УДК 519.65+681.518.2

Денисюк В.П., д.ф.-м.н.

МЕТОДИ ПОКРАЩЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР'Є ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Національний авіаційний університет

Запропоновано метод фантомної функції покращення збіжності тригонометричних рядів Фур'є, заснований на попередньому стисканні функції та її подальшому продовженні з допомогою многочленів Ерміта; також запропоновано метод фантомних вузлів покращення збіжності тригонометричних інтерполяційних многочленів, заснований на стисканні відрізку інтерполяції та додаванні до послідовності інтерполяційних вузлів певної кількості фантомних вузлів; значення у доданих фантомних вузлах обчислюються з допомогою многочленів Ерміта або підбираються певним чином. Проведено контрольні обчислення з використанням обох методів; результати цих контрольних обчислень добре узгоджуються із теоретичними положеннями і демонструють ефективність запропонованих методів.

Вступ

В задачах науки і техніки часто в ролі математичних моделей певних процесів виступають тригонометричні многочлени. У випадку, коли є відомим аналітичне подання цих процесів, ці многочлени являють собою скінченні суми тригонометричних рядів Фур'є; у тих же випадках, коли інформація про процес подається у вигляді дискретних рівновіддалених відліків застосовуються тригонометричні інтерполяційні многочлени. Інтерполяційні тригонометричні многочлени можна розглядати як скінченні суми рядів Фур'є, коефіцієнти яких обчислюються наближено составним методом трапецій [1]. При застосуванні тригонометричних рядів Фур'є, як і будь яких рядів взагалі, слід приділяти увагу питанням збіжності цих рядів.

Застосування як скінченних сум тригонометричних рядів Фур'є так і тригонометричних інтерполяційних многочленів в задачах моделювання має певні особливості, які і аналізуються в цій роботі.

Метод фантомної функції покращення збіжності скінченних сум рядів Фур'є

Нехай $f(x)$ – кусково – диференційовна функція, задана на скінченному відрізку $[-\pi,\pi]$; як відомо, такі функції можуть мати скінченну кількість розривів першого роду як самої функції так і її похідних. Припустимо, що функції $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ є неперервними на $(-\pi,\pi)$, за винятком точок $\xi_\mu, (\mu = 1, 2, \ldots, m)$, де всі ці функції мають стрибки, відповідно рівні $\delta_\mu^{(0)}, \delta_\mu^{(1)}, \ldots, \delta_\mu^{(k-1)}$. До цих точок необхідно додати і точку $\xi_0 = -\pi$, якщо різниці

$$\delta_0^{(0)} = f(-\pi+0) - f(\pi-0);$$

$$\delta_0^{(1)} = f'(-\pi+0) - f'(\pi-0);$$

$$\ldots$$

$$\delta_0^{(k-1)} = f^{(k-1)}(-\pi+0) - f^{(k-1)}(\pi-0);$$

відмінні від нуля, оскільки при періодичному продовженні функції в цій точці виникають розриви. Інакше кажучи, слід враховувати, що насправді в ряд Фур'є розкладається не функція $f(x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, а періодична функція $f^*(x)$, $x \in [-\infty,\infty]$, отримана періодичним продовженням функції $f(x)$, $x \in (-\pi,\pi]$ на всю чисельну вісь з періодом 2π, і яка співпадає з функцією $f(x)$ на проміжку $x \in (-\pi,\pi]$. При періодичному ж продовженні функції $f(x)$, $x \in (-\pi,\pi]$ з періодом 2π на всю чисельну вісь, в загальному випадку в точках $\pm(2k+1)\pi$ виникають розриви першого роду типу стрибка як самої функції, так і її похідних.

Припустимо також, що всюди (за винятком точок $\xi_\mu, (\mu = 1, 2, \ldots, m)$, існує похідна $f^{(k)}$, яка на $[-\pi,\pi]$ є функцією обмеженої варіації. Позначимо

$$A_n^{(i)} = -\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(i)}\sin n\xi_\mu;$$

$$B_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{m}\delta_\mu^{(i)}\cos n\xi_\mu.$$

Тоді для коефіцієнтів Фур'є a_n і b_n, що обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

мають місце формули (відповідно при k непарному і k парному):

$$a_n = \frac{A_n^{(0)}}{n} - \frac{B_n^{(1)}}{n^2} - \frac{A_n^{(2)}}{n^3} + \frac{B_n^{(3)}}{n^4} + \ldots \begin{cases} +(-1)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right), \\ +(-1)^{\frac{k}{2}}\dfrac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right). \end{cases}$$

$$b_n = \frac{B_n^{(0)}}{n} + \frac{A_n^{(1)}}{n^2} - \frac{B_n^{(2)}}{n^3} - \frac{A_n^{(3)}}{n^4} + \ldots \begin{cases} +(-1)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right), \\ +(-1)^{\frac{k}{2}}\dfrac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right). \end{cases}$$

Ці формули нескладно отримати, інтегруючи вирази для коефіцієнтів Фур'є по частинах $k-1$ разів та подаючи отримувані інтеграли Стільт'єса через інтеграли Рімана.

