

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ НА ПІДСТАВІ ТЕНЗОРНИХ ІНВАРІАНТІВ

Інститут комп'ютерних технологій
Національного авіаційного університету

Досліджено технологію прогнозування так званих «розріджених» рядів на підставі їх структурування і показано доцільність використання такої методології. Наведені приклади того, що тензорні характеристики (перший, другий і третій інваріанти) можуть використовуватися для прогнозування часових рядів

Вступ

Прогнозування є актуальною проблемою. Актуальність проблеми прогнозування в наш час зумовлена такими чинниками.

1. Ускладнились процеси розвитку суспільного життя в умовах НТР.

2. Значно розширились обсяг і масштаби прогностичної діяльності, кількісна і якісна багатоманітність об'єктів прогнозування.

3. Зросла соціальна, економічна, екологічна, інформаційна цінність прогнозів. Ставши надбанням суб'єктів управління і планування, прогнози активно впливають на сьогодення, допомагають запобігати або зводити до мінімуму небажані наслідки розвитку тих чи інших процесів у майбутньому.

Особливо важливе значення прогнозування має в таких сферах і областях як виробництво, економіка, комерція (прогнозування різних економічних показників, динаміки цін, курсу акцій) та інші.

Формалізовані методи для прогнозування основані на статистичних і ймовірнісних характеристиках. Поряд з цими методами все більшого поширення набуває теорія штучних нейронних мереж. Штучні нейронні мережі складаються з елементів, функціональні можливості яких, подібні до функцій біологічного нейрона. Вони можуть навчатися, використовуючи попередній досвід, узагальнювати і виокремлювати ознаки з інформації, яка надається.

Часто виникають ситуації, коли необхідно за наявною інформацією X , визначити величину Y , яка пов'язана з X , але її неможливо безпосередньо підрахувати. В загальному випадку X визначає деяку сукупність $\{X_1, X_2, \dots\}$ величин, які виступають в якості початкових даних для прогнозування і побудови функції $\Phi(X)$, яка могла б використовуватися для визначення Y . Розробка методів побудови такої функції і складає головну задачу прогнозування [1].

Класифікація методів прогнозування

Бурхливий розвиток прогнозування в останні десятиліття призвів до створення безлічі методів, процедур, прийомів прогнозування, далеко не еквівалентні за своїм значенням. Але чітка класифікації відсутня.

За оцінками спеціалістів налічується понад 150 методів прогнозування. Число базових методів прогнозування, які в тих чи інших варіаціях повторюються в інших методах, набагато менше. Багато з цих «методів» належать скоріше до окремих прийомів або процедур прогнозування, інші представляють набір окремих прийомів, які відрізняються від базових або один від одного кількістю приватних прийомів і послідовністю їх застосування.

В літературі – є велика кількість класифікаційних схем методів прогнозування. Проте більшість із них неприйнятні або недостатньо повні. Основною по-

хибкою існуючих класифікаційних схем є порушення принципів класифікації. До числа основних таких принципів відносяться: достатня повнота охоплення методів прогнозування, єдність класифікаційної ознаки на кожному рівні, відсутність перетину розділів класифікації, відкритість класифікаційної схеми (можливість доповнення новими методами). Безумовно, мають право на існування приватні класифікаційні схеми, призначені для певної мети або завдання.

Згідно з [2] можна виділити наступну триступеневу класифікацію методів. Кожен рівень деталізації визначається своєю класифікаційною ознакою: ступенем формалізації, загальним принципом дії, методом отримання прогнозованої інформації.

За ступенем формалізації всі методи прогнозування поділяються на інтуїтивні та формалізовані. Інтуїтивне прогнозування застосовується тоді, коли об'єкт прогнозування або занадто простий, або настільки складний, що аналітично врахувати вплив багатьох факторів практично неможливо. У цих випадках вдаються до опитування експертів. Отримані індивідуальні та колективні експертні оцінки використовують як кінцеві прогнози або в якості вихідних даних у комплексних системах прогнозування.

У виборі методів прогнозування важливим показником є глибина прогнозу. При цьому необхідно не тільки знати абсолютну величину цього показника, але і віднести його до тривалості еволюційного циклу розвитку об'єкту прогнозування. Для цього можна використовувати запропонований В. Білоконем безрозмірний показник глибини (дальності) прогнозування (τ):

$$\tau = \frac{\Delta t}{t_x},$$

де Δt – абсолютний час попередження;
 t_x – величина еволюційного циклу об'єкта прогнозування.

