УДК 519.5:511.6+517.1

[1]Мінаєв Ю.М., д-р техн. наук
[2]Філімонова О.Ю., канд. техн. наук
[1]Вінник Д.М.
[2]Мінаєва Ю.І.
[1]Апонасенко Д.В.

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ В УЛЬТРАМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

[1]Національний авіаційний університет
[2]Київський національний університет будівництва та архітектури

Розглянуті питання представлення нечітких змінних, заданих у вигляді інтервала з накладеною функцією належності, у вигляді p-адичних чисел. Показано, що p-адичний базис дозволяє в достатній мірі враховувати невизначеність та уникнути свавілля, яке існує у визначенні функцій належності

Сучасний стан досліджень

Створення теорії нечітких множин (НМ) як способу опису невизначеності має прямий зв′язок з відомою ідеєю Галілея про *координатизацію.* Будь-які об'єкти, що є предметом математичного дослідження: криві, поверхні, відображення, величини та ін. – можуть бути "координатизовані" чи "обмірювані". Однак для такої координатизації "звичайних" чисел, звичної стандартної (архімедової) метрики, як показує практика, у цілій низці випадків далеко не досить. Зіштовхуючись з новим типом об'єктів, дослідник змушений розглядати їх «в умовах невизначеності», для якої необхідно конструювати і нові типи "величин" (об′єктів), що їх координатизують, і нові метрики.

Обґрунтування доцільності використання ультраметричного простору для аналізу НМ можна виконати у та кий спосіб. У передмові до роботи [1] Л. Заде відзначав, що дослідники

"...пытались подогнать реальный мир под математические модели, которые не оставляют места нечеткости. ... нужна новая точка зрения, ... где нечеткость принимается как универсальная реальность человеческого существования"

На жаль, сьогодні має місце дещо протилежна ситуація, коли все багатоманіття невизначеності намагаються „підігнати" під нечіткість у формулюванні Л.Заде. Автор роботи [1] стверджує, що

"Теорія нечетких множеств (ТНМ) позволяет наилучшим образом (курсив наш – авт) структурировать все то, что разделено не очень точными границами ... мысль ... восприятие у людей"

Не будемо заглиблюватись у цю цитату, але зазначимо, що сучасні моделі мислення досить далекі від ТНМ, більш того, ТНМ повинна аналізуватися тими методами, якими моделюються думки. З прикладної точки зору у ТНМ найбільше значення має принцип нечіткого розширення (ПНР) Л. Заде, який згідно до [2] для відображення $f: R^n \to R^n$ визначають у вигляді

$$\hat{f}(u)(x) = \begin{cases} \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) \; if \quad f^{-1}(x) \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad if \quad f^{-1}(x) = 0 \end{cases} (\forall u)$$

$u: R^n \to [0,1]$ – родина НМ ($F(R^n)$); α-рівень: $[u]^\alpha = \{x \in R^n : R^n : u(x) \geq \sigma\}$, $0<\alpha\leq 1$ $[u]^0 = cl\{x \in R^n : u(x) > 0\}$ належить $Q(R^n)$. $0<\alpha\leq 1$

Відомо, що простір $\Phi(R^n, d_\infty)$ є повним метричним простором, якщо метрика $d_\infty(u,v) = \sup h([u]^\alpha, [v]^\alpha)$, де h – метрика Хаусдорфа у $Q(R^n)$. Доведені теореми:

(i) якщо $f: R^n \to R^n$ є неперервним, тоді $\hat{f}: F(R^n) \to F(R^n)$ є добре визначеним і для всіх $\alpha \in [0,1]$ виконується $[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha) - [2]$;

(ii) якщо $f: R^n \to R^n$ є неперервним, тоді $\breve{f}: F(R^n) \to F(R^n)$ є неперервним з відповідністю до метрики d_∞ [3].

ПНР важливий тим, що дозволив перенести всі операції чіткої арифметики на нечітку. Але деякі поняття за умов невизначеності крім математичного змісту повинні отримувати і отримують на практиці додаткові наголоси, це стосується, в першу чергу, поняття відстані.

Як відомо, крім ПНР, у ТНМ широко використовується принцип гарантованого результату, що призводить до переважного використання операцій max-min. Наслідуючи логіку принципів нечіткого розширення та гарантованого результату, 3-я аксіома для визначення відстані повинна прийматися у вигляді

$$d_K(x, y) \le \max|d_K(x, z), d_K(y, z)|,\ x, y, z \in K$$

що є не тільки доцільним і виправданим, але випливає з логіки вищезгаданих принципів і напевне є головним.

В роботі [4] показані можливі шляхи подальшого розвитку ТНМ та її прикладного застосування, наведені деякі положення, які розкривають особливості НМ як форми моделювання невизначеності. Перш за все, відмітимо, що ФН є цілком природним переходом від звичайної характеристичної функції множини і зобов'язана своєю появою інтуїції Л. Заде, яка мала певну аналогію з відомими на той час методами. Власне ідея НМ, ототожнюваної як ФН, не є єдиною, розвиток ТНМ у зв'язці з ФН не зобов'язаний йти у напрямку безумовного використання ФН. Існує безліч ситуацій, коли ФН збудувати неможливо, або вона є такою, що не відтворює дійсної інформації, яка була закладеною у емпіричному твердженні.

