

УДК 532.529(045)

Буйвол В.М., д-р фіз.-мат. наук
 Фоміна Н.Б.
 Наконечна В.В.

ТЕХНОЛОГІЯ МАТЛАВ В ЗАДАЧАХ ПРО СТИСКАННЯ НЕСФЕРИЧНИХ КАВЕРН В РІДИНІ

Інститут комп'ютерних технологій
 Національного авіаційного університету

Викладені результати розрахунків і зроблений аналіз особливостей течій біля еліпсоїдальних каверн. Обчислення виконані на основі математичної моделі гідродинаміки замкнутих вільних поверхонь в рідині, яку один з авторів розвинув раніше, а також технології Matlab

Вступ

Вперше задача про стискання сферичної каверни була поставлена англійським вченим Безантом ще в 1859 р. [1]. Задача формулювалася ним так. Нескінченна маса нестисливої рідини, що знаходиться в спокої і на яку не діють ніякі зовнішні сили, раптово виводиться із стану спокою тим, що зникає маса рідини, яка заповнювала сферичну область радіусу R . Необхідно знайти миттєву зміну тиску і час заповнення порожнини, що утворилася, за умови, що тиск на нескінченності залишається сталим. Безант, проте, вичерпного рішення поставленої задачі не дав, її вирішив енергетичним методом в 1917 р. Релей [2]. Він проінтегрував рівняння Лапласа, потім знайшов радіальну швидкість в будь-якій точці простору, зв'язавши її зі швидкістю \dot{R} зменшення радіусу каверни: $v = \frac{\dot{R}R^2}{r^2}$. Визначивши кінетичну енергію сферичного шару рідини густиною ρ і товщиною dr : $dE = \frac{1}{2} \rho 4\pi r^2 dr v^2$ і взявши інтеграл, поширений на всю рідину, він знайшов кінетичну енергію всієї маси рідини:

$$E = 2\pi\rho\dot{R}^2 R^4 \int_R^\infty \frac{r^2 dr}{r^4} = 2\pi\rho\dot{R}^2 R^3.$$

Оскільки на стінках каверни тиск передбачається рівним нулю, то на них ніякої роботи не виконується. Робота A , яка необхідна для зміни об'єму каверни

від початкового її радіусу R_0 до R , дорівнює тиску на нескінченності p_∞ , помноженому на зміну об'єму каверни, тобто $A = \frac{4\pi p_\infty}{3} (R_0^3 - R^3)$. І ця робота дорівнює зміні кінетичної енергії системи: $A = E$. З цього рівняння випливає рівняння $\dot{R}^2 = \frac{2p_\infty}{3\rho} \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right)$, яке тепер називають рівнянням Релея, і розв'язок якого, на жаль, не виражається в елементарних функціях. Простота і витонченість розв'язку Релея пов'язані зі сферичною симетрією задачі. Якщо каверна відмінна від сфери, то задача про її стискання стає дуже складною. Не в останню чергу через це подальше просування у вивченні стискання каверн йшло в основному по шляху узагальнення рівняння Релея на основі моделей рідини, що все більш ускладнювалися [2–4]. У роботі [5] була запропонована нова математична модель, був розроблений метод наближеного врахування деяких реальних властивостей рідини і інших особливостей течій навколо каверн. Вона також була поширена на задачі для вертикальних каверн.

Короткий опис математичної моделі

Вважаємо, що в початковий момент часу каверна, як замкнена вільна поверхня S , мала форму поверхні обертання, відмінну від сферичної, рівняння якої $F(t, r, \vartheta) = 0$. Використовується модель

потенціальної течії навколо порожнини S , зовні якої потенціал $\Phi(t, r, \vartheta)$ має задовольняти рівнянню Лапласа $\nabla^2 \Phi = 0$, а на межі порожнини – умові нерозривності $\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \Phi \nabla F = 0$ і умові рівності тисків

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \frac{\tilde{p} - p_\infty}{\rho} = 0$$

(де \tilde{p} – узагальнений тиск на стінках порожнини) ззовні і зсередини каверни.

