УДК 519.65+681.518.2

Денисюк В.П., д-р фіз.-мат. наук
Рибачук Л.В., канд. фіз.-мат. наук

ПРО ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є З ВИКОРИСТАННЯМ КВАЗІФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

**Інститут комп'ютерних технологій
Національного авіаційного університету**

Розглянуто обчислення дискретного перетворення Фур'є з використанням квазіфундаментальних інтерполяційних функцій експоненціального типу. Показано, що при обчисленні дискретного перетворення Фур'є із застосуванням таких функцій отримуються швидкоспадаючі оцінки значень перетворення Фур'є

Вступ

Як відомо [1], існують три класи функцій, які широко застосовуються в чисельному аналізі. Перша група являє собою лінійні комбінації функцій

$$1, x, x^2, \mathrm{K}, x^n, \tag{1}$$

і є алгебраїчними многочленами певного степеня n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Цей клас має відношення до степеневих рядів, багатьох типів ортогональних многочленів тощо.

Другий клас функцій являє собою лінійні комбінації гармонійних тригонометричних функцій

$$1, \cos x, \sin x, \mathrm{K}, \cos nx, \sin nx, \tag{2}$$

і є тригонометричними многочленами степеня n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Цей клас має відношення до рядів Фур'є і інтегралу Фур'є.

Нарешті, третій клас являє собою лінійні комбінації функцій експоненціального типу

$$1, e^{-\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}. \quad (x \ge 0). \tag{3}$$

Функції цього класу мають відношення до перетворень Лапласа тощо.

Експоненціальні функції часто зустрічаються в математичних моделях реальних ситуацій. До них, зокрема, відносяться звичайні задачі накопичення та розпаду, такі, наприклад, як процеси заряду і розряду конденсаторів тощо.

В багатьох задачах доцільно розглядати експоненціальні функції на всій чисельній вісі; в цих випадках ми будемо розглядати такі функції

$$1, e^{-\alpha_1 x^2}, \ldots, e^{-\alpha_n x^2}. \tag{4}$$

Функції цього класу мають відношення до ортогональних многочленів Ерміта, розподілів ймовірностей тощо.

Важливою властивістю кожної з цих груп є те, що скінченна множина функцій такої групи переходить сама в себе при заміні аргументу x на $x + a$. Наприклад, якщо $P_n(x)$ – многочлен степеня n, то $P_n(x + a)$ – також многочлен степеня n по аргументу x, хоча, звичайно, їх коефіцієнти є різними. Те ж саме стосується і двох інших груп.

До недоліків многочленних апроксимацій слід віднести той факт, що швидкість збіжності степеневих рядів і послідовності многочленів, співпадаючих з функцією в заданих рівномірних точках, коли кількість цих точок збільшується, визначається розташуванням особливостей цієї функції, продовженої на комплексну площину, оцінки ж особливостей функції в комплексній площині часто практично неможливо отримати; рідко зустрічаються навіть дуже наближені оцінки.

Це призводить до того, що на рівномірних сітках з ростом кількості вузлів послідовності многочленів можуть взагалі не збігатися навіть до досить простих наближуваних функцій; добре відомим прикладом є функція Рунге. Крім того, до недоліків многочленної апроксимації віднести і той факт, що така апроксимація дуже рідко має якусь фізичну інтерпретацію, яка призводить до корисних уявлень.

До переваг тригонометричних рядів і тригонометричних многочленів слід віднести те, що їх збіжність може бути легко визначена по значеннях функції вздовж дійсної вісі. Певним недоліком тригонометричних многочленів є їх періодичність, що призводить до необхідності довизначати наближувані функції періодичним чином на всю чисельну вісь. Це, в свою чергу, інколи вимагає застосування або спеціальних методів підсумовування тригонометричних рядів і послідовностей тригонометричних многочленів, або спеціальних методів періодичного продовження функції. Слід підкреслити, що хоча періодичні функції і визначені на всій чисельній вісі, всі їх характеристики легко визначаються по їх значенням на одному періоді.

Перевагами функцій третього класу слід вважати те, що вони задані на всій чисельній вісі і є абсолютно інтегровними на всій чисельній вісі.

Розглянемо одну із класичних задач, в яких переваги функцій третього типу виглядають досить виразно.

В багатьох задачах науки і техніки часто доводиться обчислювати перетворення Фур'є функцій, заданих своїми відліками у вузлах рівномірних сіток; для цього часто застосовують різноманітні алгоритми швидкого перетворення Фур'є, які засновані на дискретному перетворенні Фур'є.

Оцінки значень перетворення Фур'є є спотвореними внаслідок шкідливого впливу ефекту накладання частот, який виникає при проведенні первинної дискретизації з рівномірним кроком. Величина впливу цього ефекту визначається порядком спадання перетворення Фур'є неперервної функції. Тому при обчисленні перетворення Фур'є достатньо гладких функцій, заданих своїми відліками, виникає питання про отримання швидкоспадаючих оцінок цього перетворення.