Із наведених формул випливає, що наявність розривів як самої функції так і її похідних знижує порядок спадання коефіцієнтів Фур'є і, відповідно, погіршує апроксимативні властивості рядів Фур'є. Зокрема, зрозуміло, що за ознакою Вейєрштрасса ряд Фур'є збігається рівномірно до функції $f(x)$, якщо $A_n^{(0)}$ та $B_n^{(0)}$ дорівнюють нулю.

Якщо функція, задана на відрізку $[-\pi, \pi]$, є неперервною та має неперервні похідні до k-го порядку включно на цьому проміжку, то при періодичному продовженні з періодом 2π на всю числову вісь в загальному випадку виникають розриви першого роду типу стрибка як у самої функції так і її похідних. Зрозуміло, що в цьому випадку ряд Фур'є не може збігатися рівномірно.

Природно виникає питання, чи можна якимось чином виправити таку ситуацію і все ж таки отримати рівномірну збіжність часткових сум ряду Фур'є до досить гладкої функції $f(x)$.

Відповідь на це питання є ствердною; для покращення збіжності часто застосовують методи λ-підсумовування рядів Фур'э [2, 3]. Проте можна запропонувати метод фантомної функції, який полягає в наступному.

Нехай функцію $f(x)$, задано на відрізку $[0, 2\pi]$. Задамо деякий параметр α, $(0 < \alpha < 2\pi)$ і відобразимо функцію $f(x)$ на проміжок $[0, 2\pi - \alpha]$. Це нескладно зробити шляхом лінійної заміни змінної x на змінну t таким чином:

$$t = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}x .$$

Побудуємо фантомну функцію $\lambda(\alpha, t)$ таким чином:

$$\lambda(\alpha, t) = f(0) + \frac{f(2\pi) - f(0)}{\alpha}(2\pi - t), \quad t \in (2\pi - \alpha, 2\pi).$$

Розглянемо функцію:

$$\varphi(t, \alpha) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, 2\pi - \alpha] \\ \lambda(\alpha, t), & t \in (2\pi - \alpha, 2\pi) \end{cases}.$$

Продовжимо функцію $\varphi(t, \alpha)$, $t \in [0, 2\pi)$ з періодом 2π на всю чисельну вісь. Зрозуміло, що отримана періодична функція є неперервною і задовольняє умові Ліпшица рівномірної збіжності на будь якому відрізку чисельної вісі (як кусково-диференційовна функція);

отже, її ряд Фур'є збігається рівномірно, а на відрізку $[0, 2\pi-\alpha]$ збігається рівномірно до функції $f(t)$, оскільки $\varphi(t,\alpha)\equiv f(t)$, $t\in[0, 2\pi-\alpha]$. Ряд Фур'є функції $\varphi(t,\alpha)$ має вигляд:

$$S(t,\alpha)=\frac{4\pi}{\alpha(2\pi-\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\cos k\alpha-1}{k^2}\cos kt-\frac{\sin k\alpha}{k^2}\sin kt\right].$$

Оскільки коефіцієнти ряду Фур'є мають порядок спадання $O(k^{-2})$; отже, за ознакою Вейерштрасса ряд збігається рівномірно на всьому відрізку $[0, 2\pi]$, зокрема і на відрізку $[0, 2\pi-\alpha]$.

У випадку, коли функція $f(x)\in C_{[0,2\pi]}^{k-1}$, отриманий результат можна значно підсилити шляхом забезпечення неперервності похідних вищих порядків. Побудуємо фантомну функцію $\lambda(t)$, $t\in(2\pi-\alpha, 2\pi)$ виходячи з умов:

$$\lambda(2\pi-\alpha)=f(2\pi)\,;\lambda(2\pi)=f(0);$$

$$\lambda'(2\pi-\alpha)=f'(2\pi)\,;\lambda'(2\pi)=f'(0);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$\lambda^{(k-1)}(2\pi-\alpha)=f^{(k-1)}(2\pi)\,;$$

$$\lambda^{(k-1)}(2\pi)=f^{(k-1)}(0).$$

Таку функцію нескладно побудувати, використовуючи інтерполяційний многочлен Ерміта. Розглядаючи тепер функцію

$$\varphi(t)=\begin{cases}f(t)\ , & t\in[0, 2\pi-\alpha]\\ \lambda(t)\ , & t\in(2\pi-\alpha, 2\pi)\end{cases},$$

і продовжуючи її періодичним чином з періодом 2π на всю чисельну вісь, легко бачити, що сама функція та її похідні до $k-1$-го порядку включно є неперервними на всій чисельній вісі; отже, розриви буде мати лише похідні k-го порядку. Згідно з формулами (1), коефіцієнти Фур'є a_n, b_n в цьому випадку мають порядок спадання $O(n)^{-(k+1)}$.

