

УДК 004:056.6(045)

Конахович Г.Ф., д-р техн. наук
Андрухович П.О.**ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЇ МОДЕЛЕЙ
КАНАЛІВ ВИТОКУ ІНФОРМАЦІЇ****Інститут інформаційно-діагностичних систем
Національного авіаційного університету**

Проаналізовано методи апроксимації даних, що були отримані в процесі проведення експерименту, та викладено їх основні концепції, запропоновано доповнений метод сплайн-апроксимації. Зроблено розрахункові висновки щодо вибору методу з найменшою похибкою

Вступ та постановка задачі

В матеріалах статті «Моделювання технічних каналів витоку інформації в службових приміщеннях» [2] були розглянуті математичні моделі законів зміни рівня сигналів, які є носіями інформації з обмеженим доступом, побудовані різні моделі дифракції (різні сценарії розповсюдження), формалізовані основні принципи, підходи та обмеження при побудові математичних законів зміни рівня сигналів та зроблені відповіді теоретичні розрахунки.

Метою дослідження є аналіз різних методів апроксимації функції, що показує залежність поля сторонніх електромагнітних випромінювань (СЕМВ) від відстані і вибір метода найменшої погрішності, що дозволить уточнити запропоновані математичні моделі законів зміни рівня сигналів із попередньої статті.

На основі отриманих в ході експерименту даних були побудовані графіки залежності коефіцієнта затухання СЕМВ від відстані для системного блоку і монітору на різних частотах (рис. 1 та 2).

Необхідно використовуючи різні методи, апроксимувати функцію $y = f(x)$, задану таблицею:

а) багаточленом першого ступеня $y = P_1(x) \equiv a_1 + a_2x$;

б) багаточленом другого ступеня $y = P_2(x) \equiv a_1 + a_2x + a_3x^2$;

в) експонентною залежністю $y = a_1e^{a_2 \cdot x}$;

г) сплайнами;

а також зробити висновок, яка з отриманих формул щонайкраще апроксимує функцію $y = f(x)$.

Враховуючи, що найбільш вразливими є частоти 50МГц і 400МГц, розглянемо рисунки 1 і 2 саме для цих частот. Для зручності, результати експерименту подамо у табличному вигляді (табл. 1 – СЕМВ від монітору, табл. 2 – СЕМВ від системного блоку), де за y прийнятий коефіцієнт затухання СЕМВ k , а за x – відстань d від передавача до перешкоди.

Виклад основного матеріалу досліджень

Розглянемо декілька найбільш розповсюджених методів апроксимації.

Апроксимація методом найменших квадратів

Дуже часто, особливо при аналізі емпіричних даних виникає необхідність знайти в явному виді функціональну залежність між величинами x й y , які отримані в результаті вимірів. При аналітичному дослідженні взаємозв'язку між двома величинами x й y роблять ряд спостережень та в результаті отримуємо таблицю дослідних значень.

Ця таблиця, як правило, виглядає як підсумок яких-небудь експериментів, у яких x_i (незалежна величина) задається дослідником, а y_i виходить у результаті дослідження. Тому значення y_i будемо називати емпіричними.

Між величинами x й y існує функціональна залежність, але її аналітичний

вид, як правило, невідомий, тому виникає практично важливе завдання – знайти емпіричну формулу:

$$y = f(x; a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (1)$$

(де a_1, a_2, \dots, a_m – параметри), значення якої при $x = x_i$ мало відрізнялися б від дослідних значень $y_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

Зазвичай, вказують клас функцій (наприклад, безліч лінійних, степеневих, показникових і т.п.), з якого вибирається функція $f(x)$, і далі визначаються найкращі значення параметрів.

Якщо в емпіричну формулу (1) підставити вихідні значення x_i , то одержимо теоретичні значення

$$y_i = f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m),$$

де $i = 1, 2, \dots, n$.

Різниця $y_i^T - y_i$ називаються відхиленнями і являють собою відстані по вертикалі від M_i до графіка емпіричної функції.

Відповідно до методу найменших квадратів найкращими коефіцієнтами a_1, a_2, \dots, a_m вважаються ті, для яких сума квадратів відхилень знайденої емпіричної функції від заданих значень функції

$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n [f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i]^2 \quad (2)$$

буде мінімальною.

Пояснимо геометричний зміст методу найменших квадратів.

Кожна пара чисел (x_i, y_i) з вихідної таблиці визначає точку M_i на площині XOY .

