УДК 519.218.82(045)

Ігнатов В.О., д.т.н.,
Андреєв О.В.,
Андреєв В.І., к.т.н.

МЕТОД ДВОПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМАЛЬНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИГНАЛІВ НА ТЛІ ЗАВАД

**Факультет комп'ютерних систем
Національного авіаційного університету**

Запропоновано новий метод екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на тлі завад, який використовує два попередні дискретні значення сигналу, та по їх значенням виконує оптимальну екстраполяцію для третього моменту часу в майбутньому

Вступ

Вирішення задач екстраполяції випадкових процесів займають важливе місце як в теорії випадкових процесів, так і в практичному використанню цієї теорії в рішеннях практичних задач надійності, діагностиці, контролю якості, обробці сигналів на тлі завад та інших задач в різних галузях науки та техніки. На сьогоднішній день найбільш повно вивчені задачі екстраполяції випадкових стаціонарних процесів без завад, також існують практичні результати екстраполяції цих процесів на тлі стаціонарних завад.

Недостатньо вивченими залишаються задачі екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів (ВНС) на тлі стаціонарних та нестаціонарних завад. В той же час саме ці задачі найбільш актуальні в різноманітних галузях науки та техніки, таких як контроль працездатності комп'ютерних мереж, обробка звукових сигналів на тлі завад, та багатьох інших.

Окремі результати по вирішенню цих задач поки що не отримали практичного використання через свою складність. В статті [1] був запропонований метод вирішення таких задач – метод однопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад, який має зручну для практичного використання форму. Недоліком методу є те, що при обчисленні параметру оптимальної екстраполяції αopt він може бути негативним $\alpha opt < 0$. У цьому випадку вимоги нормування $\alpha 1 + \alpha 2 > 1$ порушуються, а це може привести до спотворення результатів екстраполяції. Тому мета цієї статті – розробити метод оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завад, який би був зручний для використання, та позбавлений недоліків однопараметричного методу оптимальної екстраполяції.

В статті подається змістовна трактовка задачі двопараметричної оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завад, вводяться необхідні позначення і виводиться математична постановка задачі, розглядаються особливості вибору моделі для екстрапольованого значення, а також критерії оптимізації. В ролі критерію використовується дисперсія похибки екстраполяції. Задача вирішується в простішій постановці: є два дискретні спостереження, по їх значенням необхідно передбачити третє. Приводиться рішення оптимальної задачі екстраполяції класичним методом – прирівнюванню перших похідних від дисперсії похибки екстраполяції по параметрам екстраполяції до нуля та позитивно визначеної квадратичної форми матриці других часткових похідних.

Постановка задачі

Розглянемо класичну постановку задачі двопараметричної оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завади, яка має наступний вигляд. Введемо такі основні позначення:

$X(t)$ – випадковий нестаціонарний сигнал, значення якого прогнозуються; $\xi(t)$ – випадкова завада, що спотворює дані спостережень; *Y(t)* – випадковий сигнал, реалізація якого спостерігається; t_i, $i=\overline{1,n}$ – i-й момент спостереження; $Y(t_i)=Y_i$ – i-е значення *Y(t)* в момент часу спостереження ti; $Y(t_{n+1})$ – значення *Y(t),* що прогнозується (екстраполюється); $T=t_n-t_1$ – інтервал спостереження; $\tau=t_{n+1}-t_n$ – інтервал екстраполяції (прогнозу); $M[Y(t)]=m(t)$ – математичне сподівання *Y(t);* $D[Y(t)]=M[Y(t)]-m(t)]^2$ – дисперсія Y(t); $k(t_i,t_j)=M\{[Y(t_i)-m(t_i)][Y(t_j)-m(t_j)]\}$ – кореляційна функція *Y(t);* $k_\xi(t_i,t_j)=$ $=M\{[\xi(t_i)-m_\xi][\xi(t_j)-m_\xi]\}$ – кореляційна функція завади ξ(t); M[ξ(t)]=mξ(t) – математичне сподівання завади ξ(t).