По-друге, нечітку математику (НМ) рекомендується розглядати у вигляді системи утворюючих (можливо навіть нескінченої), на якій задані правила переходу від одних утворюючих до інших. Надзвичайно важливим є визнання того факту, що умови невизначеності можливо розглядати на рівні інтелектуальних систем з нечіткими знаннями, у більшості яких у якості оцінок використовуються наближені значення істинності, які в свою чергу задаються нечіткими числами. Показано, що для таких оцінок можна використовувати також елементи будь-яких грат, для яких не потрібні ФН. Зазначимо, що в p-адичному базисі НЗ задаються саме гратами, у вузлах котрих знаходяться p-адичні кулі.

Сучасні дослідження невизначеності, яка моделюється у формі НМ, показують, що створення нових операцій на підставі аналогів класичних – результат перетину або об'єднання – не є доцільним, операції нечіткої математики повинні визначатися експериментально.

Завершуючи огляд роботи [4], зазначимо, що сучасний підхід до моделювання невизначеності полягає не у створенні нових способів побудови ФН, а у створенні механізмів витягнення нечіткості, що, в свою чергу, призводить до нової концепції отримання нечітких знань.

Теоретичні посилання використання ультраметричного простору та р-адичного аналізу в прикладних дослідженнях за умов невизначеності

Як відомо, використання 3-ої аксіоми відстані як посиленої нерівності трикутника (ПНТ), є ознакою *ультраметричного* простору, для якого справедлива *неархімедова* метрика, яка також відповідає всім аксіомам метрики, але надає об'єктам принципово нових властивостей. Використовуючи принципи нечіткого розширення та гарантованого результату ми приходимо до необхідності використання ультраметричного простору, або, по меншій мірі, локальному використанню посиленої нерівності трикутника у архімедовому просторі.

Неархімедові числові поля детально розглянуті в роботах [5, 7–10], для норми справедливо $|x|_F = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$|x\,y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$, $|x + y|_F \le |x|_F + |y|_F$.

Абсолютна величина є неархімедовою, якщо виконується ПНТ $|x+y|_F \le \max(|x|_F, |y|_F)$. ТНМ, НМ і нечітка логіка (НЛ) відносяться до класу об'єктів, дослідження яких проводиться в межах досліджень з назвою «штучний інтелект». Виникненню ТНМ у визначальній ступені сприяло те, по-перше, що сучасна математика не мала адекватних засобів для дослідження цілої низки задач підтримки прийняття рішень в умовах невизначеності, по-друге, титанічна пропагандистська діяльність батька-засновника ТНМ Л. Заде, завдяки чому система запропонованих ним певних евристичних положень (зокрема принцип нечіткого розширення) зайняла домінуюче місце в науці. В роботі [8] наведено ремарку, що в XVIII столітті вчення Ньютона поширювалося по Європі як форма релігійного навчання, у Франції навіть мали місце «Ньютонівські богослужіння».

НЗ використовують речовинні і раціональні числа, але поле речовинних чисел $\boldsymbol{R}$ є «природним» розширенням поля раціональних чисел $\boldsymbol{Q}$. Однак, існують і інші розширення поля $\boldsymbol{Q}$, а саме – поле *p*-адичних чисел $\boldsymbol{Q}_\mathbf{p}$, що виникають не менш природно, ніж $\boldsymbol{R}$. Отже, відштовхуючись від раціональних чисел, можна створювати й інші системи символів, відмінні від речовинних чисел. Відповідно до теореми Островського [8], природа складається з двох і тільки двох частин: одна з них описується речовинними числами, а інша *p*-адичними, причому відомо, що частина природи, яка представляється у вигляді деревовидної структури, описується *p*-адичними числами. Це дає можливість вважати цілком обґрунтованим розгляд особливостей поводження НЗ як засобу моделювання невизначеності у *p*-адичному базисі.

Аналіз НЗ у *p*-адичному базисі наштовхується на низку об'єктивних труднощів, що зумовлені станом фундаментальних математичних досліджень *p*-адики і на даному етапі не можуть бути теоретично вирішені. Зокрема, існує нескінченно багато різних *p*-адичних представлень, поля *p*-адичних чисел для різних простих *p* не ізоморфні. Це призводить до того, що, наприклад, 2-адичний опис не еквівалентний 3-адичному, хоча вони однозначно описують об'єкт, у ТНМ „природно" застосовують саме 2-адичний базис, бо в цьому випадку НЗ утворює грати: 2-адичний базис є найпростішим у моделюванні, але використання для НМ 2-адичної системи – це лише перше наближення.

В роботі [8] запропоновано використовувати *p*-адику для моделювання розумових процесів. Традиційно у НМ використовувались речовинні числа, які геометрично представляють пряму лінію, *p*-адичні числа геометрично мають структуру ієрархічного дерева, де інформація розгалужується. Для аналіза об'єкта за умов невизначеності слід використовувать саме *p*-адичну систему координат.

На думку авторів слід дотримуватись такої тези – якщо на універсальній множині задано НЗ „приблизно *a*", де *a* належить універсальній множині, зокрема, інтервалу $I = [I^{\text{мін}}, I^{\text{макс}}]$,то будь-яка НЗ, припустимо, „приблизно *c*", де $a \ne c,\ c \in I$, повинна мати ФН μ^c визначену на підставі ФН, яка сформована для НЗ „приблизно *a*" – μ^a, тобто бути *подібною* до μ^a і, зокрема, визначатись на підставі стискаючих відображень.
Використання ПНТ гарантує однозначність представлення НЗ, що спирається на інтервал, у вигляді 2-адичного дерева. Природно, що при цьому потрібно розглядати метрику ρ на 2-адичному дереві. Відомо, що на $\boldsymbol{Q}_\mathbf{p}$ існує природна метрика, що задається так: дві нескінченні гілки дерева *близькі*, якщо довжина їхньої загальної частини, що виходить з кореня, *велика.* Зазначимо, що твердження „гілки дерева *близькі*", „довжина ... *велика*" можуть бути визначеними на рівні лінгвістичних змінних, але в *p*-адиці для цієї мети використовують чіткі визначення.