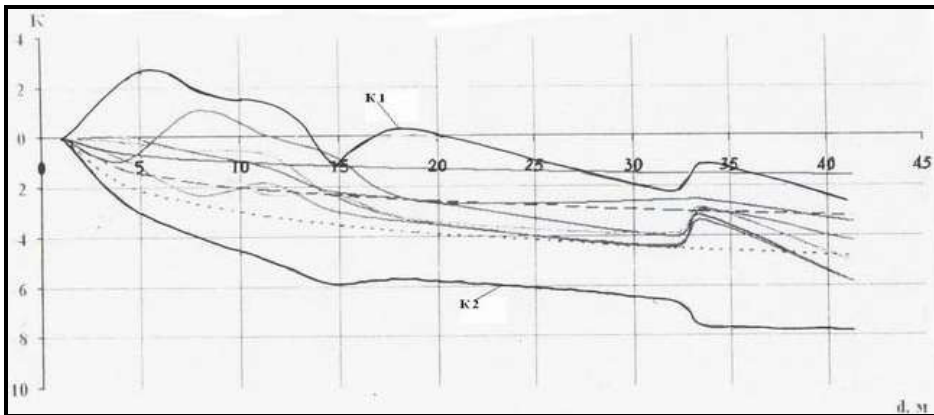


Рис. 1. Коефіцієнт затухання поля СЕМВ для монітору

Таблиця 1. Коефіцієнт затухання поля СЕМВ для монітору

x	y	x^2	xy	x^3	x^4	x^2y	$\ln y$	$x \ln y$
5	1,38	25	6,9	125	625	34,5	0,322083	1,610417
10	1,202	100	12,02	1000	10000	120,2	0,183987	1,839868
15	0,89	225	13,35	3375	50625	200,25	-0,11653	-1,74801
20	1	400	20	8000	160000	400	0	0
25	0,92	625	23	15625	390625	575	-0,08338	-2,08454
30	0,79	900	23,7	27000	810000	711	-0,23572	-7,07167
35	0,912	1225	31,92	42875	1500625	1117,2	-0,09212	-3,22404
40	0,759	1600	30,36	64000	2560000	1214,4	-0,27575	-11,0301
180	7,853	5625	161,25	162000	5482500	4372,55	-0,29744	-21,7081

Конкретний вид системи (3) залежить від того, з якого класу емпіричних формул ми шукаємо залежність (1). У ви-

падку лінійної залежності $y = a_1 + a_2x$ система (3) прийме вид:

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (4)$$

Ця лінійна система може бути вирішена будь-яким відомим методом (методом Гауса, простих ітерацій, формулами Крамера).

Використовуючи формулу (1) при різних значеннях коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_m можна побудувати ряд кривих, які є графіками функції (1).

Завдання полягає у визначенні коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_m таким чином, щоб сума квадратів відстаней по вертикалі від $M_i(x_i, y_i)$ до графіка функції (1) була найменшою.

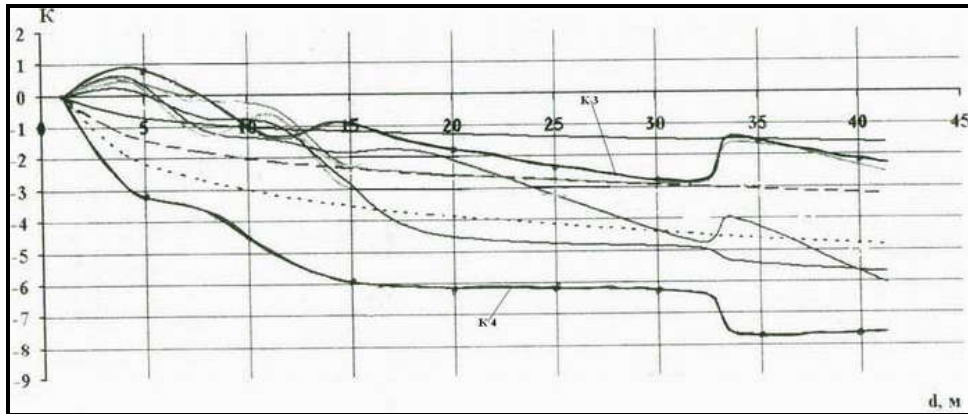


Рис. 2. Коефіцієнт затухання поля СЕМВ для системного блоку

Таблиця 2. Коефіцієнт затухання поля СЕМВ для системного блоку

x	y	x ²	xy	x ³	x ⁴	x ² y	lny	xlny
5	0,708	25	3,54	125	625	17,7	-0,345311185	-1,72655593
10	0,582	100	5,82	1000	10000	58,2	-0,541284831	-5,41284831
15	0,513	225	7,695	3375	50625	115,425	-0,667479434	-10,0121915
20	0,519	400	10,38	8000	160000	207,6	-0,655851396	-13,1170279
25	0,495	625	12,375	15625	390625	309,375	-0,703197516	-17,5799379
30	0,479	900	14,37	27000	810000	431,1	-0,736054682	-22,0816404
35	0,412	1225	14,42	42875	1500625	504,7	-0,88673193	-31,0356175
40	0,407	1600	16,28	64000	2560000	651,2	-0,898942094	-35,9576837
180	4,115	5625	84,88	162000	5482500	2295,3	-5,434853067	-136,923503

Побудова емпіричної формули складається із двох етапів: з'ясування загального виду цієї формули й визначення її найкращих параметрів.

Якщо невідомо характер залежності між даними величинами x й y , то вигляд емпіричної залежності є довільним. Перевага віддається простим формулам, що мають високу точність. Велике значення має зображення отриманих даних у декартових або в спеціальних системах координат (напівлогарифмічній, логарифмічній й т.д.). По розміщенню точок можна приблизно вгадати загальний вигляд залежності, шляхом установлення подібності

між побудованим графіком і зразками відомих кривих.

Визначення найкращих коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_m , що входять в емпіричну формулу, роблять добре відомими аналітичними методами.

