УДК 517.3+519.65(045)

Денисюк В.П., д-р фіз.-мат. наук
Рибачук Л.В., канд. фіз.-мат. наук

ОДИН МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТРАФІКУ

Інститут комп'ютерних технологій
Національного авіаційного університету

Розглядаються деякі питання наближеного обчислення дробових похідних у розумінні Адамара; при цьому використовується метод аналітичної заміни, при якому функція наближується алгебраїчними многочленами або їх модифікаціями. Наведено обчислювальні формули та оцінки похибок наближеного дробового диференціювання в метриці простору C

Вступ

Дробове інтегро-диференціювання має неабияке прикладне значення. Після відомої задачі Абеля про таутохрону, перші застосування були дані Ліувілем в задачах геометрії, фізики і механіки. Зокрема, серед цих застосувань слід згадати і відому задачу Лапласа про вплив нескінченного прямолінійного провідника на магніт, задачу Ампера про взаємодію двох таких провідників, задачі, пов'язані з притягуванням тіл, задачу про розподіл тепла в шарі, задачу Гауса про наближені квадратури тощо. У теперішній час дробове інтегро-диференціювання застосовується в багатьох галузях науки і техніки, таких як хімічна фізика, теорія випадкових процесів, в'язкопружність, теорія гравітації тощо.

Дробове інтегро-диференціювання в наш час знаходить широке застосування в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, крайових задач математичної фізики, в теорії спеціальних функцій, теорії чисел, у багатьох галузях прикладної математики тощо.

У багатьох випадках при практичних обчисленнях доводиться обчислювати дробові похідні та інтеграли від досить складних функцій. Проте операції дробового диференціювання та інтегрування навіть від порівняно простих функцій виконуються досить складно. Оскільки це значною мірою стримує впровадження методів теорії дробового інтегро-диференціювання в інженерну практику, актуальним є питання про методи наближеного обчислення результатів виконання цих операцій. В даній роботі розглядаються деякі класи методів наближеного обчислення дробових похідних.

При наближеному диференціюванні ми будемо знаходити значення дробових похідних функцій, використовуючи лише значення цих функцій у окремих точках, у таких випадках звичайно говорять про чисельне диференціювання.

У достатньо загальному випадку задачу чисельного диференціювання можна сформулювати таким чином. Нехай на відрізку $[a,b]$ задано довільну сітку Δ_N і нехай у вузлах цієї сітки відомі значення функції $f(x)$, $f(x) \in C^m[a,b]$, $m = 1,2,...$. Ставиться задача про оцінювання похідної порядку α, $(0 < \alpha \le m)$, функції $f(x)$, (α в загальному випадку неціле).

Задача чисельного диференціювання для цілих значень α має давню історію; різні аспекти цієї задачі досить детально висвітлено в численних підручниках [1].

Як відомо, загальний метод отримання формул чисельного диференціювання полягає в наступному. Функцію $f(x)$, $x \in [a,b]$, подають у вигляді

$$f(x) = \varphi_N^*(x) + R_N(x). \qquad (1)$$

де $\varphi_N^*(x)$ – функція, що наближує вихідну функцію $f(x)$ в тому чи іншому розумінні;

$R_N(x)$ – залишковий член.

Рівність (1) диференціюють і наближено покладають

$$D^{\alpha} f(x) \approx D^{\alpha} \varphi_N(x)$$

Похибки отриманих таким чином наближених рівностей визначаються відповідно значеннями величин

$$D^{\alpha} R_N(x)$$

Наведений нами загальний метод отримання формул чисельного диференціювання називають методом аналітичної заміни. В залежності від обраного способу побудови функції $\varphi_N^*(t)$, що наближує функцію $f(t)$, отримують ті чи інші класи формул чисельного диференціювання. Так, наприклад, досить широкий клас таких формул для цілих значень α, отриманих диференціюванням алгебраїчних многочленів, що інтерполюють функцію $f(t)$ у вузлах сітки Δ_N, наведено в [2].

Мета роботи

Узагальнення методу аналітичної заміни функцій алгебраїчними многочленами та їх модифікаціями на випадок обчислення похідних дробових порядків, та отримання обчислювальних формул чисельного диференціювання таких порядків.