Формалізовані методи прогнозування є дієвими, якщо величина глибини по-

передження укладається в рамки еволюційного циклу ($\tau \ll 1$). При виникненні в рамках прогнозного періоду «стрибка» в розвитку об'єкта прогнозування ($\tau \approx 1$) необхідно використовувати інтуїтивні методи як для визначення сили «стрибка», так і для оцінки часу його здійснення. У цьому випадку формалізовані методи застосовуються для оцінки еволюційних ділянок розвитку до і після стрибка. А коли в прогнозованому періоді укладається кілька еволюційних циклів розвитку об'єкта прогнозування ($\tau \gg 1$), то при комплексуванні систем прогнозування більше значення мають інтуїтивні методи.

Залежно від загальних принципів дії інтуїтивні методи прогнозування, наприклад, можна розділити на дві групи: індивідуальні експертні оцінки та колективні експертні оцінки.

Методи колективних експертних оцінок вже можна віднести до комплексних систем прогнозування (зазвичай неповних), оскільки в останніх поєднуються методи індивідуальних експертних оцінок та статистичні методи обробки цих оцінок. Але так як статистичні методи застосовуються у допоміжних процедурах отримання прогнозованої інформації, колективні експертні оцінки доцільніше віднести до сингулярних методів прогнозування.

До групи індивідуальних експертних оцінок можна включити (принцип класифікації – спосіб отримання прогнозованої інформації) такі методи: метод «інтерв'ю», аналітичні доповідні записки, написання сценарію. У групу колективних експертних оцінок входять анкетування, методи «комісій», «мозковий штурм».

Клас формалізованих методів в залежності від загальних принципів дії можна розділити на групи екстраполяційних, системно-структурних, асоціативних методів і методів випереджаючої інформації.

До групи методів прогнозованої екстраполяції можна включити методи найменших квадратів, експоненціального згладжування, імовірнісного моделюван-

ня та адаптивного згладжування. До групи системно-структурних методів – віднести методи функціонально-ієрархічного моделювання, морфологічного аналізу, матричний, мережевого моделювання, структурної аналогії. Асоціативні методи можна розділити на методи імітаційного моделювання та історико-логічного аналізу. До групи методів випереджаючої інформації – включити методи аналізу потоків публікацій, оцінки значимості винаходів та аналізу патентної інформації.

У наш час найбільш використовуваними є наступні методи:

1. Методи прогнозування, основані на згладженні, експоненціальному згладженні і змінному середньому:
 - “наївні” моделі прогнозування;
 - середні і змінні середні;
 - методи Хольта і Брауна;
 - метод Вінтерса.
2. Регресивні методи прогнозування.
3. Декомпозиція часових рядів.
4. Методи Бокса-Дженкінса (ARIMA).
5. Нейромережеві моделі бізнес-прогнозування.

Математичний апарат

Перед тим як приступити до прогнозування і аналізу результатів варто спочатку дати визначення головним поняттям і навести основні формули, які надалі будуть використовуватися.

Тензор – це множина компонент, пов'язаних з певною координатною системою, що трансформується відповідно до спеціальних правил координатних систем. Тензори являють собою фізичний стан інформації, що залежить від вибраної координатної системи, у якій вона вимірюється або відтворюється. Варто зазначити, що в даному контексті система координат не завжди є системою координат у математичному розумінні, а означає

точку зору або спосіб одержання (обробки) інформації. Тензор однозначно характеризується множиною своїх інваріантів – констант, які не змінюються при зміні системи координат.

Головні інваріанти – це мінімальна множина інваріантів тензора така, що всі інші інваріанти можуть бути визначені за допомогою них. Симетричний тензор 2-го порядку має 3 головні інваріанта.

Прогнозування часових рядів на підставі їх структурування [3]. Відомо, що тензор як об'єкт фізичної природи більш повно характеризує об'єкт дослідження, ніж його представлення у формі окремих вимірів. Зокрема, приєднані тензори – ізотропний та девіатор – характеризують відповідно базові властивості об'єкту, які найменше змінюються, а девіатор – його варіабельні властивості.

Часовий ряд (ЧР) $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ та його окремі частини $X^{(k)} = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+v}\}$, $X^{(k)} \subset X$, можуть бути представлені тензорами з відповідними матрицями:

- тензором T^x з діагональною матрицею $diag(T^x) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ та T_k^x , $diag(T_k^x) = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+v}\}$;
- тензорами T^x та T_k^x з вимірностями $m \times m = n$, $f \times f = v$ відповідно.

Часовий ряд $X = \{x_1 x_2 \dots x_9 x_{10} x_{11} \dots x_{18} \dots x_{n-1} x_{n-2} \dots x_{n-8} x_n\}$, який представляє собою навчачучу, тестову і контрольну послідовність структурується у вигляді тензора, для тензора 2-го ранга структурований ЧР представляється у вигляді об'єднання тензорів 2-го ранга $(x_1 x_2 \dots x_9)^{(0)}, (x_1 x_2 \dots x_9)^{(1)}, \dots, (x_1 x_2 \dots x_9)^{(k-1)}$.