Вільна межа каверни після початку процесу стискання починає набувати форми, яка забезпечує мінімум енергії деформацій, що веде до утворення специфічної форми порожнини. Це можна інтерпретувати так, що на течію з відомим потенціалом Φ_0 накладається додаткова течія з потенціалом φ , яка називається збуренням основної течії. Потенціал цієї нової течії необхідно знайти. Приймаючи потенціал швидкостей Φ_0 і радіус каверни (сфери) R_0 в цих течіях відомими, функцію Φ і "радіус" R каверни відповідно до теорії малих збурень пропонується шукати у вигляді

$$\Phi = -\frac{R_0^2 \dot{R}_0}{r} - \frac{u R_0^2}{2r^2} \cos \vartheta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(t)}{r^{n+1}} P_n(\mu), \quad R = R_0 + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) P_n(\mu). \quad (1)$$

Тут $P_n(\mu)$ – поліноми Лежандра, а $\mu = \cos \vartheta$. Перший доданок потенціалу Φ описує сферично-симетричну течію (Релівського типу), другий – течію, викликану рухом каверни, як твердого тіла, вгору з швидкістю u без зміни її форми, а третій – течію, збурену несиметричністю порожнини чи іншими причинами.

Для течій, що не дуже відрізняються від сферично симетричних, узагальнений тиск в каверні, наслідуючи роботи [1, 3], пропонується обчислювати за формулою

$$\tilde{p} = p_i + p_\tau + p_g + p_\mu \quad (2)$$

де p_i – внутрішній тиск в каверні, $p_g = \rho g Z$ – тиск, викликаний дією поля

сили тяжіння, $p_\tau = -2\tau H$ – тиск, що породжується наявністю поверхневого натягу, $p_\mu = -4\mu \dot{R} R^{-1}$ – тиск, обумовлений наявністю сил в'язкості, а τ і μ – коефіцієнти поверхневого натягу і в'язкості відповідно.

Як показано в роботі [5], для мод деформацій $f_n(t)$ за цих умов можна отримати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} & -R_0 \ddot{f}_0 - 3\dot{R}_0 \dot{f}_0 - \ddot{R}_0 f_0 + \frac{u^2}{4R_0} = \\ & = -\frac{8H_0}{We} + \frac{Z_0}{2Fr^2} - \frac{8}{R_0} \operatorname{Re} \left(\frac{\dot{R}_0}{V_0} \right) \\ & \frac{\dot{u}}{2} R_0 - \frac{u}{2} \left(\dot{R}_0 + \dot{f}_0 - \frac{3}{5} \dot{f}_2 - \frac{4\dot{R}_0}{5R_0} f_2 \right) + \frac{27u^2}{70R_0} f_3 = \tilde{\sigma}_1, \\ & -\frac{R_0 \ddot{f}_n + 3\dot{R}_0 \dot{f}_n}{n+1} + \left[\frac{n-1}{n+1} \ddot{R}_0 + \right. \\ & \left. + \frac{9nu^2}{2R_0} \frac{n^2(2n+1) - 2(n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] f_n - \\ & - \frac{3u}{2} \left(\dot{f}_{n-1} - \frac{2n+1}{2n+3} \dot{f}_{n+1} \right) - \frac{nu}{2} \frac{f_{n-1}}{2n-1} + \frac{5n+2}{2} \dot{u} \frac{f_{n+1}}{2n+3} + \\ & + \delta_{n2} \left[\frac{3u^2}{4} + \left(\frac{\dot{u}}{2} + \frac{u\dot{R}_0}{R_0} \right) f_1 \right] - \\ & - \frac{9nu^2}{4R_0} \left[\frac{(n-1)(n-2)f_{n-2}}{(2n-1)(2n-3)} + \frac{(n+1)(n+2)f_{n+2}}{(2n+3)(2n+5)} \right] + \\ & + \frac{9u^2 f_1}{10R_0} \delta_{n3} = \sigma_n + \frac{8H_n}{We} - \frac{Z_n}{2Fr^2}, \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут δ_{mk} – символ Кронекера, а

$$We = \frac{\rho V_0^2 d_{i0}}{\tau} \quad \text{і} \quad Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gd_{i0}}} - \text{числа Вебера}$$

і Фруда за діаметром рівновеликої сфери: $d_{i0} = R_{i0} = \sqrt[3]{a^2 c}$. Величини σ_n, H_n, Z_n – це коефіцієнти розкладань в ряди за поліномами Лежандра різниці тисків, середньої кривизни і піднесення точки межі порожнини над горизонтальною площиною відповідно.