Метод фантомних вузлів покращення збіжності інтерполя-ційних тригонометричних многочленів

Як і раніше, на відрізку $[0,2\pi]$ розглянемо функцію $f(t)$. Задавши кількість вузлів інтерполяції N, продискретизуємо функцію $f(t)$ з кроком $h=2\pi\frac{i-1}{N}$. Обчисливши значення функції у вузлах інтерполяції, побудуємо тригонометричний інтерполяційний многочлен. Тут доцільно зробити таке зауваження. Взагалі кажучи, інтерполяційний тригонометричний многочлен $T_N(t)$ інтерполює функцію $f(t)$ в $N+1$ точках, заданих на відрізку 2π. Справа в тому, що в точці 2π значення цього многочлена є визначеним і, внаслідок періодичності, $T_N(2\pi)=T_N(0)$. Тому інтерполяцію многочленом $T_N(t)$ ми будемо розглядати лише на відрізку інтерполяції $2\pi-h$, вказуючи кожний раз цей відрізок.

Легко бачити, що тригонометричний інтерполяційний многочлен має такі ж вади, що і розглянуті раніше ряди Фур'є; і в цьому випадку запропонуємо метод покращення збіжності, який будемо називати методом фантомних вузлів.

Цей метод полягає в наступному. Додамо до послідовності вузлів інтерполяції з правого боку парну кількість фантомних вузлів; значення в цих фантомних вузлах будемо підбирати із врахуванням оцінок похідних, в ролі яких виступають поділені різниці. Зауважимо, що парна кількість точок вибирається лише для того, щоб загальна кількість вузлів інтерполяції була непарною. В результаті такої операції в більшості випадків значно зменшується похибка інтерполяції на відрізку інтерполяції.

При застосуванні запропонованого методу фантомних вузлів важливим питанням є вибір значень інтерполяційної послідовності у фантомних вузлах. Хоча в більшості випадків це і не становить суттєвої проблеми, в загальному випадку ці значення можна вибирати, використовуючи значення многочленів Ерміта, які будуються по значеннях функції та значеннях поділених різниць. Вибір фантомних значень таким методом є нескладним, хоча зменшення похибки інтерполяції в багатьох випадках є меншим, аніж при підібраних значеннях.

Так, зокрема, розглядався випадок, коли в ролі функції $f(t)$ вибиралася пряма вигляду $f(t)=t+1$, $t\in[0,2\pi]$. На відрізку $[0,2\pi]$ задавалося 9 вузлів інтерполяції і обчислювалися значення функції у цих точках. По цих вузлах інтерполяції будувався тригонометричний інтерполяційний многочлен і обчислювалася похибка інтерполяції. Потім додавалися два фантомні вузли інтерполяції, значення в яких обчислювалися з допомогою многочлену Ерміта; цей многочлен будувався із врахуванням оцінок похідних, в ролі яких виступали поділені різниці інтерпольованої функції. По послідовності тепер вже 11 точок будувався тригонометричний інтерполяційний многочлен і знову обчислювалася похибка інтерполяції. В результаті порівняння цих двох значень похибки інтерполяції виявилося, що значення похибки інтерполяції функції $f(t)$ з двома фантомними вузлами зменшилося майже у 7 разів.

В іншому випадку розглядалася функція $f(t)=.4\exp(t)$, $t\in[0,2\pi]$. Було задано дев'ять точок інтерполяції і будувався інтерполяційний тригонометричний многочлен. При 2-х фантомних вузлах похибка інтерполяції зменшувалася більше ніж в 12 разів.

Висновки

Запропоновано метод фантомної функції покращення збіжності тригонометричних рядів Фур'є, заснований на попередньому стисканні функції та її подальшого продовження з допомогою многочленів Ерміта; також розглянуто метод фантомних вузлів покращення збіжності тригонометричних інтерполяційних многочленів, заснований на стисканні відрізку інтерполяції та додаванні до послідовності інтерполяційних вузлів певної кількості фантомних вузлів; значення у доданих фантомних вузлах підбираються певним чином, або обчислюються з допомогою многочленів Ерміта. Проведено контрольні обчислення з використанням обох методів; результати цих обчислень добре узгоджуються з теоретичними положеннями і демонструють ефективність запропонованих методів.

Список літератури

1. Денисюк В.П. Сплайни та сигнали. – К.: ЗАТ «ВІПОЛ», 2007. – 228 с.

2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

3. Р.В. Хемминг. Численные методы. – М.: Наука, 1968. – 400 с.