Підкреслимо деякі положення, які мають принципове значення для *p*-адичного представлення НЗ:

– будь-який об'єкт, що представлений у вигляді (бінарного) дерева, є об'єктом ультраметричного простору, тобто описується і аналізується у *p*-адичному базисі;

– точкою розгалуження, з якої починається дерево, може бути будь-яке раціональне число, яке виступає у ролі *константного множника* для *p*-адичного числа, що, в свою чергу, представляє гілку.

Інтервал з накладеною ФН може бути представлений у вигляді 2-адичного дерева. Якщо кожну гілку 2-адичного дерева, що представляє можливе значення НЗ, закодувати цифрами, то для того, щоб знайти відстань $\rho_m(x,y)$ між двома послідовностями цифр *x* и *y*, необхідно знайти першу позицію *k* таку, де послідовності мають різні цифри на цій позиції (приймають $\rho_m(x,y)=q^k$). Вибір константи *q* не грає ніякої ролі. Геометрії (топології), що відповідають різним 0<*q*<1, еквівалентні. Стандартний вибір: *q*=1/*m,* у такий спосіб $\rho_m(x,y)=\dfrac{1}{m^k}$. Наприклад, якщо $m=2$ і $x=(0,1,0,\ldots)$ і $y=(0,1,1,\ldots)$, то тут $k=2$ і, отже, $p_2(x,y)=1/4$. Якщо $f=c_0+c_1 z+ +c_2 z^2+c_3 z^3+\ldots$, то норму $\|f\|$ можна визначити у вигляді $\|f\|=2^{-e}$|, де $e=ord_z(f)$, в свою чергу $ord_z(f)$ – це найменший індекс *j* для c_j не рівного нулю. Відстань між двома рядами *f* та *g*, що моделюють окремі гілки 2-адичного дерева, визначають за виразом: $d(f,g)=\|f-g\|$.

У роботі процес функціонування НЗ розглядається як поводження 2-адичної системи, що відноситься до класу примітивних, її поводження може суттєво відрізнятися від поводження, припустимо, 3-адичної чи 5-адичної системи, хоча вони можуть використовувати одну і ту ж динамічну функцію (наприклад, $x\to x^2$). Відзначимо одну особливість НМ. Як видно з наведених прикладів побудови НЗ, для їхньої побудови застосовують *стискаючі* відображення [13]. Нагадаємо, що від образження *f* метричного простору $\{X,\rho\}$ у себе називають стискаючим, якщо існує дійсне число $\lambda<1$ таке, що для нього $\rho(f(x),f(y))\le\lambda\rho(x,y)(\forall x,y\in X)$. Це дозволило сформулювати наступний висновок: незалежно від типу ФН НЗ однаково адекватно представляє об'єкт в умовах невизначеності.

Звернемо увагу на таку обставину. Однією з характерних рис моделювання невизначеності у вигляді НМ є те то, що один і той же об'єкт різними експертами може бути представлений, природно, суб'єктивно по-різному; апарата, який би дозволив цю суб'єктивність уніфікувати або врахувати, не існує, однак відношення східності, подібності для розв'язку зазначеної проблеми торкаються.

В роботах Крона Г. [7] було показано, що представлення об'єкта дослідження (виміру) у вигляді тензора є більш адекватним, ніж представлення у вигляді величини. Тензорна модель дозволяє аналізувати об'єкт в різних системах координат, розуміючи під різними системами не тільки декартові (прямокутні та косокутні, прямолінійні або непрямолінійні), але і *p*-адичні.

Якщо існує об'єкт, для представлення якого потрібна деревоподібна ієрархічна структура, то це автоматично викликає необхідність використання *p*-адики. Фундаментальна роль, що грають *p*-адичні числа при описі різних природничо-наукових явищ, зумовлена, перш за все, тим, що природа улаштована з теоретико-числової точки зору так, що розпочавши аналіз з поля раціональних чисел ***Q***, можемо одержати або поле речовинних чисел ***R***, або одне з полів *p*-адичних чисел ***Q***p (теорема Островського).

P-адичні числа

P-адичні числа і методологія неархімедової метрики докладно розглянуті в [8–10], тому в роботі приведені тільки ті моменти, що необхідні для розуміння процесу переходу від НМ та НЗ до *P*-адичних чисел. Приведемо деякі відомості з теорії *p*-адики, необхідні для подальшого розуміння запропонованої методології аналіза НЗ у *p*-адичному базисі

[9–11]. Відомою що натуральне n можна представити у вигляді добутку множників $n = 2^{v_2}3^{v_3}\ldots p^{v_p}$, де $v_p = 0,1,2,\ldots$. Тоді за визначенням, якщо натуральне число n поділяється на p^{v_p}, то $|n|_p = p^{-v_p}$, прийнято, що $|0|_p = 0$. Якщо $x = n/m$, де n і m – натуральні числа, то за визначенням $|x|_p = |n|_p / |m|_p$.Наприклад, $|3|_2 = 1$, $|4|_2 = 2^{-2}$, $|3/2|_2 = 2$,а $|3|_3 = 3^{-1}$, $|4|_3 = 1$, $|3/2|_3 = 3^{-1}$. Зокрема, якщо раціональне число представлене у вигляді $x = n/m$, де n, m – цілі числа, що не діляться на p, то $|x|_p = 1$. Отже, p-адична відстань між крапками в просторі $\boldsymbol{Q}$ істотно відрізняється від дійсної (евклідової) відстані. Відзначимо, що абсолютні величини $|\bullet|_\alpha$ і $|\bullet|_\beta$ еквівалентні, якщо $|x|_\alpha = |x|_\beta^c$, $c \in R, c > 0$.