Для того, щоб знайти набір коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_m , які доставляють мінімум функції S , обумовленою формулою (2), використаємо необхідну умову екстремуму функції декількох змінних – рівність нулю часткових похідних. У результаті одержимо нормальну систему для визначення коефіцієнтів a_i ($i = 1, 2, \dots, m$):

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \dots; \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \quad (3)$$

Таким чином, знаходження коефіцієнтів a_i зводиться до рішення системи (3).

Ця система спрощується, якщо емпірична формула (1) лінійна щодо параметрів a_i , тоді система (3) – буде лінійною.

У випадку квадратичної залежності $y = a_1 + a_2x + a_3x^2$ система (3) прийме вид:

$$\begin{cases} a_1n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases} \quad (5)$$

Апроксимація методом експонентної залежності

У ряді випадків як емпіричну формулу беруть функцію, до якої невизначені коефіцієнти входять нелінійно. При цьому іноді функцію вдається звести до лінійної. До числа таких залежностей відносять експоненціальну залежність:

$$y = a_1 \cdot e^{a_2 x}, \quad (6)$$

де a_1 й a_2 – невизначені коефіцієнти.

Лінеаризація досягається шляхом логарифмування рівності (6), після чого одержуємо співвідношення

$$\ln y = \ln a_1 + a_2 x. \quad (7)$$

Позначимо $\ln y$ й $\ln a_1$ відповідно через t й c , тоді залежність (6) може бути записана у вигляді $t = c + a_2 x$, що дозволяє застосувати формули (7) із заміною a_1 на c та y_i на t_i .

Сплайн-апроксимація

Розглянемо побудову сплайн-апроксимації аналітично зв'язаних часових послідовностей детальніше. В задачах числової обробки даних, що містять випадкові складові, часто необхідно оцінити

тренди часових послідовностей, між якими існує деякий аналітичний зв'язок.

Тоді розглянемо задачу в такій постановці.

Часові послідовності деяких випадкових процесів представлені відсіками:

$$y_1(t) = \{y_1(1), y_1(2), \dots, y_1(N)\}$$

та

$$y_2(t) = \{y_2(1), y_2(2), \dots, y_2(N)\}$$

одержаними як результати вимірювань за схемою:

$$y_i(t) = x_i(t) + \eta_i(t), i = 1, 2, \dots,$$

де $\eta_i(t)$ – шум з нульовим середнім;

$E(\cdot)$ – математичне сподівання, $E_{\eta_i}(t) = 0$; $E\eta_i(t)\eta_j(\tau) = \sigma_{\eta_i}^2 \delta_{ij} \delta_{tr}$, де δ_{ij} , δ_{tr} – функції Дірака.

Нехай далі між $x_1(t)$ та $x_2(t)$ існує лінійний зв'язок:

$$b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = d.$$

Складемо наступний функціонал у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{i=1}^N [y_1(t) - S_1(t_i)]^2 + \\ & + \sum_{i=1}^N [y_2(t) - S_2(t_i)]^2 + \\ & + \lambda \sum_{i=1}^N [d - b_1 S_1(t_i) - b_2 S_2(t_i)]^2, \end{aligned}$$

де: $S_1(t) = XA_1$ та $S_2(t) = XA_2$ – кубічні ермітові сплайни, які апроксимують часові послідовності $y_1(t)$ та $y_2(t)$; X – матриця планування; $A = \{a_j\}_j^y$ – вектори оцінюваних параметрів (ординати точок "склейки" фрагментів сплайнів), в даному випадку вага $\lambda = 1$.

Значення локального ермітового кубічного сплайна в довільній точці обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} S(\omega) = & a_{j-1}^1 x(\omega) + a_j^2 x(\omega) + \\ & + a_{j+1}^3 x(\omega) + a_{j+2}^4 x(\omega). \end{aligned}$$

Для $\omega \in [\omega_{i_j}, \omega_{i_{j+1}}]$, де ${}^k x(\omega)$ – локальні функції форми, $k = 1 \div 4$, a_j – значення ординат вузлів "склейки", $j = 1, 2, \dots, r$.

Вимагатимемо виконання умови методу найменших квадратів (МНК): $\Phi = \min$. Для цього потрібен розв'язок системи з $2r$ рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\sigma\Phi}{\alpha_i} = 0, j = \overline{1, r} \\ \frac{\sigma\Phi}{\alpha_i} = 0, j = \overline{1, r} \end{cases}$$

Розв'язати цю систему доцільніше у матричному вигляді. Тоді:

$$\begin{aligned} \Phi &= (Y_1 - XA_1)^T(Y_1 - XA_1) + \\ &+ (Y_2 - XA_2)^T(Y_2 - XA_2) + \\ &+ \lambda(D - b_1XA_1 - b_2XA_2)^T \times \\ &\times (D - b_1XA_1 - b_2XA_2). \end{aligned}$$

А вимоги МНК:

$$(Y - PA)^T(Y - PA) = \min,$$

де: $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ D \end{bmatrix}$, $Y_1 = [y_1(1), y_1(2), \dots, y_1(N)]^T$,

$Y_2 = [y_2(1), y_2(2), \dots, y_2(N)]^T$ – вектори початкових часових послідовностей;

$D = [d, d, \dots, d]^T$, розмірності $(N * 1)$;

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, A_1 = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}]^T,$$

$A_2 = [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r}]^T$ – вектори ординат вузлів "склейки" фрагментів сплайну;

$$P = \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ b_1X \end{bmatrix}, X \text{ – блочнодіагональні матриці}$$

планування, стовпцями яких є локальні функції форми сплайну ${}^k x(t)$, $k = 1 \div 4$ [14]; O – нульова матриця, розмірності $N * r$.

