоді сигнал $[X(k), k = 0, 1, \dots, N]$, який передається на k -й піднесучій та утворений за допомогою кодів Уолша, прийме вигляд:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = R_N \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де R_N – це матриця Адамара розміром $N \times N$:

$$R_N = \begin{pmatrix} R_{N/2} & R_{N/2} \\ R_{N/2} & -R_{N/2} \end{pmatrix}$$

Перші три матриці Адамара будуть мати наступний вигляд:

$$R_1 = [1], \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Кожен стовбець та кожний рядок матриці Адамара відповідають коду Уолша довжини N . Матриця Адамара – це ортогональна матриця, така, що:

$$R_N^{-1} \times R_N = I_N.$$

Кожний ряд ортогональний всім іншим рядам, кожний стовбець ортогональний всім іншим стовпцям.

Таким чином, сигнал *OFDM* з внутрібітовою ПППЧ прийме вигляд:

$$\begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{bmatrix} = W_F^{-1} \times \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = W_F^{-1} \times R_N \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j2\pi/N} & e^{j4\pi/N} & e^{j6\pi/N} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{j2\pi(N-2)(N-2)/N} & e^{j2\pi(N-2)(N-1)/N} & 1 & \dots & e^{j2\pi(N-2)(N-3)/N} \\ e^{j2\pi(N-1)(N-1)/N} & 1 & e^{j2\pi(N-1)/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)(N-2)/N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_{N/2} & R_{N/2} \\ R_{N/2} & -R_{N/2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Станція навмисних завад випромінює завади в широкому частотному діапазоні. Діапазон частот сигналу, згідно аналітичної залежності (8), залежить від числа субканалів, а ті, в свою чергу, залежать від довжини коду Уолша N , а так як при практичній реалізації розширення Уолша немає необхідності у великих значеннях довжини коду N , то і діапазон частот *OFDM* сигналу, отриманого згідно виразу (8), буде незначний. Для розширення діапазону частот сигналу необхідно збільшити число субканалів. Збільшити число субканалів сигналу можна збільшивши кількість перетворень Уолша для різних реалізацій сигналів. Структурна схема, яка б реалізувала зазначений алгоритм, показана на рис. 4. На рис. 4 на розширювач Уолша 1 поступають побітно інформаційні біти $\{x_i^1\}$, $i = \overline{1, L}$, відповідно на розширювач Уолша M – інформаційні біти $\{x_i^M\}$, $i = \overline{1, L}$. Розширювач Уолша 1 виконує перетворення:

$$\begin{bmatrix} x^1(0) \\ x^1(1) \\ \vdots \\ x^1(K-1) \end{bmatrix} = R_K \times \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_1^1 \\ \vdots \\ x_{(K-1)}^1 \end{bmatrix}.$$

Відповідно розширювач Уолша M виконує наступне перетворення:

$$\begin{bmatrix} x^M(0) \\ x^M(1) \\ \vdots \\ x^M(K-1) \end{bmatrix} = R_K \times \begin{bmatrix} x_0^M \\ x_1^M \\ \vdots \\ x_{(K-1)}^M \end{bmatrix}.$$

Таким чином, формуються матриці $X_K^1 = [x^1(0), x^1(1), \dots, x^1(K-1)]^T$, \dots , $X_K^M = [x^M(0), x^M(1), \dots, x^M(K-1)]^T$. Формувач матриці X_N здійснює об'єднання

матриць X_K^1, \dots, X_K^M в матрицю X_N : $X_N = [X_K^1, X_K^2, \dots, X_K^M]^T$. Модуль зворотного ДПФ виконує операції згідно вище описаного алгоритму за виразом (6).

Для підвищення енергетичної ефективності запропонованої архітектури побудови системи OFDM з внутрібітовою ПППЧ необхідно використати коди Рида-Соломона (рис. 4).

Коди Рида-Соломона (*Reed-Solomon code*,

R-S code) [7] – це недвійкові циклічні коди, символи яких являють собою m -бітові послідовності, де m – позитивне ціле число, більше 1. Коди Рида-Соломона (n, k) визначені на m -бітових символах при всіх n та k , для яких

$$0 < k < n < 2^m + 2, \tag{9}$$

де k – число інформаційних бітів, які підлягають кодуванню, n – число кодових символів у блоці, який кодується.