Постановка задачі

Розробка методики обчислення перетворення Фур'є достатньо гладких функцій, заданих своїми відліками у вузлах рівномірних сіток, з використанням квазіфундаментальних експоненціальних функцій.

Основна частина

Нехай функція $f(t)$ (у загальному випадку комплексно-значна) є абсолютно інтегровною на всій чисельній вісі, тобто існує інтеграл вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty . \qquad (5)$$

Клас абсолютно интегровних на всій чисельній вісі функцій позначають через L_1.

Кожній функції $f(t) \in L_1$ можна поставити у відповідність функцію $g(\omega)$, що визначається таким чином

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt . \qquad (6)$$

Функцію $g(\omega)$ називають перетворенням Фур'є функції $f(t)$.

Якщо функція $f(t)$ задовольняє одній з умов:

а) функція $f(t)$ є абсолютно неперервною функцією, а її похідна $f(t)$ интегровна з квадратом;

б) функція $f(t)$ є неперервною функцією обмеженої вариации;

то функцію $f(t)$ можна подати у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \qquad (7)$$

Співвідношення (7), що пов'язує функцію $f(t)$ з перетворенням Фур'є функції $g(\omega)$ називають формулою обернення для перетворення Фур'є.

Незважаючи на зовнішню схожість співвідношень (6) і (7), ці формули є по суті відмінними [2]. Рівність (6) є визначенням функції $g(\omega)$, а інтеграл в (6) існує у звичайному розумінні, оскільки функція $f(t) \in L_1$. Рівність

(7) є твердженням про те, що інтеграл, який стоїть справа, дорівнює вихідній функції *f(t)* , а сам інтеграл розуміють в сенсі головного значення. Якщо функція *f(t)* задовольняє умовам а) чи б), то ця рівність є вірною. Зауважимо, що відомі й інші види умов вірності цієї рівності.

Часто доводиться обчислювати перетворення Фур'є досить складних функцій, заданих на скінченому відрізку [0,1]. В [3] показано, що в цьому випадку значення перетворення співпадають з коефіцієнтами ряду Фур'є заданої функції, продовженої з періодом 1 на всю чисельну вісь. У випадку ж, коли функцію замінюють послідовністю її значень $F_N = \{f(x_j) = f_j\}_{j=1}^N$ у вузлах деякої рівномірної сітки $\Delta_N = \{x_j\}_{j=1}^N$,

$$x_j = \frac{2\pi}{N}(j-1),\ N = 2n+1,$$

($n = 1,2,\ldots,$) то значення перетворення Фур'є являють собою значення коефіцієнтів інтерполяційного тригонометричного многочлена ряду Фур'є, які, в свою чергу, співпадають із значеннями коефіцієнтів ряду Фур'є, обчисленими составним методом трапецій.

В багатьох випадках продовження функції періодичним чином на всю чисельну вісь є неприйнятним. В таких випадках можна запропонувати інший підхід до обчислення значень пертворення Фур'є, який розглянемо детальніше.

В [4] було введено фундаментальні на рівномірній сітці Δ_N системи функцій $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^N$, які визначалися таким чином:

$$\varphi_j(x_k) = \begin{cases} 0\ , & j \neq k; \\ 1\ , & j = k. \end{cases} \qquad (8)$$

Фундаментальними системами функцій на сітках Δ_N є, наприклад, системи інтерполяційних многочленів Лагранжа, системи інтерполяційних тригонометричних многочленів тощо.

В багатьох випадках точне дотримання умов (8) є недоцільним; інколи варто вимагати виконання умов

$$\varphi_j(x_k) = \begin{cases} \alpha\ , & j \neq k;\quad (\ \ll 1) \\ 1\ , & j = k. \end{cases} \qquad (9)$$

Системи функцій, які на сітці Δ_N задовольняють умовам (9), будемо називати квазіфундаментальними. При цьому значення параметра α вибирають виходячи з тих чи інших міркувань, які визначаються розв'язуваною задачею.

В ролі системи квазіфундаментальних функцій на сітці Δ_N можна розглядати таку систему функцій:

$$\varphi_j(x) = \exp\left[\ln\alpha\left(\frac{x - x_j}{h}\right)^2\right]. \qquad (10)$$

Далі, враховуючи інтерполяційні властивості функцій цієї системи, досліджувану функцію $f(x)$ можна подати у вигляді

$$f(x) \approx \Phi_N(x) = \sum_{j=1}^N f_j\,\varphi_j(x). \qquad (11)$$

Оскільки величина $|\varphi_j(x_{j+k})|$ дорівнює α при $k = 1$ і дуже швидко спадає із зростанням величини k, похибка подання функції у вузлових точках визначається таким чином

$$\|f(x_k) - \Phi_N(x_k)\|_C \le K\alpha\, h\|f'\|_C \quad (k = 1,2,\ldots,N), \qquad (12)$$

де K – деяка константа, значення якої є близьким до 1.