Розмірність матриці P – $(3N * 2r)$.

Далі класичний розв'язок МНК:

$$A = (P^T P)^{-1} P^T Y,$$

та, $S_1 = XA_1$, $S_2 = XA_2$ – сплайни, які побудовані вже з урахуванням аналітичного зв'язку між $x_1(t)$ та $x_2(t)$.

На рис. 3 наведений приклад побудови класичної сплайн-апроксимації (Sk_1, Sk_2) та сплайн-оцінки (S_1, S_2) з урахуванням аналітичного зв'язку двох часових послідовностей:

$$y_1(t) = \sin(t) + \eta_1(t)$$

та

$$y_2(t) = \frac{d}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} x_1(t) + \eta_2(t),$$

де $\eta_1(t), \eta_2(t)$ – нормальні шуми з нульовими математичними сподіваннями та середньоквадратичними відхиленнями $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$, $(d = -2, b_1 = 1, b_2 = 2)$.

За допомогою математичного моделювання побудуємо графіки похибок сплайнів відносно детермінованих основ $(x_1(t), x_2(t))$ залежності від середньоквадратичних відхилень випадкових складових $(\sigma_1 = \sigma_2)$ (рис. 5, а).

Цікаво відмітити, що сплайн, який апроксимує першу часову послідовність (похибка μ_1), має невелику перевагу в порівнянні з класичним методом (похибки $\mu k_1, \mu k_2$), а сплайн, що апроксимує другу часову послідовність, має перевагу в якості майже вдвічі (похибка μ_2). Це відбувається тому, що коефіцієнти b_1 та b_2 в аналітичному зв'язку мають співвідношення 1:2.

Окремий інтерес викликають задачі де часові послідовності між детермінованими основами яких існує аналітичний зв'язок мають випадкові складові з різними СКВ.

На рис. 2 представлені класичні сплайн-апроксимації (Sk_1, Sk_2) та сплайн-оцінки (S_1, S_2) з урахуванням аналітичного зв'язку двох часових послідовностей, які аналогічні першому прикладу, для ви-

падку, коли середньоквадратичні відхилення випадкових складових

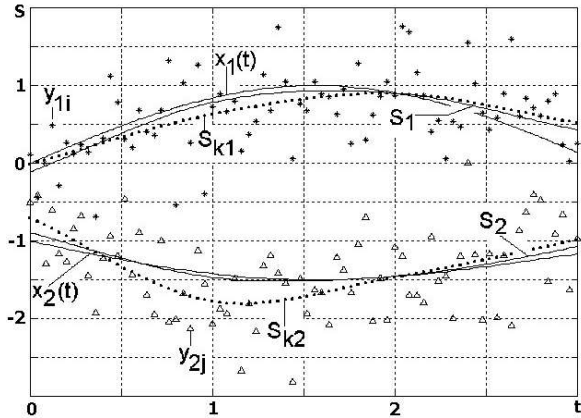


Рис. 3. Сплайн-апроксимації часових послідовностей класичним (Sk_1, Sk_2) та запропонованим (S_1, S_2) методами

мають значення: $\sigma_1 = 0.25$, $\sigma_2 = 4\sigma_1$,
($d = -2, b_1 = 1, b_2 = 2$).

За допомогою математичного моделювання побудуємо графіки похибок сплайнів відносно детермінованих основ ($x_1(t), x_2(t)$) в залежності від СКВ першої випадкової складової σ_1 ($\sigma_2 = 4\sigma_1$) (рис. 5, б). Очевидним є той факт, що похибка μk_2 приблизно в чотири рази більша, ніж μk_1 .

А в побудові сплайн-апроксимації з урахуванням аналітичного зв'язку

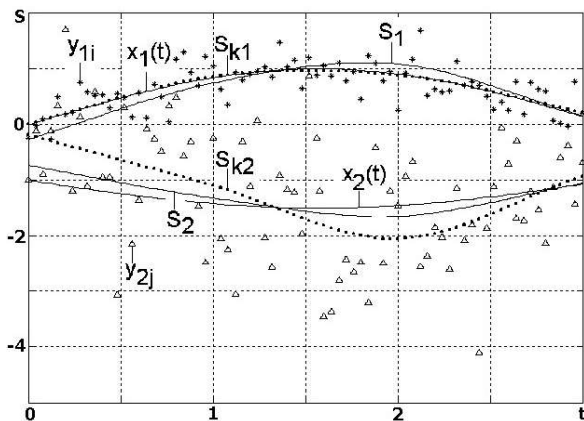


Рис. 4. Сплайн-апроксимації часових послідовностей

відбувається “перекачування” якості. Тобто похибка μ_1 стає більшою ніж μk_1 , а якість сплайн-оцінювання другої часової послідовності значно покращується

(похибка μ_2) в порівнянні з класичним методом (похибка μk_2).