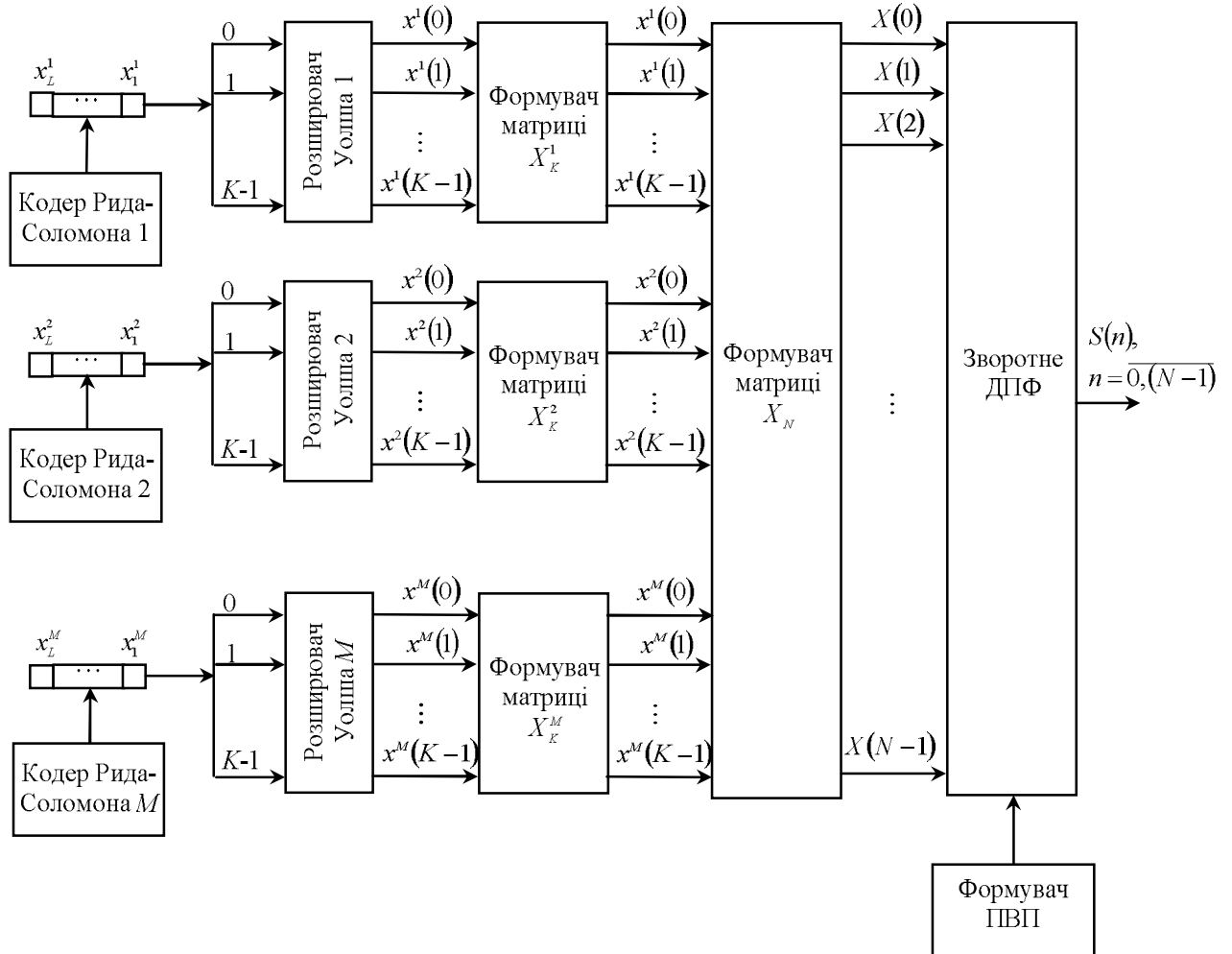


Рис. 4. Структурна схема системи OFDM з внутрібітовою ПППЧ та кодами Рида-Соломона

Оскільки код Рида-Соломона є циклічним, кодування в систематичній формі аналогічно процедурі двійкового кодування. Ми можемо здійснити зсув полінома повідомлення $m(X)$ у крайні праві k розряди регістра кодового слова та зробити наступний додаток полінома $p(X)$ у крайні ліві $n-k$ розряди. Тому ми множимо $m(X)$ на X^{n-k} , проробивши алгебраїчну операцію таким чином, що $m(X)$ виявляється зсуненим вправо на $n-k$ позицій. Далі ми ділимо $X^{n-k}m(X)$ на поліноміальний генератор $g(X)$,