Оскільки функції системи (10) задані на всій числовій осі і належать класу L_1, зрозуміло, що і функція $\Phi_N(x)$ також належить класу L_1. Обчислимо перетворення Фур'є цієї функції. Враховуючи лінійність перетворення Фур'є, маємо

$$F(\Phi_N) = F\left(\sum_{j=1}^N f_j\,\varphi_j(x)\right) = \sum_{j=1}^N f_j\,F(\varphi_j(x))\,. \qquad (13)$$

Обчислюючи пертворення Фур'є функції $\varphi_j(x)$, з урахуванням [3] маємо:

$$F\left(\varphi_j(x)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\ln\alpha}{h^2}\left(x-x_j\right)^2} e^{-i\omega x}\,dx=\left|t=x-x_j\right|=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\ln\alpha}{h^2}t^2} e^{-i\omega\left(t+x_j\right)}dt \quad e^{-i\omega x_j}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\ln\alpha}{h^2}t^2} e^{-i\omega t}\,dt=$$

$$=e^{-i\omega x_j} e^{\frac{h^2}{4\ln\alpha}\omega^2}\sqrt{\frac{\pi h^2}{\ln\alpha}}\,. \qquad (14)$$

Враховуючи формули Ейлера, (14) можна подати у вигляді

$$F(\varphi_j(x))=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi h^2}{\ln\alpha}}e^{\frac{h^2}{4\ln\alpha}\omega^2}\left(\cos\omega x_j-i\sin\omega x_j\right).$$

Отже, перетворення Фур'є функції $\Phi_N(x)$ знаходиться за формулою

$$F\left(\Phi_N(x)\right)=$$

$$=h\sqrt{\frac{\pi}{\ln\alpha}}\,e^{\frac{h^2}{4\ln\alpha}\omega^2}\sum_{j=1}^{N} f_j\left(\cos\omega x_j-i\sin\omega x_j\right). \qquad (15)$$

Запишемо (15) у вигляді

$$F\left(\Phi_N(x)\right)=h\sqrt{\frac{\pi}{\ln\alpha}}\,e^{\frac{h^2}{4\ln\alpha}\omega^2}\times$$
$$\times\frac{N}{2}\left(\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j\cos\omega x_j-i\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j\sin\omega x_j\right). \qquad (16)$$

Враховуючи [3], що перетворення Фур'є на скінченному інтервалі повністю визначається своїми значеннями на гармонійних частотах $\omega_k=2\pi k$, та вводячи позначення

$$a_k^* \quad \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j\cos 2\pi k x_j$$
$$b_k^*=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j\sin 2\pi k x_j\,, \qquad (17)$$

остаточно отримуємо

$$F\left(\Phi_n(x)\right)=\pi\sqrt{\frac{\pi}{\ln\alpha}}\,e^{\frac{h^2\pi^2k^2}{T^2\ln\alpha}}\left(a_k^*-ib_k^*\right). \qquad (18)$$

Зауважимо, що для обчислення величин a_k^*, b_k^* по формулах (17) існують вельми ефективні алгоритми швидкого перетворення Фур'є (ШПФ).

Висновки

Розглянуто один з класів квазіфундаментальних інтерполяційних функцій, який являє собою експоненціальні функції. Показано, що застосування функцій цього класу для інтерполяції дискретних рівновіддалених відліків, заданих на скінченному проміжку, дає можливість отримати функцію класу $L_1(-\infty,\infty)$, перетворення Фур'є якої обчислюється точно, тобто відсутні методичні похибки обчислення цього перетворення.

Отримано ефективний алгоритм обчислення дискретного перетворення Фур'є, при реалізації якого є можливим застосування відомих алгоритмів швидких перетворень Фур'є. Характерною особливістю запропонованого алгоритму є експоненціальний порядок спадання його значень.

Високий порядок спадання, в свою чергу, призводить до значного послаблення шкідливого впливу відомого ефекту накладання частот, який спостерігається при проведенні дискретизації неперервних функцій.

Безумовно, вимагає подальшого вивчення властивості перетворення Фур'є, отриманого запропонованим способом. ,

Список літератури

1. *Хэмминг Р.* Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 400 с.

2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматгиз, 1968. – 496 с.

3. *Снеддон М.* Преобразования Фурье. – М.: Наука, 1955. – 668 с.

4. *Денисюк В.П., Марченко Б.Г.* Моделювання вимірювальних сигналів класами фундаментальних функцій // Актуальні проблеми автоматизації: Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ. "Навч. кн.", 2000. – Т.3. –   . 31–38.