Таким чином, сплайн-оцінювання двох часових послідовностей, між детермінованими основами яких існує аналітичний зв'язок, а випадкові складові мають однакові СКВ, необхідно проводити запропонованим методом. А у випадку, коли СКВ шумових складових значно відрізняються – часову послідовність, яка краще спостерігається, потрібно апроксимувати класичним сплайном, а часову послідовність, яка має потужнішу випадкову складову, необхідно оцінювати сплайном з урахуванням аналітичного зв'язку.

Цікавим є приклад модифікації вищевказаного методу для сплайн-апроксимації оцінок кореляційних послідовностей гармонічних сигналів з урахуванням аналітичного зв'язку між дійсною та уявною складовими цих послідовностей.

В задачах числової обробки гармонічних сигналів, що містять випадкові складові, часто необхідно оцінити тренди кореляційних послідовностей цих сигналів. В класичному випадку для цього можна використовувати комплексні сплайни з різним розташуванням вузлів “склейки” в залежності від частоти сигналу. Але така апроксимація не враховує аналітичного зв'язку між уявною та дійсною частинами оцінок кореляційних послідовностей

$$r(m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} y[n+m]y^*[n], & 0 \leq m \leq N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} y^*[n+|m|]y[n], & -(N-1) \leq m \leq 0 \end{cases},$$

де N – об'єм вхідної послідовності. Зазначимо, що цей зв'язок для кожного часового зміщення m є незалежним від амплітуди та фази гармонічного сигналу і дорівнює

$$q(m) = \frac{\text{Im}[r(m)]}{\text{Re}[r(m)]} = \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{N} km\right]}{\cos\left[\frac{2\pi}{N} km\right]},$$

де k – фіксована нормована частота. В формулі (1) вибрано зсунену оцінку (далі оцінку) кореляційної функції (нормуючий коефіцієнт $\frac{1}{N}$, а не $\frac{1}{N-m}$) для зменшення дисперсії відсіків цієї функції при значних зміщеннях m .

Далі наведемо приклади побудови запропонованої апроксимації. Нехай спостерігається гармонічний процес із амплітудою $A = 1$, випадковою початковою фазою φ , рівномірно розподіленою на інтервалі $[0; 2\pi]$, нормованою частотою $k = 4$, об'ємом вибірки $N = 10$:

$$y(n) = y_r(n) + jy_i(n) = A \exp\left\{j\left(\frac{2\pi}{N}knt + \varphi\right)\right\} + \eta_r(n) + j\eta_i(n), n = \overline{0, N-1},$$

де $\eta_r(n), \eta_i(n)$ – дійсна та уявна складові гаусівського білого шуму з нульовим середнім та дисперсіями $V_r = V_i = 1$. За формулою (8) знайдемо оцінку кореляційної

функції $\tilde{r}(m)$. Якісну сплайн-апроксимацію такої послідовності побудувати важко через те, що на десять відсіків приходиться чотири коливання. Тому спочатку проведемо інтерполяцію даної оцінки, а потім по більшій кількості відсіків розрахуємо апроксимуючі сплайни за класичним та запропонованим вище методами. На рис. 5 наведено інтерпольовану праву частину дійсної складової оціненої кореляційної функції. За рахунок наявності шуму вона значно відрізняється від ідеальної (побудованої в разі відсутності шуму). Класична сплайн-апроксимація (рис. 5,а) добре наближає вхідну послідовність, але ніякої нової інформації про процес не додає. Проте сплайн-апроксимація, побудована з урахуванням аналітичного зв'язку між уявною та дійсною складовими інтерпольованої оцінки кореляційної функції (рис. 5,б), навпаки зовсім не наближує цю вхідну послідовність, а відтворює функцію подібну до ідеальної.

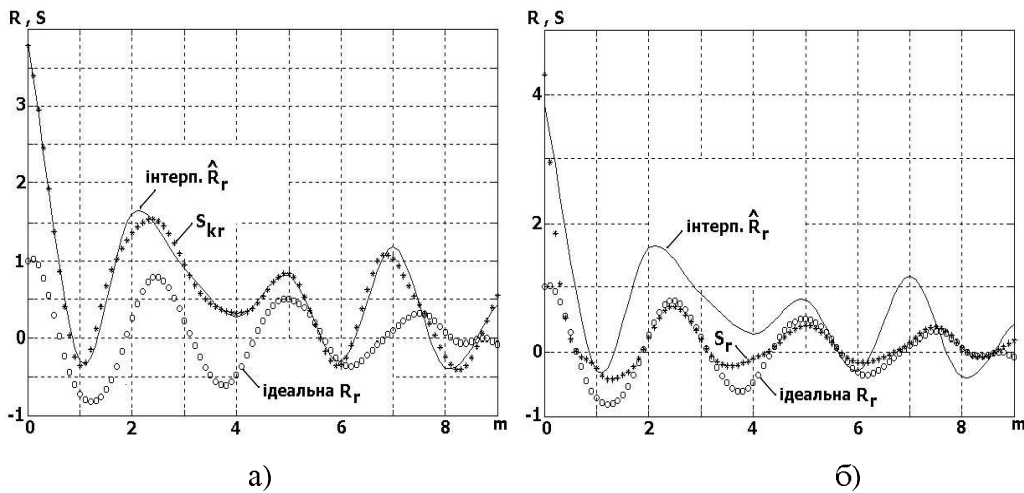


Рис. 5. Сплайн-апроксимації кореляційних послідовностей: а – класичним (S_{kr}) та б – запропонованим (S_r) методами