що можна записати таким способом:

$$X^{n-k}m(X) = q(X)g(X) + p(X). \tag{10}$$

Тут $q(X)$ і $p(X)$ – це частка та залишок від поліноміального ділення. Як й у випадку двійкового кодування, залишок буде парним. Рівняння (10) можна переписати таким чином:

$$p(X) = X^{n-k}m(X) \text{ по модулю } g(X). \tag{11}$$

Результуючий поліном кодового слова $U(X)$ можна переписати наступним чином:

$$U(X) = p(X) + X^{n-k}m(X). \quad (12)$$

Продемонструємо кроки, які мають на увазі рівняннями (11) і (12), закодувавши повідомлення із трьох символів:

$$\underbrace{010110111}_{\alpha^1 \quad \alpha^3 \quad \alpha^5}$$

за допомогою коду Ріда-Соломона (7), (3), генератор якого визначається рівнянням $g(X) = \alpha^3 + \alpha^1X + \alpha^0X^2 + X^4$. Спочатку ми

множимо (зсув вгору) поліном повідомлення $\alpha^1 + \alpha^3X + \alpha^5X^2$ на $X^{n-k} = X^4$, що дає $\alpha^1X^4 + \alpha^3X^5 + \alpha^5X^6$.

Далі ми ділимо такий зсунутий вгору поліном повідомлення на поліноміальний генератор з рівняння $\alpha^1X^4 + \alpha^3X^5 + \alpha^5X^6$, $\alpha^3 + \alpha^1X + \alpha^0X^2 + X^4$.

Операції додавання (вирахування) і множення (ділення) при поліноміальному діленні недвійкових коефіцієнтів виконуються відповідно до табл. 1 та табл. 2.

Таблиця 1.

Таблиця додавання для $GF(8)$ для $f(X) = 1 + X + X^3$

	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
α^0	0	α^3	α^6	α^1	α^5	α^4	α^2
α^1	α^3	0	α^4	α^0	α^2	α^6	α^5
α^2	α^6	α^4	0	α^5	α^1	α^3	α^0
α^3	α^1	α^0	α^5	0	α^6	α^2	α^4
α^4	α^5	α^2	α^1	α^6	0	α^0	α^3
α^5	α^4	α^6	α^3	α^2	α^0	0	α^1
α^6	α^2	α^5	α^0	α^4	α^3	α^1	0

Таблиця 2.

Таблиця множення для $GF(8)$ для $f(X) = 1 + X + X^3$

	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
α^0	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
α^1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^0
α^2	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^0	α^1
α^3	α^3	α^4	α^5	α^6	α^0	α^1	α^2
α^4	α^4	α^5	α^6	α^0	α^1	α^2	α^3
α^5	α^5	α^6	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4
α^6	α^6	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5

Поліноміальне ділення дасть у результаті наступний поліноміальний залишок (поліном парності):

$$U(X) = \alpha^0 + \alpha^2X + \alpha^4X^2 + \alpha^6X^3 + \alpha^1X^4 + \alpha^3X^5 + \alpha^5X^6 = (100) + (001)X + (011)X^2 + (101)X^3 + (010)X^4 + (110)X^5 + (111)X^6. \quad (14)$$

Тестове повідомлення кодується в систематичній формі за допомогою коду Ріда-Соломона (7), (3), що дасть у результаті поліном кодового слова, який описується рівнянням (14). Допустимо, що в ході передачі це кодове слово піддалося перекручуванню: 2 символи були прийняті з помилкою. При використанні 7-символьного кодового слова мо-

$$p(X) = \alpha^0 + \alpha^2X + \alpha^4X^2 + \alpha^6X^3. \quad (13)$$

Потім, з рівняння (12), поліном кодового слова можна записати таким способом:

дель помилки можна представити в поліноміальній формі таким способом:

$$e(X) = \sum_{n=0}^6 e_n X^n. \quad (15)$$

Нехай двохсимвольна помилка буде такою, що:

$$\begin{aligned}
 e(X) &= 0 + 0X + 0X^2 + \alpha^2 X^3 + \alpha^5 X^4 + 0X^5 + 0X^6 = \\
 &= (000) + (000)X + (000)X^2 + (001)X^3 + (111)X^4 + (000)X^5 + (000)X^6.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Інакше кажучи, контрольний символ зіпсований 1-бітовою помилкою (представленою як α^2), а символ повідомлення – 3-бітовою помилкою (представленою як α^5). У цьому випадку прийнятий поліном зіпсованого кодового слова $r(X)$ представляється у вигляді суми полі-

нома переданого кодового слова та полінома моделі помилки, як показано нижче:

$$r(X) = U(X) + e(X). \tag{17}$$

Дотримуючись рівняння (17), підсумуємо $U(X)$ з рівняння (14) і $e(X)$ з рівняння (16), маємо наступне:

$$\begin{aligned}
 r(X) &= (100) + (001)X + (011)X^2 + (100)X^3 + (101)X^4 + (110)X^5 + (111)X^6 = \\
 &= \alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + \alpha^0 X^3 + \alpha^6 X^4 + \alpha^3 X^5 + \alpha^5 X^6.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

У даному прикладі виправлення 2-символьної помилки є чотири невідомих – два ставляться до розташування помилки, а два стосуються помилкових значень. При двійковому декодуванні декодера потрібно знати лише розташування помилки. Якщо відомо, де перебуває помилка, біт потрібно поміняти з 1 на 0 або навпаки. Але тут недвійкові символи вимагають, щоб ми не тільки довідалися розташування помилки, але й визначили правильне значення символу, розташованого на цій позиції. Оскільки в даному прикладі в нас є чотири невідомих, нам потрібно чотири рівняння, щоб знайти їх.

Помітимо, як полегшуються обчислення завдяки самій структурі коду, обумовленої рівнянням.

$$U(X) = m(X)g(X). \tag{19}$$

Із цієї структури можна бачити, що кожен правильний поліном кодового слова $U(X)$ є кратним поліноміальному генератору $g(X)$. Отже, корні $g(X)$ також повинні бути коренями $U(X)$. Оскільки $r(X) = U(X) + e(X)$, то $r(X)$, що обчислюється з кожним коренем $g(X)$, повинен давати нуль, тільки якщо $r(X)$ буде правильним кодовим словом. Будь-які помилки приведуть у підсумку до ненульового результату в одному (або більше) випадку. Обчислення символів синдрому можна записати таким способом:

$$S_i = r(X) \Big|_{X = \alpha^i} = r(\alpha^i), \quad i = \overline{1, n-k}. \tag{20}$$

Синдром – це результат перевірки парності, виконуваної над r , щоб визначити, чи належить r набору кодових слів. Якщо r є членом набору, то синдром S має значення, рівне 0. Будь-яке ненульове значення S означає наявність помилок. Точно так само, як й у двійковому випадку, синдром S складається з $n - k$ символів, $\{S_i\}$, $i = \overline{1, n-k}$. Таким чином, для нашого коду (7), (3) є по чотири символу в кожному векторі синдрому; їх значення можна розрахувати із прийнятого полінома $r(X)$.

Як показано в рівнянні (16), $r(X)$ містить 2-символьні помилки. Якщо $r(X)$ виявиться правильним кодовим словом, то це приведе до того, що всі символи синдрому S будуть дорівнювати нулю. У даному прикладі чотири символи синдрому знаходяться наступним способом:

$$\begin{aligned}
 S_1 = r(\alpha) &= \alpha^0 + \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^3 + \alpha^{10} + \alpha^8 + \alpha^{11} = \\
 &= \alpha^0 + \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^8 + \alpha^4 = \alpha^3,
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 = r(\alpha^2) &= \alpha^0 + \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^{14} + \alpha^{13} + \alpha^{17} = \\
 &= \alpha^0 + \alpha^4 + \alpha^1 + \alpha^6 + \alpha^0 + \alpha^6 + \alpha^3 = \alpha^5,
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 S_3 = r(\alpha^3) &= \alpha^0 + \alpha^5 + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^{18} + \alpha^{18} + \alpha^{23} = \\
 &= \alpha^0 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^2 = \alpha^6,
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 S_4 = r(\alpha^4) &= \alpha^0 + \alpha^6 + \alpha^{12} + \alpha^{12} + \alpha^{22} + \alpha^{23} + \alpha^{29} = \\
 &= \alpha^0 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^5 + \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^1 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Результат підтверджує, що прийняте кодове слово містить помилку (введена нами), оскільки $S \neq 0$.