Основний матеріал

Для нецілих значень α задача чисельного диференціювання має ряд особливостей, які визначаються перш за все, такими факторами:

а) наявністю кількох підходів до визначення дробового інтегро-диференціювання;

б) відсутністю методик наближення функцій з урахуванням їх подальшого дробового інтегро-диференціювання;

в) відсутністю методики оцінювання похибок чисельного дробового інтегро-диференціювання.

Розглянемо перелічені фактори більш детально.

Як відомо [3], існують різні варіанти введення операцій дробового інтегро-диференціювання, зокрема, підходи Ліувілля, Рімана-Ліувілля, Грюнвальда-Летнікова, Адамара, Вейля, та їх різноманітні модифікації. Деякі з цих підходів на певних класах функцій призводять до однакових результатів; зокрема, дробове інтегро-диференціювання абсолютно інтегровних функцій на скінченному відрізку у розумінні Рімана-Ліувілля співпадає з дробовим інтегро-диференціюванням у розумінні Грюнвальда-Летнікова [4]. Враховуючи це, надалі ми обмежимось розглядом лише дробового інтегро-диференціювання у розумінні Рімана-Ліувілля.

Розглядаючи другий фактор, відзначимо, що одним з найбільш розповсюджених методів наближення функцій є методи, засновані на використанні в ролі наближуючих функцій алгебраїчних многочленів та їх модифікації. Пояснюється це тим, що множина алгебраїчних многочленів є всюди щільною в просторі C; слід зауважити, що деякі властивості многочленів, які ми детально розглянемо нижче, роблять їх зручними і для наближення функцій з урахуванням їх подальшого дробового диференціювання.

Розглядаючи нарешті, оцінювання похибки чисельного дробового інтегро-диференціювання, перш за все відзначимо той факт, що практично у всіх відомих випадках цілочисельного диференціювання збільшення порядку оцінюваної похідної веде до збільшення похибки її оцінювання в метриці простору C. Враховуючи цей факт, цілком природно прийняти припущення про монотонне зростання похибки з ростом порядку диференціювання (в тому числі для дробових показників), тобто ми припускаємо, що

$$\left\| D^{\alpha} R_N(x) \right\|_C \le \left\| D^{E(\alpha)+1} R_N(x) \right\|_C . \qquad (2)$$

Прийняття такого припущення дає можливість використовувати при оцінюванні похибок чисельного інтегро-диференціювання для нецілих значень α відомі результати оцінювання похибок чисельного інтегро-диференціювання для цілих значень $E[\alpha]+1$.

Перейдемо тепер до розгляду дробового інтегро-диференціювання у розумінні Рімана-Ліувілля; при цьому, не втрачаючи загальності, обмежившись лише розглядом лівосторнніх інтегралів і похідних дробових порядків.

Як відомо [4], лівосторонній інтеграл Рімана-Ліувілля порядку r функції $f(x) \in L_1(a,b)$, визначається таким чином

$$\left(I_{a+}^{r} f\right)(x) = \int_a^x f(t)(x-t)^{r-1}\,dt\,, \quad (x > a). \tag{3}$$

Лівостороння дробова похідна порядку r визначається таким чином

$$\left(D_{a+}^{r} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{r\})}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[r]+1} \times \int_a^x f(t)(x-t)^{-[r]}dt\,, \tag{4}$$

де через $[r]$ і $\{r\}$ позначено відповідно цілу і дробову частини r.

Для спрощення подальших записів введемо позначення

$$m = [r]+1;\ \ \rho = 1-\{r\};\quad r = m-\rho;\ \ 0 < \rho \le 1. \tag{5}$$

У прийнятих позначеннях вираз (4) набуває вигляду

$$\left(D_{a+}^{r} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m} \times \int_a^x f(t)(x-t)^{\rho-1}dt = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}\left(I_{a+}^{\rho} f\right)(x). \tag{6}$$

Нескладно показати, що при такому введенні дробових інтегралів і похідних інтеграли і похідні цілих порядків обчислюються звичайним чином. Так, наприклад, при цілих значеннях r вираз (3) є відомою формулою Коші для r-кратного інтегралу, а вираз (6) набуває форми

$$\left(D_{a+}^{r} f\right)(x) = \frac{d^r f(x)}{dx^r} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{r+1} \times \int_a^x f(t)dt\,. \tag{7}$$