Початкові умови

Система рівнянь (3) виражає собою математичну модель руху вільної поверхні в рідині. Розв'язавши цю систему, за допомогою формул (1) можна визначити потенціал збудованої, а потім і загальної течії. Проте для інтеграції системи (3) необхідні початкові умови для функцій $f_n(t)$ і

їх похідних $\dot{f}_n(t)$. Ці початкові умови можна визначити, розглядаючи конкретну первинну форму каверни. Якщо, наприклад, це еліпсоїд обертання, то його рівняння в декартових координатах $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ за допомогою сферичних

координат $x = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $x = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = r \sin \vartheta$ можна представити у вигляді

$$r(\vartheta) = \frac{ac}{\sqrt{c^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}} \cdot (4)$$

У формулі (4) e – ексцентриситет меридіонального перетину еліпсоїда, який визначається формулою $e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$ ($c < a$ – горизонтально витягнутий еліпсоїд). Відзначимо, що кут ϑ відраховується від великої осі проти годинникової стрілки. У разі вертикально витягнутого еліпсоїда ($c > a$) можна використовувати іншу систему координат, в якій кут ϑ відраховується від осі Oz за стрілкою годинника. Тоді у формулі (4) для "радіусу" $r(\vartheta)$ квадрат ексцентриситету визначається згідно формули $e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$ і в чисельнику формули (4) стоятиме множник a замість c .

Для малих значень ексцентриситету радикал формули (4) можна розкласти в степеневий ряд

$$r = c \sum_0^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} e^{2n} \mu^{2n},$$

який зручно записати у вигляді

$$r = r(\vartheta) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_{2n} P_{2n}(\mu).$$

Випишемо декілька членів цього розкладання:

$$r_0 = R_{00} = \tilde{r} \left(1 + \frac{e^2}{6} + \frac{3e^4}{40} + \frac{5e^6}{112} + \frac{35e^8}{1152} + \dots \right),$$

$$r_2 = \frac{ce^2}{3} \left(1 + \frac{9e^2}{14} + \frac{25e^4}{56} + \frac{4725}{18304} e^6 \dots \right)$$

$$r_4 = \frac{3ce^4}{35} \left(1 + \frac{175}{154} e^2 + \frac{1225}{1144} e^4 + \frac{1505}{2288} e^6 \dots \right),$$

$$r_6 = \frac{5ce^6}{231} \left(1 + \frac{539}{330} e^2 + 2e^4 + \dots \right), \dots$$

Оскільки члени цих рядів завжди додатні, то коефіцієнти r_n дають занижені значення цих коефіцієнтів. Тому, наприклад, коефіцієнт r_0 доцільно обчислювати як радіус сфери, рівновеликої еліпсоїду: $r_0 = R_{н0} = \sqrt[3]{a^2 c}$. Самі ж величини r_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) пропонується розглядати як початкові збудження сферичної каверни радіусу $R_{н0}$. Тому систему рівнянь (3) в випадку, коли початкові швидкості дорівнюють нулю, слід доповнити такими початковими умовами:

$$f_n(0) = r_n, \quad \dot{f}_n(0) = 0. \quad (5)$$

Таким чином, система рівнянь (3) і початкові умови (5) повністю визначають задачу Коші для даної системи рівнянь і таким чином замикають математичну модель. Функція $R_0(t)$, що є розв'язком рівняння Релея [2] не виражається в елементарних функціях і тому для $R_0(t)$ має сенс при розв'язанні системи (3) використовувати наближений, але достатньо точний, вираз для цієї функції:

$$R_0(t) = \sqrt{0,84t^2 + 0,11t + 1}, \quad (0 < t < 3),$$

$$R_0(t) = 0,82t + 0,4, \quad (t > 3),$$

тим більше, що для похідних цієї функції відомі точні значення.

$$\dot{R}_0(t) = \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{R_0^3} \right)}; \quad \ddot{R}_0(t) = \frac{1}{R_0^4}.$$

Система рівнянь (3) за початкових умов (5) досить легко розв'язується за допомогою пакету прикладних програм Matlab. Створивши m-files задачі і виконавши деякі команди (яких не наводимо за браком місця), можна отримати чисельний розв'язок.