Допустимо, що у кодовому слові є v помилок, розташованих на позиціях $X^{j_1}, X^{j_2}, \dots, X^{j_v}$. Тоді поліном помилок, обумовлений рівняннями (15) і (16), можна записати таким способом:

$$e(X) = e_{j_1} X^{j_1} + e_{j_2} X^{j_2} + \dots + e_{j_v} X^{j_v}. \quad (25)$$

Індекси $1, 2, \dots, v$ позначають 1-у, 2-у, ..., v -у помилки, а індекс j – розташування помилки. Для корекції перекрученого кодового слова потрібно визначити кожне значення помилки e_{j_l} і її розташування X^{j_l} , де $l = \overline{1, v}$. Позначимо номер локатора помилки як $\beta_l = \alpha^{j_l}$. Далі обчислюємо $n - k = 2t$ символи синдрому, підставляючи α у прийнятий поліном при $i = 1, 2, \dots, 2t$.

$$S_1 = r(\alpha) = e_{j_1} \beta_1 + e_{j_2} \beta_2 + \dots + e_{j_v} \beta_v,$$

$$S_2 = r(\alpha^2) = e_{j_1} \beta_1^2 + e_{j_2} \beta_2^2 + \dots + e_{j_v} \beta_v^2,$$

⋮

$$S_{2t} = r(\alpha^{2t}) = e_{j_1} \beta_1^{2t} + e_{j_2} \beta_2^{2t} + \dots + e_{j_v} \beta_v^{2t}.$$

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{t-1} & S_t \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_t & S_{t+1} \\ & & & \ddots & & \\ S_{t-1} & S_t & S_{t+1} & \dots & S_{2t-3} & S_{2t-2} \\ S_t & S_{t+1} & S_{t+2} & \dots & S_{2t-2} & S_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_{t-1} \\ \vdots \\ \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{t+1} \\ -S_{t+2} \\ \vdots \\ -S_{2t-1} \\ -S_{2t} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Для цього було використано авторегресійною моделлю рівняння (28), взявши матрицю найбільшої розмірності з ненульовим визначником. Для коду (7), (3) з корекцією двохсимвольних помилок матриця буде мати розмірність 2×2 і модель запишеться таким способом:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

Отже, маємо $2t$ невідомих (t значень помилок і t розташувань) і система $2t$ рівнянь. Втім, цю систему $2t$ рівнянь не можна вирішити звичайним шляхом, оскільки рівняння в ній нелінійні (деякі невідомі входять у рівняння в ступені). Методика, що дозволяє вирішити цю систему рівнянь, називається алгоритмом декодування Рида-Соломона.

Якщо обчислено ненульовий вектор синдрому (один або більше його символів не дорівнюють нулю), це означає, що була прийнята помилка. Далі потрібно довідатися розташування помилки (або помилок). Поліном локатора помилок можна визначити таким способом:

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= (1 + \beta_1 X)(1 + \beta_2 X) \dots (1 + \beta_v X) = \\ &= 1 + \sigma_1 X + \sigma_2 X^2 + \dots + \sigma_v X^v. \end{aligned} \quad (27)$$

Коренями $\sigma(X)$ будуть $1/\beta_1, 1/\beta_2, \dots, 1/\beta_v$. Величини, зворотні корінням $\sigma(X)$, будуть представляти номери розташувань моделей помилки $e(X)$. Тоді, скориставшись авторегресійною технікою моделювання, ми складемо із синдромів матрицю, у якій перші t синдромів будуть використовуватися для передбачення наступного синдрому:

$$\begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^6 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Щоб знайти коефіцієнти σ_1 й σ_2 полінома локатора помилок $\sigma(X)$, спочатку необхідно обчислити зворотну матрицю для рівняння (30). Зворотна матриця для матриці $[A]$ визначається таким способом:

$$\text{Inv}[A] = \frac{\text{cofactor}[A]}{\det[A]}. \quad (31)$$

Отже,

$$\det \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^6 \end{bmatrix} = \alpha^3\alpha^6 - \alpha^5\alpha^5 = \alpha^9 + \alpha^{10} = \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^5, \tag{32}$$

$$\text{cofactor} \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^6 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^3 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \text{Inv} \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^6 \end{bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} \alpha^6 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^3 \end{bmatrix}}{\alpha^5} = \alpha^{-5} \begin{bmatrix} \alpha^6 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^3 \end{bmatrix} = \\ &= \alpha^2 \begin{bmatrix} \alpha^6 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^8 & \alpha^7 \\ \alpha^7 & \alpha^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^1 & \alpha^0 \\ \alpha^0 & \alpha^5 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{34}$$