ПНТ має наступний геометричний зміст: довжина будь-якої сторони трикутника не більше, ніж найбільша з довжин двох інших сторін. Таким чином, в ультраметричному просторі всі трикутники є *рівнобедреними.* Це важливий висновок для ТНМ, тому що можна розглядати тільки *одну* трикутну ФН.

Будь-яке p-адичне число a можна представити у вигляді дробу:

$$a = \frac{a_{-f}}{p^f} + \cdots + \frac{a_{-1}}{p^1} + a_0 + a_1 p^1 + \cdots + a_n p^n + \cdots =$$
$$= a_j = 0,1,\ldots,p-1 \; a_{-f}\ldots a_{-1}, a_0 a_1\ldots,$$

де $a_j = 0,1,\ldots,p-1$. Це розкладання схоже з представленням дійсного числа у вигляді дробу, але відрізняється від дійсного випадку необмеженістю в напрямку зростання ступенів p і обмеженістю в напрямку їхнього убування. Найбільш простим способом реалізації p-адичних обчислень є використання *канонічних* розкладань цих чисел.

У p-адичній теорії випадок p=2 є «патологічним» і для технічних додатків може розглядатися як перше наближення, але за умов невизначеності вимога точності є абсолютно невиправданою. В p-адичному базисі ФН практично не відіграє ніякої ролі, тому що для НЗ, що є опертою на інтервал, існує тільки ФН у вигляді рівнобедреного трикутника, ФН Гаусова типу та трапецієподібна ФН зводяться до трикутної.

Для *наближеного аналізу НЗ* використовують характеристики p-адичного числа: p-адичний порядок, p-адичну оцінку та p-адичний порядок і оцінку. Вони визначаються у такий спосіб: *p-адичний порядок* $x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i p^i$ – найменше m, для котрого $a_m \neq 0$, чи більш точно

$$\mathrm{ord}_p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } a_i = 0 \text{ for all } i \\ \min\{ s \mid a_s \neq 0 \} & \text{otherwise} \end{cases}.$$

p-адична оцінка x визначається як $|x|_p = p^{-ord_p(x)}$ і має властивості:

i) $|x|_p \geq 0$, $|x|_p = 0$ if and only if $x = 0$
ii) $|x + y|_p \leq \max\{ |x|_p , |y|_p \}$
with $|x + y|_p = \max\{ |x|_p , |y|_p \}$ if $|x|_p \neq |y|_p$
iii) $|x . y|_p = |x|_p . |y|_p$.

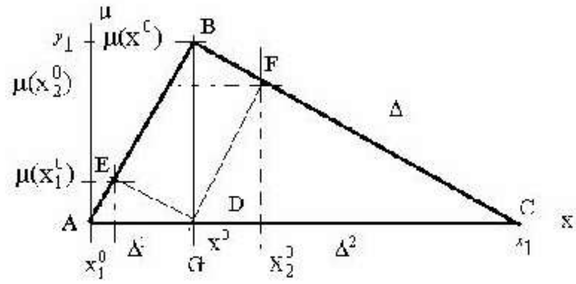
Пакети математичного моделювання *Mathematica* та *Mapple* вміщують достатню кількість функцій для роботи з p-адикою.

Представлення НЗ у вигляді 2-адичного дерева

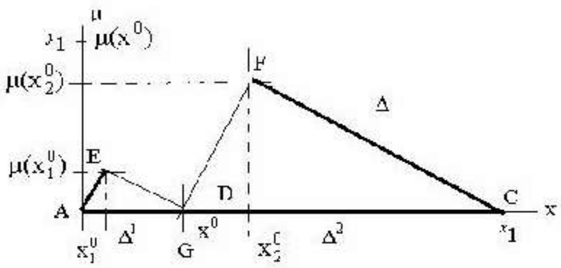
Інтервальна невизначеність є однією з найбільш поширених форм невизначеності. В ТНМ розглядається НЗ, що є опертою на інтервал, при цьому ФН приймається 1-типу, хоча підстав для унікальності такої моделі практично майже немає. На наш погляд, одним з недоліків ТНМ, крім тих, котрі висловлені Д.О. Поспєловим і ін. російськими вченими на відомому «Круглому столі» [4], є те, що теорія практично проігнорувала головний принцип, яким користається природа - оптимальним алгоритмом організаційного розвитку, в основу якого покладений *фрактальний принцип подібності.* Саме цей фундаментальний принцип призводить до того, ФН буде належати до 2-типу. У роботі показано, що аналіз інтервальної невизначеності на рівні ТНМ неминуче призводить до фрактальної подібності, що означає, що з вихідної НМ, що характеризує весь інтервал, частини інтервалу характеризуються новими НМ, утвореними з вихідної НМ, і які є фрактально подібними.