Аналіз процесу стискання еліпсоїдальних каверн

Розглянемо каверну, яка спочатку була еліпсоїдом обертання з півосями $a = b = 1; c = 2$. Умовно називатимемо такі еліпсоїди, у яких $a < c$, вертикально витягнутими. Зрозуміло, що за наявності поля сили тяжіння це поняття безумовне. Розглянемо два режими течії, що характеризуються різними числами Вебера і Фруда:

1) $Fr = 4; We = 10^6$, тобто в цій течії враховується сила тяжіння, але поверхневий натяг не враховується;

2) $Fr = We = 10^6 \approx \infty$, тобто в цій течії не враховується ні сили тяжіння, ні поверхневий натяг.

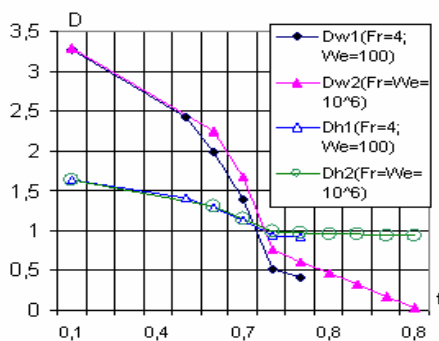


Рис. 1. „Діаметри” каверн ($a=b=1; c=2$)

На рис. 1 $Dw1$ і $Dh1$ – це вертикальний і горизонтальний діаметри каверни відповідно в течії при $Fr = 4; We = 10^6$, а $Dw2$ і $Dh2$ – ті ж діаметри в течії з параметрами $Fr = We = 10^6 \approx \infty$. Під діаметрами каверни розуміються найбільші її розміри по вертикалі Dw і горизонталі Dh . З рис. 1 видно, що для даних каверн вплив сил тяжіння і поверхневого натягу не значні. Горизонтальні діаметри практично не розрізняються. Проте крива горизонтального діаметру $Dh2$ в другій течії (тобто без урахування поверхневого натягнення) розташовується нижче за криву $Dh1$.

Відмінність стає помітною лише поблизу кінцевої стадії стискання, на якій каверна сильно деформується, і поверхня має великі кривизни, при яких якраз і виявляється дія сил поверхневого натягу. На вертикальних діаметрах дія сил поверхневого натягу виявляється сильніше через те, що у даної каверни кривизна в області великої осі значно більша, ніж у малої осі. Тому $Dw2 < Dw1$. Це означає, що поверхневий натяг підвищує швидкість стискання. Такий висновок, між іншим, впливає з самої природи дії сили поверхневого натягу.

Вже з формули (2) для узагальненого тиску $p = p_v - 2\tau H$, де p_v – тиск насиченої пари в каверні, видно, що поверхневий натяг зменшує тиск в каверні і тому збільшує швидкість її стискання. Так само швидкість розширення каверни при врахуванні поверхневого натягу мусить теж зменшуватися, оскільки зменшується тиск на стінки каверни. Як видно з рис. 1, з часом величини вертикального і горизонтального діаметрів зближуються. У деякий момент часу, близький до $t = 0,8$, вони вирівнюються, неначе еліпсоїдальна каверна перетворюється майже на сферичну, а далі каверна як би перевертається: вертикальний діаметр стає меншим горизонтального.

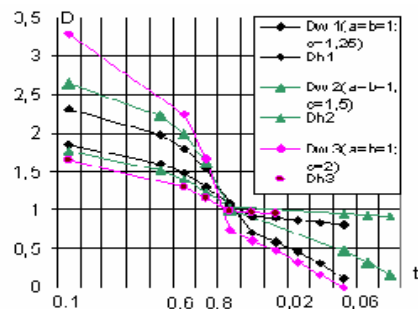


Рис. 2. „Діаметри” каверн при $Fr=We=10^6$

Цей загальний висновок можна зробити і на основі рис. 2, на якому показані діаметри ох різних каверн, первинною формою яких були еліпсоїди обертання у течії з параметрами $Fr = We = 10^6 = \infty$, тобто без урахування сили тяжіння і поверхневого натягу.