Якщо зворотна матриця обчислена правильно, то добуток вихідної й зворотної

матриці повинен дати одиничну матрицю;

$$\begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 & \alpha^0 \\ \alpha^0 & \alpha^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^4 + \alpha^5 & \alpha^3 + \alpha^{10} \\ \alpha^6 + \alpha^6 & \alpha^5 + \alpha^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

За допомогою рівняння (26) почнемо пошук положень помилок з обчислення коефіцієнтів

полінома локатора помилок $\sigma(X)$, як показано далі:

$$\begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^6 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^7 \\ \alpha^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^6 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

З рівнянь (36) і (37):

$$\sigma(X) = \alpha^0 + \sigma_1 X + \sigma_2 X^2 = \alpha^0 + \alpha^6 X + \alpha^0 X^2. \tag{37}$$

Корні $\sigma(X)$ є оберненими числами до положень помилок. Після того як ці корені знайдені, ми знаємо розташування помилок. Взагалі, корені $\sigma(X)$ можуть бути одним або декількома елементами поля. Визначимо ці корені шляхом повної перевірки полінома $\sigma(X)$ з усіма елементами поля, як буде показано нижче. Любий елемент X , що дає $\sigma(X) = 0$, є коренем, що дозволяє нам визначити розташування помилки.

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha^0) &= \alpha^0 + \alpha^6 + \alpha^0 = \alpha^6 \neq 0 \\ \sigma(\alpha^1) &= \alpha^2 + \alpha^7 + \alpha^0 = \alpha^2 \neq 0 \\ \sigma(\alpha^2) &= \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^0 = \alpha^6 \neq 0 \\ \sigma(\alpha^3) &= \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^0 = 0 \Rightarrow \text{Помилка} \\ \sigma(\alpha^4) &= \alpha^8 + \alpha^{10} + \alpha^0 = 0 \Rightarrow \text{Помилка} \\ \sigma(\alpha^5) &= \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^0 = \alpha^2 \neq 0 \\ \sigma(\alpha^6) &= \alpha^{12} + \alpha^{12} + \alpha^0 = \alpha^0 \neq 0 \end{aligned}$$

Як видно з рівняння (27), розташування помилок є зворотною величиною до коренів полінома. А значить $\sigma(\alpha^3) = 0$ означає, що один корінь отримується при $1/\beta_l = \alpha^3$. Звідси $\beta_l = 1/\alpha^3 = \alpha^4$. Аналогічно $\sigma(\alpha^4) = 0$ означає, що інший корінь з'являється при $1/\beta_l = 1/\alpha^4 = \alpha^3$, де (у даному прикладі) l та l' позначають 1-у і 2-у помилки. Оскільки ми маємо справу з 2-символьними помилками, поліном помилок можна записати таким чином:

$$e(X) = e_{j_1} X^{j_1} + e_{j_2} X^{j_2}. \quad (38)$$

В результаті чого були знайдені дві помилки на позиціях α^3 і α^4 . Помітимо, що індексація номерів розташування помилок є суцільно довільною. Отже, у цьому прикладі ми позначили величини $\beta_l = \alpha^{j_l}$ як $\beta_1 = \alpha^{j_1} = \alpha^3$ і $\beta_2 = \alpha^{j_2} = \alpha^4$.