Алгоритм створення НМ, в основу якого покладений фрактальний принцип подібності, може бути представлений у такий спосіб. Задано інтервал $I_x = [x^{\min}$, $x^{\max}]$, на якому можна вказати *утворюючу* крапку таку, що може мати *найбільше* значення ФН ($x^0 \in I_X$) або обрана випадково ($x^{rand} \in I_X$). Розглянемо як базову трикутну ФН, причому трикутник повинен прийматися *рівнобедреним*, бо це аксіомам ультраметрики. Інтервал $I_x = [x^{\min}, x^{\max}]$ для спрощення розгляду приймається одиничним, $I_x =^x 1$ (рис. 1 а); за допомогою утворюючої крапки він поділяється на 2 підінтервали, що не перетинаються, $I_x^1 = [x^{\min}, x^0]$ і $I_x^2 = [x^0, x^{\max}]$; $I_x^1, I_x^2 \subset I_x$, $I_x^1 + I_x^2 = I_x$.

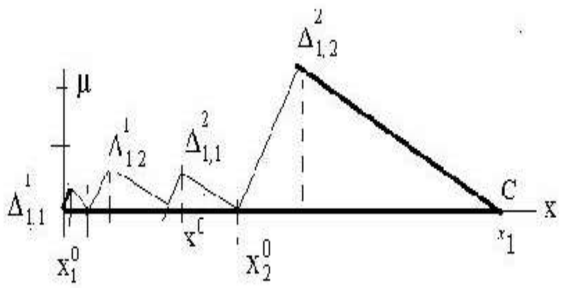
Згідно до принципу подібності кожному з інтервалів $I_x^1, I_x^2 \subset I_x$ відповідає ФН, яка повинна мати також трикутну форму – трикутники Δ_1 та Δ_2 відповідно, $I_x^1 \to \mu^1, I_x^2 \to \mu^2, I_x \to \mu^0$; $I_x^1 + I_x^2 = I_x$, $\mu^1 + \mu^2 = \mu^0$; отже, трикутники Δ_1, Δ_2 та Δ_2 є подібними. На рис. 1 б показано *утворюючу* крапку $x^0 \in I_x$, яка має найбільше значення ФН, $x^0 \to \mu(x^0)$, крапка G створює підінтервали $I_x^1, I_x^2 \subset I_x$, в свою чергу кожний з вказаних підінтервалів створює нові підінтервали $I_x^{1(1)}$, $I_x^{1(2)} \subset I_x^1$, $I_x^{2(1)}$, $I_x^{2(2)} \subset I_x^2$; $I_x^{1(1)} \to \mu^{1(1)}$, $I_x^{1(2)} \to \mu^{1(2)}$, $\mu^{1(1)} + \mu^{1(2)} = \mu^1$, $I_x^{2(1)} \to \mu^{2(1)}$, $I_x^{2(2)} \to \mu^{2(2)}$, $\mu^{1(1)} + \mu^{1(2)} + \mu^{2(1)} + \mu^{2(2)} = \mu^0$. Процедура ділення підінтервалів може буде продовженою необмежено. На рис. 1 в підінтервали I_x^1, $I_x^2 \subset I_x$; $I_x^{1(1)}$, $I_x^{1(2)} \subset I_x^1$; $I_x^{2(1)}$, $I_x^{2(2)} \subset I_x^2$ виділені окремо.



а)



б)

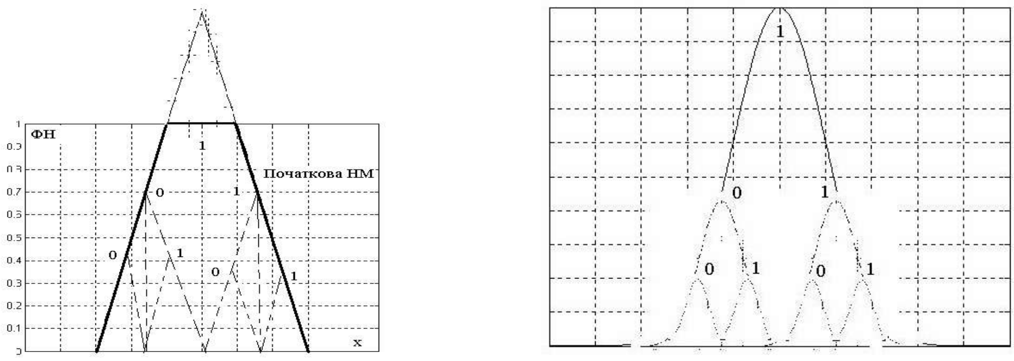


в)

Рис. 1. Утворення НЗ з ФН 2-тпа на підставі інтервалу для трикутної ФН

Процедура послідовного утворення НП/М на підставі *принципа подібності*: якщо існує НМ $\tilde{a} = \{a_j / \mu_j^a\}$, $\mu_j^a \to [0,1]$, то будь-яка НМ $\tilde{b} = \{b_j / \mu_j^b\}$, $\tilde{b} \in \tilde{a}$ є подібною до початкової множини, тобто форма ФН для $\tilde{a}$ та $\tilde{b}$ повинна бути такою, щоб $\mu(x) = k \cdot \mu(x / k)$.