Інваріанти структурованого ЧР обчислюються за формулами:

$$(x_1 x_2 \dots x_9) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} I_1 = (x_1 + x_5 + x_9) / 3; \\ I_2 = (x_5 x_9 - x_6 x_8) + (x_1 x_9 - x_3 x_7) + (x_1 x_5 - x_2 x_4); \\ I_3 = x_1 (x_5 x_9 - x_6 x_8) + x_2 (x_4 x_9 - x_6 x_7) + x_3 (x_4 x_8 - x_5 x_7). \end{cases}$$

Процедура структурування представлена нижче

$$\begin{array}{l}
 X = \{x_1 x_2 \dots x_9 x_{10} x_{11} \dots x_{18} \dots x_{k-1} x_{k-2} \dots x_{k-8} x_k\} \quad 1 \\
 (x_1 x_2 \dots x_9)^{(0)} \quad (x_1 x_2 \dots x_9)^{(1)} \quad \dots \quad (x_1 x_2 \dots x_9)^{(k-1)} \quad (x_1 x_2 \dots x_9)^{(k)} \quad 2 \\
 I_1^{(0)} \quad I_1^{(1)} \quad I_1^{(k-1)} \quad \rightarrow \quad I_1^{(k)} \\
 I_2^{(0)} \quad I_2^{(1)} \quad I_2^{(k-1)} \quad \rightarrow \quad I_2^{(k)} \quad 3 \\
 I_3^{(0)} \quad I_3^{(1)} \quad I_3^{(k-1)} \quad \rightarrow \quad I_3^{(k)}
 \end{array}$$

На підставі структурування початкового ЧР отримуються розріджені ЧР,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \{I_1^{(0)}, I_1^{(1)} \dots I_1^{(k-1)}\}, \\
 I_2 &= \{I_2^{(0)}, I_2^{(1)} \dots I_2^{(k-1)}\}, \\
 I_3 &= \{I_3^{(0)}, I_3^{(1)} \dots I_3^{(k-1)}\},
 \end{aligned}$$

компонентами котрих є інваріанти (кількість інваріантів, отже, розріджених ЧР, дорівнює $r+1$, де r – ранг тензора). Створюють комітет нейромереж (в даному випадку у кількості 3) для прогнозування значень $I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, I_3^{(k)}$. Всі інваріанти $I_j^{(k)}, j = 1, 2, 3$ отримані для тензора з номером “ k ”, в якому у разі тензора 2-го ранга відомі 8 значень, 9-те значення отримують з формул, наведених нижче

$$\begin{aligned}
 I_1^{(0)}, I_1^{(1)}, \dots, I_1^{(k-1)} &\rightarrow I_1^{(k)}, \\
 I_1^{(k)} &= (x_1 + x_5 + x_9)/3, \\
 x_9^{(1)} &= 3I_1^{(k)} - (x_1 + x_5 + x_9)/3, \\
 I_2^{(0)}, I_2^{(1)}, \dots, I_2^{(k-1)} &\rightarrow I_2^{(k)}, \\
 I_2^{(k)} &= (x_5 x_9 - x_6 x_8) + (x_1 x_9 - x_3 x_7) + \\
 &+ (x_1 x_5 - x_2 x_4), \\
 x_9^{(2)} &= (I_2^{(k)} - (x_1 x_5 - x_2 x_4) + x_6 x_8 + x_3 x_7) / \\
 &/ (x_5 + x_1); \\
 I_3^{(0)}, I_3^{(1)}, \dots, I_3^{(k-1)} &\rightarrow I_3^{(k)}, \\
 I_3^{(k)} &= x_1(x_5 x_9 - x_6 x_8) + x_2(x_4 x_9 - x_6 x_7) + \\
 &+ x_3(x_4 x_8 - x_5 x_7), \\
 x_9^{(3)} &= (I_3^{(k)} - x_3(x_4 x_8 - x_5 x_7) + x_1 x_6 x_8 + \\
 &+ x_2 x_6 x_7) / (x_1 x_5 + x_2 x_4).
 \end{aligned}$$

Прогнозоване значення $x_k \in$

$$\begin{aligned}
 &[\min(x_9^{(1)}, x_9^{(2)}, x_9^{(3)}), \\
 &\max(x_9^{(1)}, x_9^{(2)}, x_9^{(3)})]
 \end{aligned}$$