На рис. 1 показані всі основні характеристики і параметри екстраполяції ВНС.

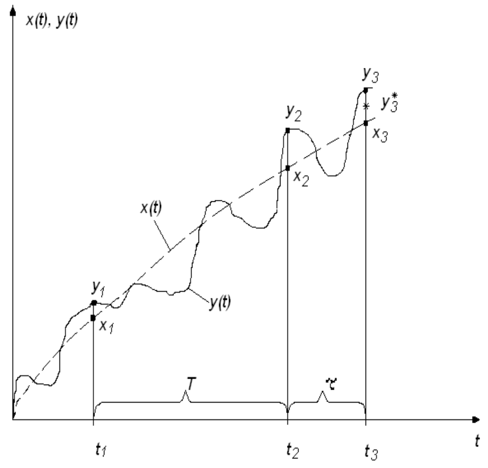

Рис. 1. Ілюстрація умов екстраполяції

Неважко помітити різницю X_{n+1} від Y_{n+1}, та вплив завади ξ(*t*) на характеристики Y_{n+1}. Для спрощення на рис. 1 показано два спостереження $(n=2)$, в результаті спостереження отримують значення *Y1, Y2* замість істинних значень *X1, X2,* по яким необхідно визначити *X3*, але насправді оптимально спрогнозувати значення *Y3.*

Задача екстраполяції полягає в тому, щоб у найкращий метод по значенням *Y1, Y2*, що екстраполюються, отримати оцінку Y_3^* майбутнього значення *Y3*. З постановки задачі зрозуміло, що найкраща екстраполяція включає не тільки прогнозування *Y3*, а й зменшення похибки спостережень

$$\varepsilon=Y_3^*-X_3.$$

Для коректної постановки задачі введено такі припущення:

Сигнал, що спостерігається, розглядається як «адитивна суміш» сигналу *Y(t)* і завади ξ(*t*) [2]

$$Y(t)=X(t)+\xi(t). \qquad (1)$$

Оцінку Y_3^* істинного значення *X3* в момент часу *t3* розглядаємо як лінійну комбінацію (функцію) попередніх значень, що спостерігають

$$Y_3^*=\alpha_1 Y_1+\alpha_2 Y_2. \qquad (2)$$

Припускаємо, що завада $\xi(t)$ являє собою випадковий стаціонарний гаусівський сигнал з характеристиками

$$M[\xi(t)]=m_\xi=0,$$
$$M[\xi(t_1),\xi(t_2)]=k_\xi(\Delta t), \qquad (3)$$

де $k_\xi(\Delta t)$ – кореляційна функція завади, що визначається за формулою

$$k_\xi(\Delta t)=\sigma_\xi^2 r_\xi(\Delta t), \qquad (4)$$

де дисперсія (потужність) завади $\sigma_\xi^2=D[\xi(t)],\ r_\xi(\Delta t)$ – нормована кореляційна функція завади, інтервал часу $\Delta t=t_2-t_1$.

Припускаємо, що математична модель X(t) має вигляд:

$$X(t)=\sum_{i=0}^{q}\alpha_i t^{\gamma_i}, \qquad (5)$$

де q=1, детерміновані параметри задання нелінійності і нестаціонарності сигналу γ_0, γ_1 задовольняють умовам: $0\le\gamma_0\le 1$, $0\le\gamma_1\le 2$, а коефіцієнти a0, a1 являють собою випадкові незалежні величини, що мають гаусовські розподіли з такими, відповідно, математичними сподіваннями і дисперсіями:

$$M(a_0)=m_0;\ D(a_0)=\sigma_0^2;$$
$$M(a_1)=m_1;\ D(a_1)=\sigma_1^2. \qquad (6)$$