Цікаво прослідкувати за поведінкою сплайнів в разі відсутності корисної складової у вхідній послідовності ($A = 0$). На рис. 6 наведені приклади апроксимації оцінки кореляційної функції шуму. Як і в першому прикладі класичний сплайн (рис. 6,а) добре наближує оцінку \tilde{R}_r , але в цьому разі важко сказати про наявність чи

відсутність корисної складової в сигналі, що спостерігається. Проте сплайн, побудований запропонованим методом (рис. 6,б), вказує на відсутність гармонічної складової в цьому сигналі.

обох вище наведених прикладах для побудови апроксимації класичним та запропонованим методами матриці планування розраховувалися для однаково роз-

ташованих абсцис вузлів “склейки” фрагментів сплайнів. Вузли підбиралися за умови якісного наближення класичним сплайном ідеальної кореляційної функції (рис. 5). В цих прикладах очевидна властивість сплайн-апроксимації з урахуванням аналітичного.

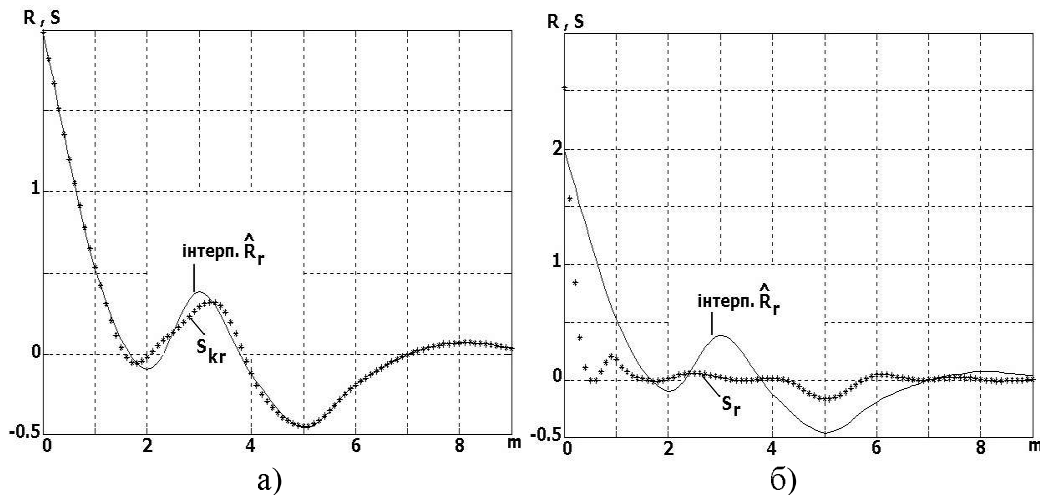


Рис. 6. Сплайн-апроксимації оцінки кореляційної функції шуму а – класичним (S_{kr}) та б – запропонованим (S_r) методами

Аналітичні розрахунки

Функція $y_i = f(x_i), i = \overline{1,8}$ задана таблицями 1 та 2.

Оскільки кожна пара значень (x_i, y_i) зустрічається один раз, то між y та x існує функціональна залежність. З графіків 1, 2 коефіцієнтів загасання поля СЕМВ отримуємо таблицьні залежності $y_i = f(x_i), i = \overline{1,8}$ для подальших розрахунків, де $K1$ – коефіцієнт загасання поля СЕМВ від монітора при частоті поширення радіохвиль $f = 50$ МГц, а $K2$ – коефіцієнт загасання поля СЕМВ від системного блоку при частоті поширення радіохвиль $f = 400$ МГц.

Спочатку зробимо розрахунки для функції загасання поля СЕМВ монітора.

Апроксимуємо функцію $y = f(x)$ лінійною функцією $y = a_1 + a_2x$. Для визначення коефіцієнтів a_1 і a_2 скористаємося системою:

$$\begin{cases} a_1n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}$$

В зв'язку вирівнювати певною мірою послідовності, що згладжуються під цей зв'язок. Цей факт має особливе значення для розробки сплайн-Фур'є перетворення та побудови на його основі завадостійкого методу виявлення радіолокаційних сигналів.

вирішивши яку, одержимо $a_1 = 1,202$ й $a_2 = -0,0098$.

Таким чином, лінійна апроксимація має вигляд $y1(x) = 1,202 - 0,0098 \cdot x$.

Далі апроксимуємо функцію $y = f(x)$ квадратичною функцією $y = a_1 + a_2x + a_3x^2$. Для визначення коефіцієнтів a_1 , a_2 і a_3 скористаємося системою:

$$\begin{cases} a_1n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{cases}$$

вирішивши яку, одержимо $a_1 = 1,418$, $a_2 = 0,015$, $a_3 = -0,0011$.