Вхідні дані

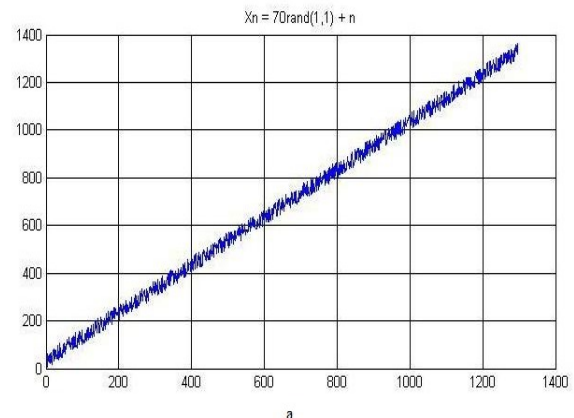
У даній роботі для отримання і обробки результатів прогнозування використовується математичний комплекс *Matlab*. Важливу роль в даному випадку відіграє пакет *Neural Network Toolbox*, який забезпечує всебічну підтримку проектування, навчання й моделювання багатьох відомих нейромережних парадигм, від базової моделі перцептрона до асоціативних самоорганізуючих мереж.

Прогнозування будемо проводити для двох видів часових рядів: стандартного стаціонарного і такого, що утворений за рекурентною формулою:

$$\begin{aligned}
 x_n &= 70rand(1,1) + n, \\
 x_{n+1} &= 4x_n(1 - x_n);
 \end{aligned}$$

де $rand(1,1)$ – генерує будь-яке число в діапазоні $[0;1]$.

Графіки наведених функцій зображені на рис. 1.



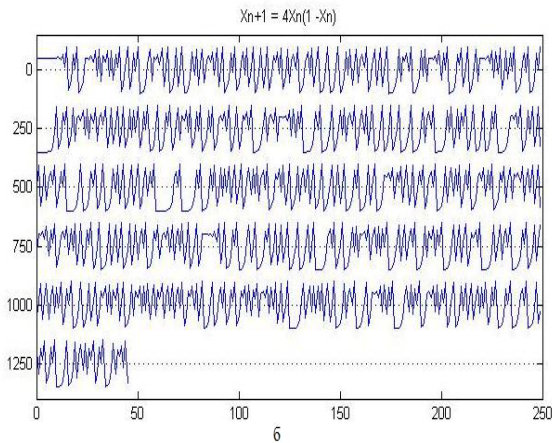


Рис. 1. а – перший тестовий ЧР, б – другий тестовий ЧР

У роботі пропонується метод прогнозування часових рядів (ЧР), який базу-

ється на структуруванні ЧР інваріантами тензора.

В обох випадках будемо брати ряди з різною кількістю елементів, для аналізу будемо подавати весь ряд крім одного елемента, останній елемент будемо використовувати для перевірки отриманого прогнозованого значення.

Для прогнозування використовується багатошарова нейронна мережа (рис. 2). Хоча один нейрон і здатний виконувати найпростіші процедури, перевага нейронних обчислень виникає від з'єднання нейронів у мережах.