Ці обидві каверни горизонтально витягнуті, але друга витягнута сильніше за першу. Видно, що практично в тому ж діапазоні часу (біля $t \approx 0,8$) відбувається перетворення еліпсоїда майже на сфероподібну поверхню з подальшою переорієнтацією осей еліпсоїда. Правда, цю поверхню сферою назвати можна тільки умовно: у неї уздовж осей еліпсоїда утворюються западини, глибші з боку великої осі тобто в течіях без урахування поля сили тяжіння. Каверна виявляється як би перетягнута поясом в горизонтальній площині симетрії. Добре видно, що при всіх значеннях ексцентриситету діаметри каверни D_w і D_h вирівнюються приблизно в одному і тому ж діапазоні зміни часу стискання, тобто при $t \approx 0,8$. Надалі видно, що орієнтація каверни змінюється на протилежну. Цікаво зауважити, що саме в момент, близький до $t \approx 0,8$, "вертикальні" і "горизонтальні" діаметри каверни, що стискаються, майже вирівнюються. Саме тому можна говорити про перетворення еліпсоїдальної каверни у сфероподібну. Зрозуміло, що поняття горизонтальний і вертикальний без урахування поля сили тяжіння мають чисто умовний характер.

Вплив в'язкості пов'язаний з дисипацією енергії в процесі розширення і стискання каверн. Оскільки при стисканні похідна $\dot{R}_0 < 0$, то $p_\mu > 0$ і, отже, наявність в'язкості веде до *підвищення тиску* в каверні і, отже, до *зменшення швидкості стискання*. При *розширенні* каверни $\dot{R}_0 > 0$, $p_\mu < 0$ і тому наявність в'язкості веде до *зменшення тиску* і знову таки до *зменшення швидкості* росту каверни. Слід зазначити, що як каверни на рис. 1, так і каверни на рис. 2 після моменту часу $t \approx 0,8$ вже не можна вважати кавернами в звичайному сенсі. Час стискання $t > 0,8$ відповідає уже або руйнування каверни взагалі, або перетворенню її на якусь тороподібну поверхню з внутрішнім радіусом, близьким до нуля. У деякі моменти часу каверна стає схожою на тіло обер-

тання, яке можна отримати, обертаючи фігуру, близьку до лемніскати Бернуллі, навколо осі обертання еліпсоїда. Тут в деякому сенсі явище, схоже з тим, що було встановлене А.Пуанкаре [6] при аналізі форми маси рідини, що обертається. Він показав, що при певних умовах ця маса може прийняти грушевидну форму або навіть складатися з двох іноді нерівних утворень, з'єднаним тонким перешийком.

Висновки

В роботі показано, що початково еліпсоїдальна форма каверни при стиску в полі сили тяжіння спочатку набуває майже сферичної форми, після чого перетворюється до тороподібної форми. При цьому до моменту часу $t < 0,5$ поведінка каверни при $a < c$ або $a > c$ форми деформації майже не відрізняються. Однак при $t > 0,5$ різниця стає більш помітною. Момент часу, при якому відбувається утворення сфероподібної порожнини, дорівнює $t \approx 0,8$. При цьому стискання вздовж більшої осі відбувається більш інтенсивно, ніж вздовж малої. Чим менший ексцентриситет еліпсоїда, тим ці результати ближче до даних роботи [1]. Врахування поверхневого натягу збільшує швидкість стискання, а в'язкість веде до зменшення цієї швидкості.

Список літератури

1. Кнепп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. – М.: Мир, 1976. – 688 с.
2. Rayleigh, Lord (Strutt J.W.), On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity, Phil. – 1917. Mag. 34. – P. 94–98.
3. Brennen C.E. Fission of collapsing cavitation bubbles. J. Fluid Mech. 2002, v.472. – P. 153–166.
4. Plesset M.S., Prosperitti A. Bubble dynamics and cavitation. // Ann. Rev. Fluid mech. – 1977. – N9. – P.145–185.
5. Буйвол В.Н. Движение и деформация газонаполненных полостей в жидкости // Сб. прикл. гидромеханика. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 5–27.
6. Пуанкаре А. О науке. – М.: Физматгиз, 1983. – 560 с.