Слід зауважити, що в багатьох задачах було б зручно надати оператору дробового диференціювання форми $D^r = D^{-\rho}(D^m)$ і побудувати відповідним чином означення такого оператора

$$\left(D_{a+}^{r} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \times \int_a^x f^{(m)}(t)(x-t)^{\rho-1}dt\,. \tag{8}$$

Як показано в [3], вирази (6) і (8) співпадають на досить вузькому класі функцій, а саме на класі функцій, що зображуються інтегралами порядку r від сумованої функції і обертаються на 0 разом із своїми похідними до порядку $(m-1)$ у точці $x = a$; отже, операції $D^{-\rho}(D^m)$ і $D^m(D^{-\rho})$ є некомутативними в загальному випадку.

Одним з класів функцій, на якому має місце вираз (8) є клас алгебраїчних многочленів по степенях $(x-a)^k$, $k = 0,1,....$. Диференціювання функцій цього класу відбувається за формулою

$$\left(D_{a+}^{r}(x-a)^k\right)(x) = = (\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-r)}(x-a)^{k-r}\,. \quad (k > m) \tag{9}$$

Зрозуміло, що при $k < m$ внаслідок (8) $\left(D_{a+}^{r}(x-a)^k\right)(x) \equiv 0$, а при $k = m$

$$\left(D_{a+}^{\rho} C\right)(x) = C\frac{(x-a)^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)}\,. \tag{10}$$

Враховуючи вищенаведене, надалі, не втрачаючи загальності, обмежимось переважно розглядом випадку, коли $0 < r \le 1$, тобто $r = \{r\} = \rho$. Крім того, в позначенні дробової похідної будемо опускати зовнішні дужки і нижні індекси, тобто ми вважаємо, що $\left(D_{a+}^{r} f\right)(x) \equiv D^{r} f(x)$.

Одним з перших, хто запровадив ідею дробового інтегро-диференціювання не самої функції, а її подання у вигляді степеневого ряду, був Адамар; саме він почав систематично використовувати дробове диференціювання ряду Тейлора функції $f(x)$. Цю ідею Адамара, яка полягає у можливості комбінації методів цілочисельного аналізу з методами дробового інтегро-диференціювання, ми і будемо використовувати надалі.

Згідно з Адамаром, коли функція $f(x)$ припускає подання у вигляді рівномірно збіжного ряду Тейлора, тобто

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n}, \tag{11}$$

то операція дробового диференціювання здійснюється таким чином

$$\begin{aligned} & D^{\rho} f(x)= \\ & =\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\rho)}(x-a)^{n-\rho}. \end{aligned} \tag{12}$$

Зрозуміло, при цьому ми вважаємо, що ряд (12) також є рівномірно збіжним.

На практиці замість ряду Тейлора функції $f(x)$ використовують формулу Тейлора із залишковим членом вигляду

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n}+R_{n}(x).$$

Тоді

$$\begin{aligned} & D^{\rho} f(x)= \\ & =\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\rho)}(x-a)^{n-\rho}+ \\ & +D^{\rho} R_{N}(x). \end{aligned}$$

Внаслідок (2) зрозуміло, що

$$D^{\rho} R_{N} t) \leq \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{N!}(x-a)^{N+1},$$

$$(a<\xi<x).$$

Певним недоліком застосування формули Тейлора на практиці є наступне:

а) при її використанні є необхідним знання значень (або їх оцінок) старших похідних функції $f(x)$; це значно ускладнює застосування формули Тейлора, а в багатьох випадках робить її застосування неможливим;

б) обчислення членів формули Тейлора з великими номерами призводить до швидкого накопичення обчислювальної похибки.