Таким чином, квадратична апроксимація має вигляд:

$$y2(x) = 1,418 + 0,015 \cdot x - 0,0011 \cdot x^2.$$

Тепер апроксимуємо функцію $y = f(x)$ експоненціальною функцією

$$y = a_1 \cdot e^{a_2 x}, \text{ де } c = \ln(a_1).$$

Вирішивши систему, знайдемо $c = 0,177$, $a_2 = -0,009534$.

Після потенціювання одержимо $a_1 = 1,194$.

Таким чином, експоненціальна апроксимація має вигляд:

$$y_3(x) = 1,194 \cdot e^{-0,009534x}$$

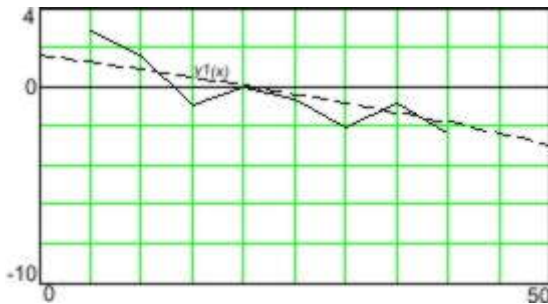


Рис. 7. Лінійна апроксимація у логарифмічному вигляді: $y_1(x) = 20 \log(1,202 - 0,0098x)$

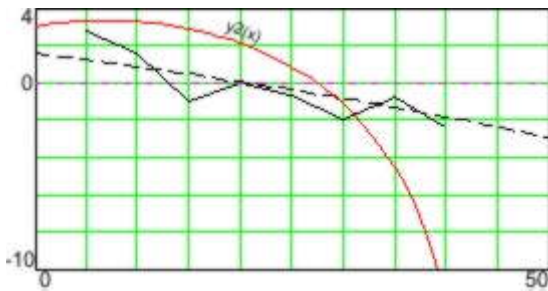


Рис. 8. Квадратична апроксимація $y_2(x) = 20 \log(1,418 + 0,015 \cdot x - 0,0011x^2)$

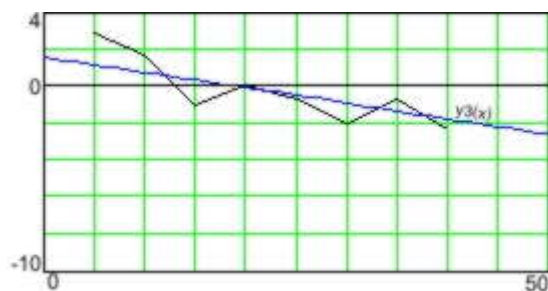


Рис. 9. Експоненціальна апроксимація функції $y_3(x) = 20 \log(1,194 \cdot e^{-0,009534x})$

Розглянемо кореляцію між апроксимуючими функціями:

$$\rho = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\int_0^{\Delta} (y_1(x) - M_{y_1}) \cdot (y_3(x) - M_{y_3}) dx}{\sqrt{D_{y_1} \cdot D_{y_3}}}$$

Кореляція між експоненціальною та лінійною функціями:

$$y_1(x) := 20 \cdot \log(1.202 - 0.0098x),$$

$$y_3(x) := 20 \cdot \log(1.194 \cdot e^{-0.009534x}),$$

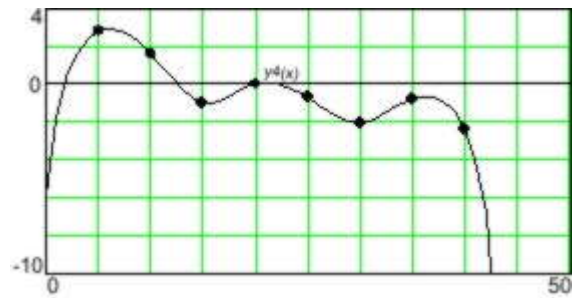


Рис. 10. Апроксимація сплайнами $y_4(x) = 20 \log(spline(x))$

$$\rho = 0.999.$$

Аналогічно розраховуємо кореляцію між іншими видами апроксимації.

Кореляція між квадратичною функцією та експоненціальною:

$$y_2(x) := 20 \cdot \log(1.418 + 0.015x - 0.0011x^2),$$

$$y_3(x) := 20 \cdot \log(1.194 \cdot e^{-0.009534x}),$$

$$\rho = 0.869.$$

Кореляція між квадратичною й лінійною:

$$y_2(x) := 20 \cdot \log(1.418 + 0.015x - 0.0011x^2),$$

$$y_1(x) := 20 \cdot \log(1.202 - 0.0098x),$$

$$\rho = 0.893.$$

Кореляція між лінійною функцією та сплайнами:

$$y_1(x) := 20 \cdot \log(1.202 - 0.0098x),$$

$$y_4(x) := 20 \cdot \log(spline(x)),$$

$$\rho = 0.585.$$

Кореляція між квадратичною функцією та сплайнами:

$$y_2(x) := 20 \cdot \log(1.418 + 0.015x - 0.0011x^2),$$

$$y_4(x) := 20 \cdot \log(spline(x)),$$

$$\rho = 0.476.$$

Кореляція між експоненціальною функцією та сплайнами:

$$y_3(x) := 20 \cdot \log(1.194 \cdot e^{-0.009534x}),$$

$$y_4(x) := 20 \cdot \log(spline(x)),$$

$$\rho = 0.587.$$

Таким чином, дослідивши кореляцію між всіма видами апроксимацій, можемо зробити висновок, що найбільш корельованими є експоненціальна і лінійна апроксимації.