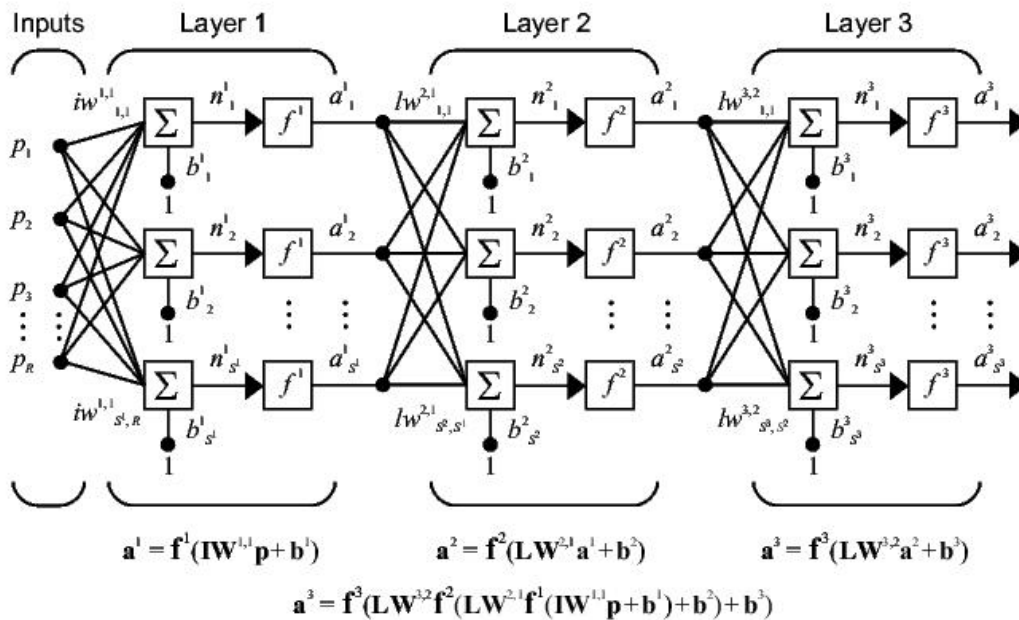


Рис. 2. Загальний вигляд багатошарової нейронної мережі

Для вирішення поставленої задачі формувалася двошарова нейронна мережа (НМ) зворотного поширення, що включає 50 нейронів у вхідному шарі з передаточною функцією *tansig* і 1 нейрон у вихідному шарі з передаточною функцією *purelin* (рис. 3). При цьому в якості навчального алгоритму вибраний алгоритм *Levenberg-Marquardt (trainlm)*.

Алгоритм зворотного поширення - це ітеративний градієнтний алгоритм навчання, який використовується з метою

мінімізації середньоквадратичного відхилення поточного виходу та бажаного виходу багатошарових нейронних мереж.

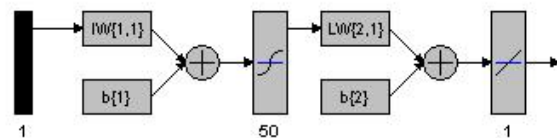


Рис. 3. Створена нейронна мережа

Алгоритм зворотного поширення використовується для навчання багато-

шарових НМ з послідовними зв'язками. Нейрони в таких мережах діляться на групи з загальним вхідним сигналом - шари. На кожен нейрон першого шару подаються всі елементи зовнішнього вхідного сигналу. Всі виходи нейронів N -го шару подаються на кожний нейрон шару N_1 . Нейрони виконують зважене додавання елементів вхідних сигналів. До суми елементів вхідних сигналів, помножену на відповідні синаптичні ваги, додається зміщення нейрона. Над результатом додавання виконується нелінійне перетворення – функція активації (передаточна функція). Значення функції активації є вихід нейрона [4]. В цьому випадку корекція вектора вагів вихідного нейрона W і вектора вагів пов'язаного з i -тим схованим нейронном w_i дорівнює:

$$W = W - \eta \frac{\partial E_k(W, w)}{\partial W},$$

$$w_i = w_i - \eta \frac{\partial E_k(W, w)}{\partial w_i}.$$

Результати прогнозування першого ЧР

Розглянемо спочатку більш простий ряд, вигляд якого наведено на рис. 1(а).

Сформована послідовність перетворювалася в тензори з матрицями 3×3 , 9×9 в результаті чого отримувалися послідовності з 144 та 16 елементів відповідно. Після чого ці послідовності подавалися в якості вхідних даних до НМ прямого поширення, крім останнього значення, яке використовувалося для порівняння прогнозованого елемента і сліду.

Нижче на рис. 4 наведені результати навчання нейронної мережі для головних інваріантів тензора 3×3 .

Похибка розраховувалася за формулою:

$$\Delta = \frac{abs(((прогноз_ел - дійсне_знач_ел) / \max(прогноз_ел, дійсне_знач_ел)) * 100\%}{}$$

де Δ – похибка у відсотках; *прогноз_ел* – прогнозоване значення елемента за допомогою сліду або інваріантів;

дійсне_знач_ел – дійсне значення елемента, з яким відбувається порівняння, воно не подається на вхід нейронної мережі; *max* – функція для знаходження максимального елемента; *abs* – модуль.