Позначимо помилки e_{j_l} , де індекс j вказує на розташування помилки, а індекс l – l -у помилку. Оскільки кожне значення помилки пов'язане з конкретним місцем розташування,

систему позначень можна спростити, позначивши e_{j_l} просто як e_l . Втхначивши порядок знаходження значень помилок e_1 і e_2 , пов'язаних з позиціями $\beta_1 = \alpha^3$ та $\beta_2 = \alpha^4$, можна використати кожне із чотирьох синдромних рівнянь. Виразимо з рівняння (15) S_1 й S_2 .

$$\begin{aligned} S_1 &= r(\alpha) = e_1 \beta_1 + e_2 \beta_2 \\ S_2 &= r(\alpha) = e_1 \beta_1^2 + e_2 \beta_2^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Ці рівняння можна представити у матричній формі наступним чином:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^5 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Щоб знайти значення помилок e_1 і e_2 , потрібно визначити зворотню матрицю для рівняння (41).

$$\begin{aligned} \text{Inv} \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^1 \end{bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} \alpha^1 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^3 \end{bmatrix}}{\alpha^3 \alpha^1 - \alpha^6 \alpha^4} = \frac{\begin{bmatrix} \alpha^1 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^3 \end{bmatrix}}{\alpha^4 - \alpha^3} = \\ &= \alpha^{-6} \begin{bmatrix} \alpha^1 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^3 \end{bmatrix} = \alpha^1 \begin{bmatrix} \alpha^1 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha^5 \\ \alpha^7 & \alpha^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha^5 \\ \alpha^0 & \alpha^4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

Тепер ми можемо знайти з рівняння (41)

значення помилок.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha^5 \\ \alpha^0 & \alpha^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^5 + \alpha^{10} \\ \alpha^3 + \alpha^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^5 + \alpha^3 \\ \alpha^3 + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^5 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

З рівнянь (38) і (42) ми знаходимо поліном

помилки.

$$e(X) = e_{j_1} X^{j_1} + e_{j_2} X^{j_2} = \alpha^2 X^3 + \alpha^5 X^4. \quad (44)$$

Показаний алгоритм відновлює прийнятий поліном, видаючи в підсумку передбачуване

передане кодове слово й, в остаточному підсумку, декодоване повідомлення.

$$U(X) = r(X) + e(X) = U(X) + e(X) + e(X),$$

$$r(X) = (100) + (001)X + (011)X^2 + (100)X^3 + (101)X^4 + (110)X^5 + (111)X^6,$$

$$e(X) = (000) + (000)X + (000)X^2 + (001)X^3 + (111)X^4 + (000)X^5 + (000)X^6, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} U(X) &= (100) + (001)X + (011)X^2 + (101)X^3 + (010)X^4 + (110)X^5 + (111)X^6 = \\ &= \alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + \alpha^0 X^3 + \alpha^6 X^4 + \alpha^3 X^5 + \alpha^5 X^6. \end{aligned}$$

Оскільки символи повідомлення містяться в крайніх правих $k = 3$ символах, декодованим буде наступне повідомлення:

$$\underbrace{010110111}_{\alpha^1 \quad \alpha^3 \quad \alpha^5}$$

Це повідомлення в точності відповідає тому, що було обране для цього приклада.

Висновки

Розроблена математична модель побудови системи *OFDM* на основі внутрібітової псевдовипадкової перебудови піднесучих частот та кодів Рида-Соломона.

Отримані результати можна використати на практиці для підвищення енергетичної та частотної ефективності відомчих засобів радіозв'язку.

Напрямок подальших досліджень вважається розробка методу підвищення достовірності передачі інформації за рахунок відключення підканалів системи *OFDM* з внутрібітовою перебудовою піднесучих частот та кодів Рида-Соломона, які найбільш уражені навмишними завадами.

Список літератури

1. Слюсар В. Системы ММО: принципы построения и обработка сигналов / В. Слюсар

// Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2005. – № 8. – С. 52-58.

2. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов методом псевдослучайной перестройки рабочей частоты / [Борисов В.И., Зинчук В.М., Лимарев А.Е. и др.]. – М.: Радио и связь, 2000. – 384 с.

3. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью / [Борисов В.И., Зинчук В.М., Лимарев А.Е. и др.]. – М.: Радио и связь, 2003. – 640 с.

4. Khan F. LTE for 4G Mobile Broadband. Air Interface Technologies and Performance / Khan F. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 509 p.

5. Cho Y. MIMO-OFDM Wireless Communications with Matlab / Cho Y., Kim J., Yang W. [et al.]. – Singapore: John Wiley & Sons, 2010. – 457 p.

6. Ergen M. Mobile Broadband. Including Wimax and LTE / Ergen M. – Berkeley: Springer Science+Business Media, 2009. – 515 p.

7. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение, 2-е издание / Скляр Б. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.