На рис. 2 наведено приклад побудови деревовидної структури для НЗ з трапецієвидною та гаусовою ФН:



а) б)

Рис. 2. Утворення деревовидної структури: а) для трапецієвидної ФН, б) для гаусової ФН

На рис. 3 наведено НЗ, що є опертою на інтервал, у вигляді бінарного дерева, яке є незалежним від прийнятої ФН.

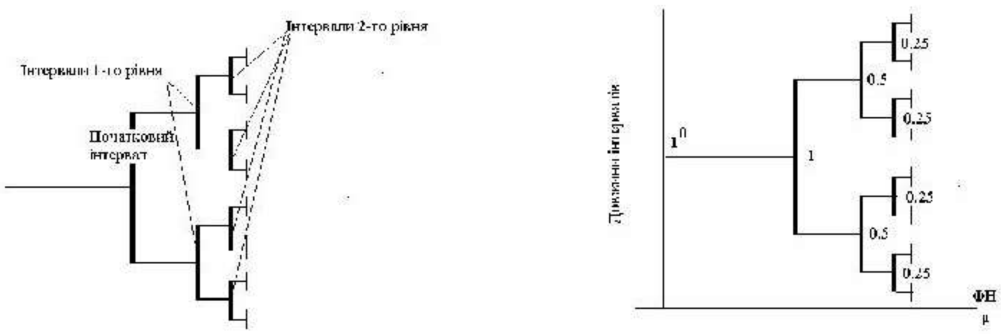


Рис. 3. Представлення НЗ, що є опертою на інтервал, у вигляді бінарного дерева

Як доведено у [5, 6], процесам подібного розподілу відповідає структура чи топологія простору-часу типу *p*-адичної. Крім того, легко показати, що ряд $1+1/2+1/4+1/8+...=\sum_{m=0}\frac{1}{2^m}$, що представляє одну гілку дендрограми, яка утворюється на інтервалі, має фрактальну вимірність $\delta\approx0.5$. Наведена деревоподібна структура утворення НМ може розглядатися як *система координат*, для роботи у якій використовують *p*-адичні числа.

P-адичні числа [10–12] записують у вигляді нескінченного ряду по ступенях простого числа p: $x=\sum_{i=-m}^{\infty}a_i p^i$, $a_i\in\{0,1,3,...,p-1\}$, така форма запису є подібною до десяткового запису числа, тільки з нескінченною "цілою" частиною, що відповідає позитивним ступеням p:$x=a_{-m}\,a_{-m+1}\ldots a_{-1}a_0a_1\;a_2\ldots\;\ldots\;a_n\ldots$, тут $a_i\in\{0,1,3,...,p-1\}$ – цифри, а $p=2, 3, 5,\ldots,A_1,\ldots$ – одне з простих чисел натурального ряду. Оскільки, як видно, усі *p*-адичні числа нескінченно великі в звичайному змісті, то величина такого числа визначається по першому ненульовому члену ряду за формулою: $|x|_p=p^{-am}$, $a>0$. Її зміст у тому, що вона *обернено пропорційна* ступені подільності конкретного числа на фіксоване просте число p. Чим "більшу кількість разів" число поділяється на p, тобто чим більше m, тим менше *p*-адична величина. (Наприклад, $|36|_2=1/4$, $|7|_2=1$, $|127|_2=1$, $\left|\frac{1}{64}\right|_2=64$).

Основна відмінність величини числа, що утворюється в такий спосіб, полягає в тому, що порушується *архімедова* метрика, тобто в розбіжності з звичайними лінійними мірами, у невиконанні умови простого додавання $|x_1+x_2|_p\le\max\{|x_1|_p,\;|x_2|_p\}\ne(|x_1|_p+|x_2|_p)$. Показано, що усі відомі "фрактальні" степеневі закони є просто зв’язок його стандартної і p-адичної мір для кожного фізичного об’єкту (так звана формула добутку у p-адичному аналізі). Величина параметра a в цьому випадку збігається з фрактальною вимірністю досліджуваного об'єкта.

Роботи останніх років показали, що особливості будівлі p-адичних чисел додають їх сукупностям, тобто полям $\boldsymbol{Z}_{\mathbf{p}}$ і $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}$ (m□0) p-адичних чисел *кластерну*, фрактальну структуру. Вся множина натуральних чисел у p-адичній нормі стискується до кластера $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{p}} = [1,2,\mathrm{K}, p-1]^n$. У загальному випадку поле $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{p}}$ (чи $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}$) складається зі своїх копій $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{p}} = \left(\mathrm{Y}_{n=-\infty}^{\infty} p^n Z_p \right)$. Тут множення на ступінь p означає збільшення ступеня дозволу спостереження кластера у p раз). З кластерною структурою кореспондується представлення полів p-адичних чисел у вигляді *погано зумовлених* множин. Аналогію легко зрозуміти, якщо записати цю множину у “нелінійному” вигляді [13]:

$$Z_p = \mathrm{Y}_{i,j,k} (a_i + p(a_j + ... + p(a_k + pZ_p)\mathrm{K})).$$

Взаємозв'язок усіх частин деревоподібної структури забезпечується взаємним вкладенням кластерів. Такі множини реалізують ідею принципу “кожне в кожнім”. Як видно з визначення, множина p-адичних чисел може бути представлена у вигляді дерева з розгалуженням на p частин у кожній вершині. Таке дерево іноді називають ієрархічним чи лексикографічним. Конкретне число можна отримати, яко рухаючись по деякому виділеному шляху по його гілках, послідовно виписувати цифри у вершинах. На рис. 4 кожному шляху відповідає визначене число і навпаки.