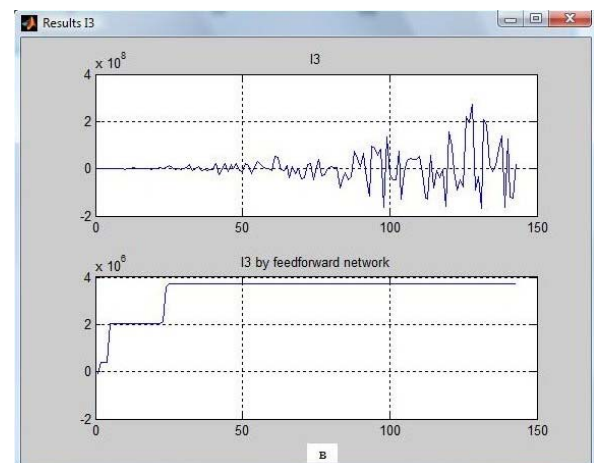
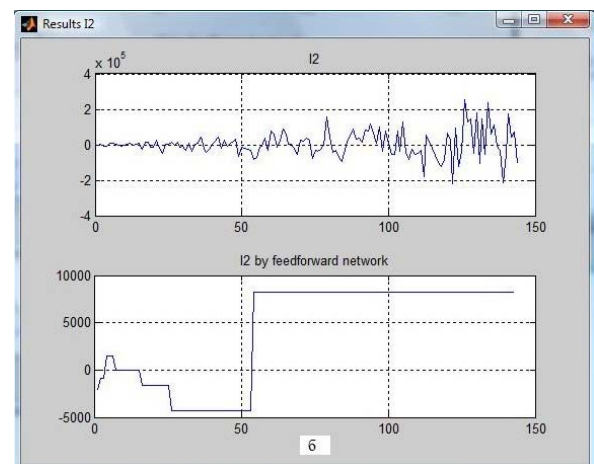
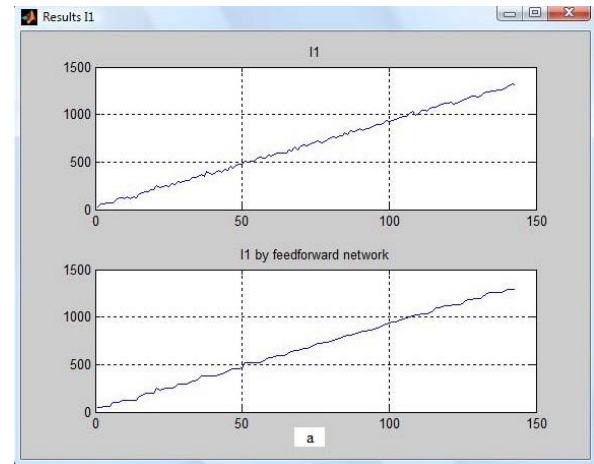


Рис. 4. Результати навчання тестового ЧР: а – першого інваріанта, б – другого інваріанта, в – третього інваріанта

Тепер розглянемо чисельні результати прогнозування по головних інваріантах, які наведені нижче.

Таблиця 1. Результати обчислень значення елемента першого тестового ЧР по головних інваріантах тензора 3x3

№	Дійсне значення елемента	Значення елемента по I_1	Δ , %	Значення елемента по I_2	Δ , %	Значення елемента по I_3	Δ , %
1	1300,76	1337,55	2,75	1341,62	3,05	1335,17	2,58
2	1300,76	1315,27	1,1	1241,54	3,04	1335,55	2,61
3	1300,76	1310,81	0,77	1341,88	3,06	1335,19	2,58
4	1300,76	1230,97	5,37	1341,54	3,04	1335,19	2,58
5	1300,76	1306,89	0,47	1352,93	3,86	1335,14	2,57

Таблиця 2. Результати обчислень значення елемента першого тестового ЧР по першому інваріанту тензора 9x9(вхідна вибірка 15 елементів)

№	Дійсне значення I_1	Прогнозоване значення I_1	Δ , %	Дійсне значення елемента	Прогнозоване значення елемента	Δ , %
1	1288,54	1221,48	5,2	1300,76	697,18	46,4
2	1288,54	1207,20	6,31	1300,76	568,67	56,28
3	1288,54	1214,99	5,7	1300,76	638,78	50,89

Таблиця 3. Результати обчислень значення елемента першого тестового ЧР по першому інваріанту тензора 9x9 (вхідна вибірка 99 елементів)

№	Дійсне значення I_1	Прогнозоване значення I_1	Δ , %	Дійсне значення елемента	Прогнозоване значення елемента	Δ , %
1	8100,68	8069,32	0,39	8115,28	7833,03	3,48
2	8100,68	8041,39	0,73	8115,28	7581,68	6,58
3	8100,68	8025,26	0,93	8115,28	7437,37	8,35
4	8100,68	8027,05	0,9	8115,28	7452,57	8,17
5	8100,68	8071,82	0,36	8115,28	7855,56	3,2

Проаналізуємо отримані дані. Для першого випадку, коли ми знаходили прогнозоване значення головних інваріантів, результат знаходиться в діапазоні [1306,89; 1352,93]. В другому і третьому випадках в таблицю виведено тільки результати прогнозування за допомогою першого інваріанту.

Як можна помітити найбільша помилка спостерігається при навчанні нейронної мережі на послідовності, яка була побудована із інваріантів тензора 9x9, це можна пояснити досить малою початковою вибіркою (15 елементів), що не дозволяє навчити систему, але і в даному випадку результати задовільні. Можна припустити, що збільшення кількості початкових даних підвищить точність прогнозування. Це припущення повністю підтверджує результати таблиці, де ми на вхід подавали початкову вибірку зі 99 елементів.

Варто відмітити, що найкращий результат досягається за допомогою обчислення елемента ЧР на підставі першого інваріанту, в деяких випадках варто використовувати другий і третій інваріанти.

Результати прогнозування другого ЧР

Розглянемо прогнозування ЧР, утвореного за рекурентною формулою, графік якого зображено на рис.1 (б).