Аналогічно апроксимуємо K2.

Апроксимуємо функцію $y = f(x)$ лінійною функцією $y = a_1 + a_2x$.

Отримуємо лінійну апроксимацію, що має вигляд:

$$y1(x) = 0,624 - 0,005x.$$

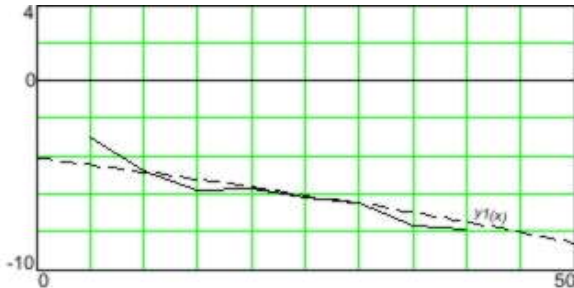


Рис. 11. Лінійна апроксимація в логарифмічному виді: $y1(x) = 20 \log(0,624 - 0,005x)$

Далі апроксимуємо функцію $y = f(x)$ квадратичною функцією $y = a_1 + a_2x + a_3x^2$, отримуємо квадратичну апроксимацію:

$$y2(x) = 0,739 + 0,0082x - 0,00058x^2.$$

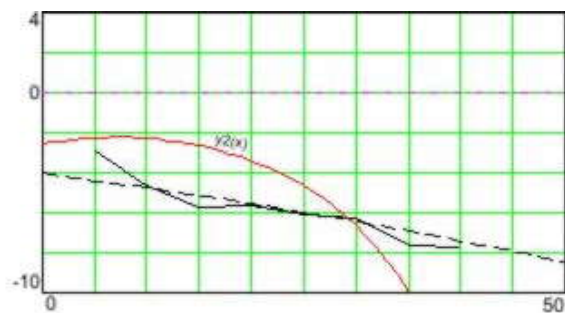


Рис. 12. Квадратична апроксимація К2 $y2(x) = 20 \log(0,739 + 0,0082x - 0,00058x^2)$

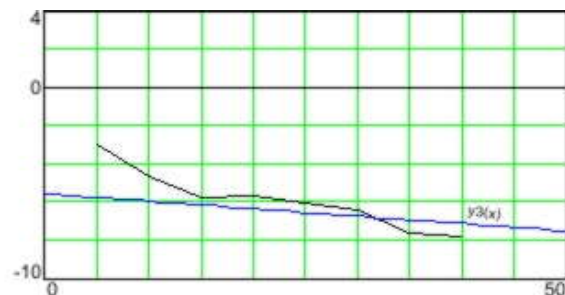


Рис. 13. Експоненціальна апроксимація функції $y3(x) = 20 \log(0,526 \cdot e^{-0,0045x})$

Експоненціальна апроксимація має вигляд:

$$y3(x) = 0,526 \cdot e^{-0,0045x}.$$

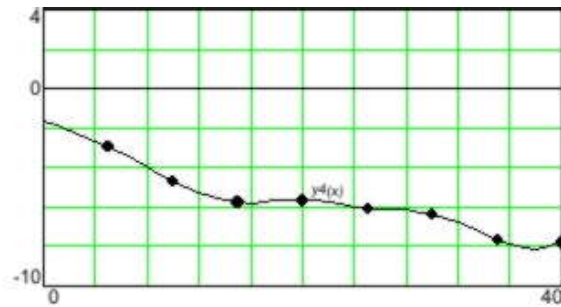


Рис. 14. Апроксимація сплайнами $y4(x) = 20 \cdot \log(\text{spline}(x))$

Висновки

Таким чином, було розглянуто чотири основних види апроксимації: лінійна, квадратична, експоненціальна і сплайни. При виборі апроксимацій, було враховано залежність певних емпіричних визначених значень від частоти їх використання. У даному випадку, більш важливо було формалізувати знайдену залежність, а також знайти невідомі значення залежної змінної шляхом інтерполяції. З розрахунків можна побачити, що найбільш вдалою є сплайн-апроксимація, що забезпечує відносну похибку $\delta = (1-5)\%$, і дозволяє отримати найбільш точно апроксимовані емпіричні дані при побудові математичних моделей законів зміни рівня сигналів електромагнітних випромінювань. Дані дослідження допоможуть в подальших розробках методів захисту від витoku інформації через канали побічних електромагнітних випромінювань.

Список літератури

1. *Конахович І.Ф.* Защита информации в телекоммуникационных системах. – К.: «МК-Пресс», 2005. – 288 с.
2. Защита информации: сборник научных трудов. – К.: НАУ, 2008. – 268 с.
3. *Икрамов Х.Д.* Численные методы для симметричных линейных систем. – М.: Наука, 1988. – 160 с.
4. *Калиткин П.И.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 521 с.
5. *Завьялов Ю.С., Леус В.А.* Сплайны в инженерной геометрии. – М.: Машиностроение, 1985. – 22 с.