Ці дерева можуть вважатися як схеми причинно-наслідкових зв'язків взаємодії об'єктів у різних процесах, відповідно до заданого простого числа p. Просте число в таких випадках відіграє роль фізичного параметра. Номер рівня ієрархії дорівнює ступеню збільшення дозволу, з яким спостерігається структура кластерів. Зазначимо, що 2-адичне дерево при використанні ПНТ має тільки такий вигляд, як вказано на рис.4 для будь-яких ФН і дозволяє враховувати α-рівні: $\mu_1=1$, $\mu_2=0.5\cdot 2$, $\mu_3=0.5^2\cdot 4$, $\mu_4=0.5^3\cdot 8$,..., множник біля кожного μ_i, $i=1, 2,3,...$ означає рівень дендрограми і кількість її гілок.

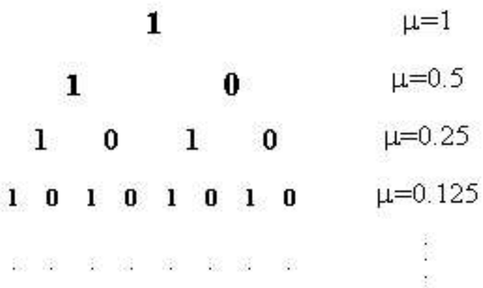


Рис. 4. Дерево p-адичних чисел для p=2

Якщо кожна окрема гілка не є „рівноправною”, тобто коли не враховується ПНТ і ФН для $\mu_1 = 1$ не є рівнобедреним трикутником, кожній гілці можна надати вагу ω_i, зокрема, залежно від площі кожного трикутника, яким привласнюються значення 0 та 1 відповідно ($1 \le \omega_i \le 0$), але для (бінарної) 2-адичної системи координат це не має принципового значення, бо ω_i у будь-якому випадку буде 1 або 0.

Як відомо [8], 2-адичне ціле – степеневий ряд $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i$ з $a_i \in \{0, 1\}$. Такий степеневий ряд не збігається у звичайному розумінні, але ним можна маніпулювати як формальним об’єктом; набір всіх таких степеневих рядів формує кільце $\boldsymbol{Z}_2$ 2-адичних цілих. Головна різниця між кільцем $\boldsymbol{Z}_2$ і кільцем $Z(2)[[X]]$ формальних степеневих рядів у просторі X полягає в тому, що додавання в $\boldsymbol{Z}_2$ виконується переносом переповнення бітів, щоб виконати умови, що $2^i+2^i=2^{i+1}$. Множення визначається зсувом та додаванням. Використовуючи ці операції, $\boldsymbol{Z}_2$ стає кільцем з тотожним 0 і множення ідентифікується $1=1\cdot 2^0$.

Процедура утворення 2-адичного аналога НЗ наведена на рис. 5. Вона складається з послідовності кроків:

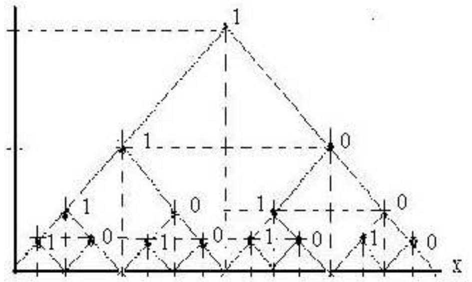


Рис. 5. Процедура утворення 2-адичного аналога НЗ

1^0. Вершині рівнобедреного трикутника (РТ), побудованого на інтервалі, у якому визначена НЗ, привласнюється **1,** $I \to \mathbf{1}$.

2^0. Інтервал ділиться навпіл, на кожній половині будується новий РТ, кожній вершині привласнюються **0** та **1** відповідно, $I/2 \to 0$, $I/2 \to \mathbf{1}$.

3^0. Для кожного з знов отриманих інтервалів повторюється процедура п. 2^0.

Отримуємо послідовність

$I/2 \to 0, \qquad I/2 \to \mathbf{1};$

$$^{2}/2 \to 0 \Rightarrow \begin{cases} I/4 \to 0 \\ I/4 \to 1 \end{cases}, {}^{2}/2 \to 1 \Rightarrow \begin{cases} I/4 \to 0 \\ I/4 \to 1 \end{cases};$$

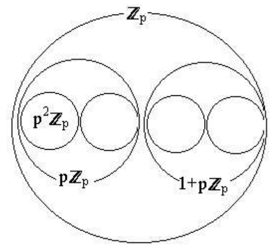
$$^{2}/2 \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I}/4 \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I}/8 \to 0 \\ \mathrm{I}/8 \to 1 \end{cases} \\ \mathrm{I}/4 \to 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I}/8 \to 0 \\ \mathrm{I}/8 \to 1 \end{cases} \end{cases},$$

$$^{2}/2 \to 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I}/4 \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I}/8 \to 0 \\ \mathrm{I}/8 \to 1 \end{cases} \\ \mathrm{I}/4 \to 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I}/8 \to 0 \\ \mathrm{I}/8 \to 1 \end{cases} \end{cases};$$

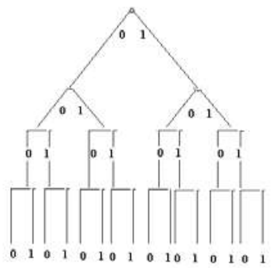
.
.
.