Результати навчання комітету нейромереж наведені на рис. 5. На ньому зображені графіки, які відповідають дійсним і прогнозованим значенням головних інваріантів тензору 3x3, графіки навчання нейромереж для розріджених рядів з головних інваріантів тензора 9x9 мають схожий характер, тому їх графіки не наводяться.

У даному випадку структурування відбувається за таким самим алгоритмом.

Спочатку формуються тензори, далі вже знаходяться головні інваріанти, але на вхід подається функція з більшою початковою вибіркою, це пояснюється тим, що даний ЧР значно складніший. Для порівняння результату, як і в першому випадку,

використовується останній елемент розрідженого ряду. Результати прогнозування для тензора 3x3 і 9x9 наведені нижче в таблицях, похибка розраховувалася за формулою наведеною вище.

Таблиця. 4. Результати обчислень значення елементу другого тестового ЧР по головних інваріантах тензора 3x3(вхідна вибірка 700 елементів)

№	Дійсне значення елементу	Значення елементу по I_1	$\Delta, \%$	Значення елементу по I_2	$\Delta, \%$	Значення елементу по I_3	$\Delta, \%$
1	0,99	0,77	22,48	0,7	29,42	0,95	3,79
2	0,99	0,68	31,58	0,71	28,91	1	1,5
3	0,99	0,57	42,28	0,67	31,91	1,05	5,7
4	0,99	0,86	13,07	0,68	31,72	0,94	5,08
5	0,99	0,59	40,68	0,69	29,3	0,98	0,73

Таблиця. 5. Результати обчислень значення елементу другого тестового ЧР по першому інваріанту тензора 9x9 (вхідна вибірка 85 елементів)

№	Дійсне значення I_1	Прогнозоване значення I_1	$\Delta, \%$	Дійсне значення елементу	Прогнозоване значення елементу	$\Delta, \%$
1	0,31	0,18	40,43	0,97	2,64	63,23
2	0,31	0,88	65,41	0,97	6,17	84,28
3	0,31	0,31	0,45	0,97	0,98	1,26
4	0,31	0,49	37,79	0,97	2,64	63,23
5	0,31	0,29	4,18	0,97	0,86	11,85