Ці недоліки формули Тейлора привертають увагу до інших методів наближення функцій алгебраїчними многочленами, одним з яких є многочленна інтерполяція. Як відомо, при цьому на відрізку $[a, b]$ наближення функції задають деяку сітку $\Delta_{N}=\{x_{i}\}_{i=0}^{N}$, $a=x_{0}<x_{1}<\ldots<x_{N}=b$, і використовують значення функції $F_{N}=\{f(x_{i})\}_{i=0}^{N}=\{f_{i}\}_{i=0}^{N}$ для побудови інтерполяційного многочлена у формі Лагранжа або Ньютона. Зводячи надалі інтерполяційні многочлени до вигляду

$$\begin{aligned} & P_{N}(x)=a_{0}+a_{1}(x-a)+a_{2}(x-a)^{2}+\ldots+ \\ & +a_{N}(x-a)^{N}, \end{aligned} \tag{13}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} D^{\rho}(P_{N})(x)= & a_{0} \frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)}+ \\ & +a_{1} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\rho)}(x-a)^{1-\rho}+ \\ & +a_{2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\rho)}(x-a)^{2-\rho}+\ldots+ \\ & +a_{N} \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+1-\rho)}(x-a)^{N-\rho}. \end{aligned} \tag{14}$$

Недоліками такого підходу, окрім загальновідомих, є необхідність зводити інтерполяційні многочлени у формі Лагранжа або Ньютона до вигляду (13).

Враховуючи (2), та той факт, що $0<\rho \leq 1$, зрозуміло, що

$$\left\|D^{\rho} R_{N}(x)\right\|_{C} \leq\left\|D^{1} R_{N}(x)\right\|_{C}.$$

Оцінки похибки похідної $\|D^1 R_N t)\|_C$ наводяться, наприклад, в [3].

Легко бачити, що і ця оцінка використовує значення похідної $N+1$ порядку функції $f(x)$.

В багатьох випадках при оцінюванні похідних зручно використовувати апроксимацію функцій алгебраїчними многочленами. У цьому випадку, як і раніше, використовують значення функції F_N у вузлах сітки Δ_N, а апроксимаційний многочлен зразу будується у формі

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + \\ + a_n(x-a)^n, \quad n \le N, \end{aligned} \qquad (15)$$

де коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_n$ знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{aligned} &c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_n a_n = d_0; \\ &c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + ... + c_{n+1} a_n = d_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_n a_0 + c_{n+1} a_1 + c_{n+2} a_2 + ... + c_{2n} a_n = d_n. \end{aligned} \qquad (16)$$

де $c_k = \sum_{i=0}^{N} (x_i - a)^k$;

$$d_k = \sum_{i=0}^{N} f_i \, (x_i - a)^k \, , \; (k = 0,1,...n) \, .$$

Можна показати, що визначник цієї системи відмінний від нуля, тобто система має єдиний розв'язок.

Зауважимо, що при $n = N$ ми приходимо до інтерполяційного многочлена.

Дробове диференціювання апроксимаційного многочлена здійснюється за формулою (14).

Часто в задачах апроксимації функцій застосовують системи ортогональних многочленів Чебишева, Лежандра, Ерміта тощо. При дробовому диференціюванні таких наближень можливі два підходи; при одному з них розклад по ортогональних многочленах зводиться до форми (13) і диференціюється за формулою (15), а при другому – будуються таблиці дробового диференціювання ортогональних многочленів, дані яких і використовуються для обчислення дробових похідних.

Серед інших типів многочленних модифікацій згадаємо лише одну, найбільш вдалу, на наш погляд, модифікацію, а саме, многочленні сплайни; як відомо [5], такі сплайни забезпечують на класах диференційованих функцій найкращі лінійні наближення в певних функціональних просторах. Проте при дробовому диференціюванні поліноміальних сплайнів виникає питання подання їх по степенях $(x-a)$.

Висновки

Запропоновано підхід до оцінювання похибки наближеного дробового диференціювання. Наведено методику наближеного дробового диференціювання функцій, які можуть бути подані формулою Тейлора по степенях $(x-a)$. Показано, що при наближенні функцій інтерполяційними многочленами ці многочлени слід подавати розкладом по степенях $(x-a)$. При наближенні ж функцій многочленами, побудованими методом найменших квадратів, ці многочлени також слід подавати розкладом по тих же степенях.

Список літератури

1. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1965. – Т.1. – 464 с.

2. *Милн В.Э.* Численный анализ. – М.: ИЛ, 1951. – 320 с.

3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

4. *Вірченко Н.О., Рибак В.Я.* Основи дробового інтегро-диференціювання. Навч. посібник. – К.: Тов."Задруга", 2007. – 364 с.

5. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближений. – М.: Наука, 1984. – 352 с.

6. *Завьялов Ю.С. и др.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.