Таким чином, НЗ $\tilde{a}$ має вигляд дерева, гілками котрого є: $a^*\{1\ 0\ 0\ 0\ \ldots\}$, $a^*\{1\ 0\ 1\ 1\ \ldots\}$, $a^*\{1\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ldots\}$,... $a^*\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots\}$, вираз у $\{\ldots\}$ є 2-адичним числом, характерними для гілок є те, що всі вони мають однакову 2-адичну оцінку та 2-адичний порядок. Це дає можливість використання 2-адичної моделі НЗ не тільки для виконання нечіткої арифметики, але і для отримання нечітких висновків, але у якості антицидентів та консекантів (правило „якщо-то”) повинні використовуватись 2-адична оцінка та 2-адичний порядок.

Раніше було показано, що 2-адична модель НЗ (як і взагалі p-адична модель) представляє собою гратчасту структуру. Для більш свідомого розуміння цієї особливості наведемо деякі теоретичні відомості [14]: грати – це частково упорядкована множина, в якій кожна двохелементна підмножина має точну верхню і точну нижню грані. Замкнені множини, до яких відносяться множини, що вміщують всі свої граничні крапки, утворюють грати. Повні грати – частково упорядкована множина, у якій будь-яка не порожня множина A має точну верхню і точну нижню грані, які звичайно називають об′єднанням та перетином елементів підмножини A. Якщо частково упорядкована множина має найбільший елемент і кожна її непорожня множина має точну нижню грань, то ця множина є повними гратами.



а)



б)

Рис. 6. Представлення одиничного інтервалу у 2-адичному базисі: а) топологія простору Z_2 – підкільце у просторі Q_2; б) канонічне представлення Z_2 у вигляді дерева

Висновки

1. Будь-який об’єкт за умов невизначеності слід розглядати як новий тип об'єктів, для яких в загальному випадку

необхідно конструювати і нові типи "величин", що їх координатизують, і нові метрики. Обґрунтовано доцільність використання ультраметричних просторів для аналізу невизначеності, показано, що автоматичне перенесення принципу нечіткого розширення на аксіоми відстані неправомірно звужує поняття невизначеності, ускладнює процедури обробки та аналізу інформації за рахунок обов'язкового використання ФН.

2. У ТНМ широко використовується принцип гарантованого результату, що призводить до переважного використання операцій $\max - \min$, це логічно призводить до використання у якості 3-ої аксіоми відстані ПНТ, $d(X,Y) \leq \max[d(X,Y), d(Y,Z)]$, що логічно викликає необхідність аналізу НМ у ультраметриці. Це важливий висновок для ТНМ, тому що дає можливість розглядати тільки *одну* трикутну ФН. У 2-адичому базисі ФН практично не відіграє ролі, подібної до ФН 1-типу, для НЗ, що є опертою на інтервал, ФН у вигляді рівнобедреного трикутника, Гаусова типу, трапецієподібна приводять до одного *p*-адичного дерева.

3. НЗ у 2-адичному базисі має вигляд дерева, гілками котрого є: a*{1 0 0 0 ….}, a*{1 0 1 1 ….}, a*{1 0 1 0 0 ….}, . . . a*{1 1 1 1 1 ….}, вираз у {….} є 2-адичним числом. Характерною особливістю гілок є те, що всі вони мають однакову 2-адичну оцінку та 2-адичний порядок. Це дає можливість використання 2-адичної моделі НЗ не тільки для виконання нечіткої арифметики, але і для отримання нечітких висновків, за умови використання у якості антицидентів та консекантів (правило „якщо-то") 2-адичної оцінки та 2-адичного порядку.

Список літератури

1. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

2. *Nguyen H.T.* A note on the extension principle for fuzzy sets. J. Math. Anal. Appl. 64 369-380 (1978).

3. *Barros L. C., Bassanezi R. C. and Tonelli, P. A.* On the continuity of Zadeh's extension. – *Proceedings Seventh IFSA World Congress*, Prague, 1997. – Vol. II. – P. 3–8.

4. *Поспелов Д.А.* Из истории развития нечетких множеств и мягких вычислений в России. – Новости ИИ. – 2001. – №2–3. – С. 28–36.

5. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. Р*-адический анализ и математическая физика. – М.: Наука, 1994.

6. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 720 с.

7. *Klapper A.,Goresky M.* Feedback Shift Registers, 2-Adic Span, and Combiners With Memory. – 763H Anderson Hall, Dept. of Computer Science, University of Kentucky, Lexington, KY, 40506-0047, Grant OGP0121648, the National Security Agency under Grant Number MDA904-91-H-0012, and the National Science Foundation under Grant Number NCR9400762.

8. *Хренников А.Ю.* Моделирование процессов мышления в р-адических системах координат. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 296 с.

9. *Каток С.Б. Р*-адический анализ в сравнении с вещественным / Пер. с англ. П.А. Колгушкина. – М.: МЦНМО, 2004. – 112 с.

10. *Коблиц Н. Р*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции. Пер. с англ. В. В. Шокурова / Под ред. и с предисловием Ю. И. Манина. – М.: Мир, 1981. – 192 с.

11. *Schikhof W.* Ultrametric Calcu-lus: An introduction to *p*-adic analysis, Cambridge University Press, 1984.

12. *Биркгоф Г.* Теория решеток, пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

13. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.

14. *Baker A.J.* An introduction to p-adic numbers and p-adic analysis. -Інтернет-ресурс:http://www.maths.gla.ac.uk/_ ajb.