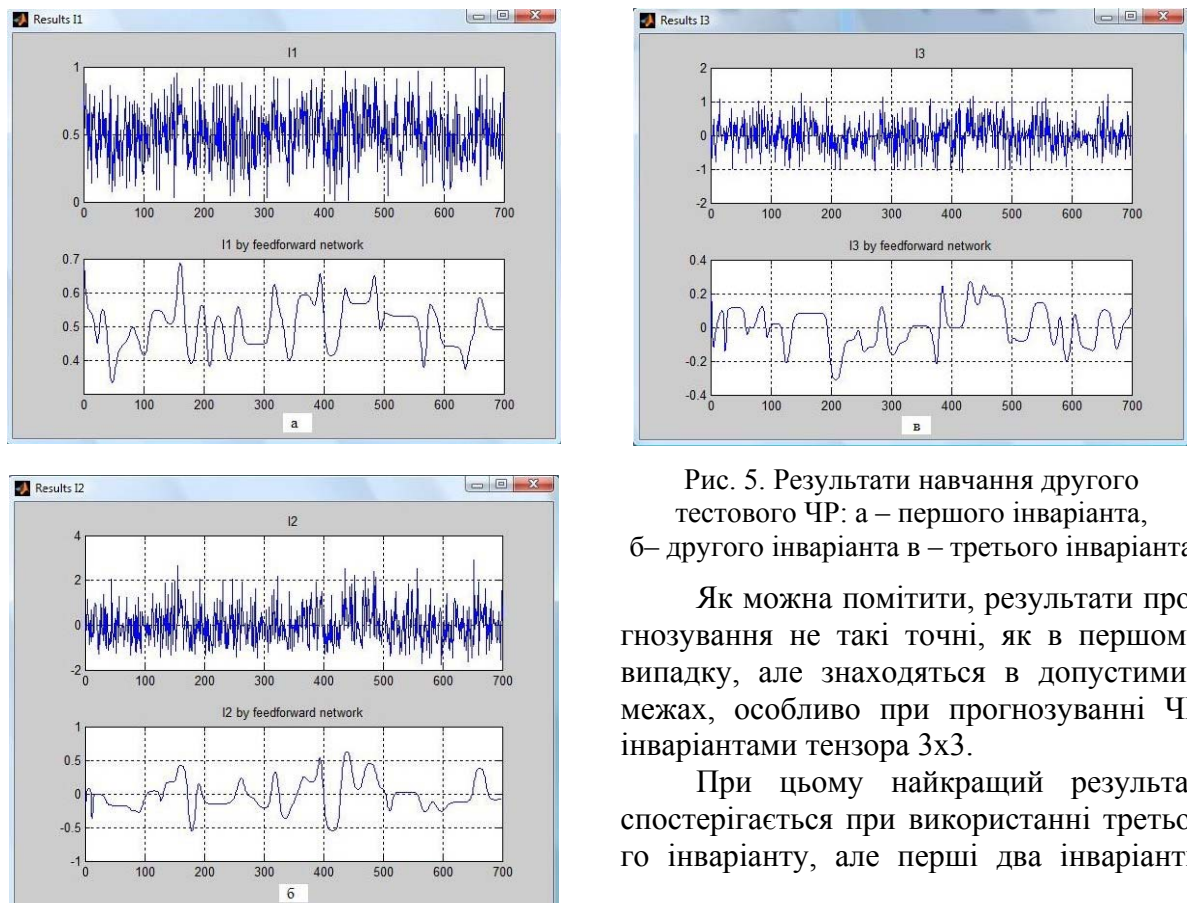


Рис. 5. Результати навчання другого тестового ЧР: а – першого інваріанта, б– другого інваріанта в – третього інваріанта

Як можна помітити, результати прогнозування не такі точні, як в першому випадку, але знаходяться в допустимих межах, особливо при прогнозуванні ЧР інваріантами тензора 3x3.

При цьому найкращий результат спостерігається при використанні третього інваріанту, але перші два інваріанти

також можуть використовуватися для додаткового аналізу.

При прогнозуванні ЧР, який утворений рекурентною формулою, першим інваріантом тензора 9×9 результати незадовільні, оскільки похибка дуже велика.

Помилку прогнозування можна пояснити тим, що даний ряд досить важко прогнозувати тому, що значення елементів робочого ряду відрізняються дуже мало один від одного, всі вони знаходяться в інтервалі $[0;1]$, що додатково ускладнює процес прогнозування.

Можна припустити, що прогнозування за допомогою другого і третього інваріантів буде мати кращий результат.

Висновки

Чисельні експерименти підтвердили коректність головних положень запропонованої методології прогнозування на підставі структурування тензорних інваріантів для стаціонарних часових рядів, а також можливість їхнього застосування в часових рядах з хаотичною динамікою.

Для вирішення поставленої задачі було сформовано двошарову нейронну мережу зворотного поширення, що включає 50 нейронів у вхідному шарі з передаточною функцією *tansig* і 1 нейрон у вихідному шарі з передаточною функцією *purelin*. При цьому в якості навчального алгоритму вибраний алгоритм *Levenberg-Marquardt* (*trainlm*).

При прогнозуванні першого ЧР найбільша помилка спостерігалася при навчанні нейронної мережі, яка складалася з інваріантів тензора 9×9 . Ця помилка компенсувалася збільшенням початкової вибірки до 99 елементів.

В результаті чого відхилення прогнозованого значення від дійсного значення елементу опинилося в допустимих межах.

Найкращий результат при прогнозуванні стаціонарного часового ряду був досягнутий за допомогою обчислення останнього елементу на підставі першого інваріанту, в деяких випадках варто використовувати другий і третій інваріанти.

При прогнозуванні часового ряду, що утворений рекурентною формулою, отримані результати гірші ніж в першому випадку, але знаходяться в допустимих межах.

При прогнозуванні елементу тензора 3×3 третім інваріантом помилка досить мала, що свідчить про можливість використання даної методології для цього ЧР.

При прогнозуванні тензора 9×9 першим інваріантом значно збільшується помилка прогнозу. Вона може бути пояснена тим, що даний ЧР дуже швидко змінюється і значення елементів ряду знаходяться в інтервалі $[0;1]$.

Отримані результати можуть бути покращені за рахунок збільшення початкової вибірки, а також при використанні другого і третього інваріантів.

Подальші дослідження будуть спрямовані на визначення доцільності використання всієї множини інваріантів для досягнення кращих результатів прогнозування.

Список літератури

1. *Воссерман Ф.* Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. – М.: Мир, 1992. – 240 с.
2. *Бестужев-Лада И.В.* Рабочая книга по прогнозированию. – М.: Мысль, 1982. – 426 с.
3. *Жуков І.А., Мінаєв Ю.М., Філімонова О.Ю.* Особенности прогнозирования временных рядов в тензорном времени. Електронне моделювання. – К.: НАН України, 2006. – Т. 28. – №2.
4. *Круглов В.В., Дли М.И., Голунов Р.Ю.* Нечёткая логика и искусственные нейронные сети: Учеб. пособ. – М.: Физматлит, 2001. – 224 с.