Для визначеності припускаємо, що $\gamma_0=0$, а $\gamma_1=\gamma$, тоді числові характеристики ВНС приймають такий конкретний вигляд:

$$M[X(t)]=m_0+m_1t^{\gamma}=m(t), \qquad (7)$$
$$D[X(t)]=\sigma_0^2+\sigma_1^2t^{2\gamma}=\sigma^2(t), \qquad (8)$$
$$k_X(t_i,t_j)=M\{[X(t_i)-m(t_i)]$$
$$[X(t_j)-m(t_j)]\}=\sigma_0^2+\sigma_1^2(t_i,t_j)^{\gamma}, \qquad (9)$$

де через t_i, t_j позначені *i*-й та *j*-й моменти спостережень.

Враховуємо те, що ВНС та завада є незалежними сигналами, тоді

$$M\{[X(t_i)-m(t_i)][\xi(t_j)-m_{\xi}]\}=0. \qquad (10)$$

Якщо характеристики ВНС (7–9) та завади (4) відомі, припущення (1–5) виконуються, коректно ставимо задачу оптимізації оцінки (2) значення *X(t)* в наступний момент часу t_{n+1} шляхом оптимального вибору параметрів оптимізації α1 , α2 по відповідному критерію оптимізації.

Таким чином, для оптимізації оцінки Y_3^* необхідно вибрати критерій оптимізації та використати α1 та α2 як керовані змінні оптимізації.

Найбільш розповсюдженим і відповідаючим змісту цієї задачі є метод максимальної правдоподібності [3], який при обраних вхідних даних приводить до використання середньоквадратичного критерію методу найменших квадратів у .вигляді квадрату відстані між *Y3* та Y_3^* в евклідовому просторі:

$$D(\varepsilon)=M[(Y_3-Y_3^*)^2]. \qquad (11)$$

Для розв’язання задачі оптимізації враховуються наступні співвідношення для характеристик випадкових сигналів, що спостерігаються:

$$M[Y_i]=m_0+m_1t_i^{\gamma}; \qquad (12)$$
$$D[Y(t_i)]=\sigma_{Y_i}^2=\sigma_0^2+\sigma_i^2t_i^{2\gamma}+\sigma_{\xi}^2; \qquad (13)$$
$$M[Y_i\cdot Y_j]=r_{ij}=m_im_j+k_Y(t_i,t_j); \qquad (14)$$
$$M[Y_i^2]=m_i^2+\sigma_Y^2; \qquad (15)$$
$$\sigma_{Y_i}^2=\sigma_0^2+\sigma_1^2t_i^{2\gamma}+\sigma_{\xi}^2; \qquad (16)$$
$$k_y(t_i,t_j)=\sigma_0^2+\sigma_1^2(t_it_j)^{\gamma}+$$
$$+\sigma_{\xi}^2r_{\xi}(t_i-t_j), \qquad (17)$$
$$r_{\xi}(t_i-t_j)=e^{-\frac{t_j-t_i}{\Delta t_{\xi}}}, \qquad (18)$$

де Δtξ - інтервал кореляції завади.

З урахуванням (18) співвідношення (17) для кореляційної функції суміші НВС та завади має такий вигляд:

$$k_y(t_i,t_j)=\sigma_0^2+\sigma_1^2(t_it_j)^{\gamma}+$$
$$+\sigma_{\xi}^2e^{-\frac{t_j-t_i}{\Delta t_{\xi}}}. \qquad (19)$$

Для розв’язання задачі оптимізації використовуємо класичний метод знаходження мінімуму функції двох змінних. Беремо похідну від *D*ε по α1, α2 та прирівнюємо її до нуля (це є необхідною вимогою екстремуму функції [3]),

$$\frac{\partial D_{\varepsilon}}{\partial\alpha_1}=0;\quad \frac{\partial D_{\varepsilon}}{\partial\alpha_2}=0;$$

враховуємо те, що другі похідні більше нуля, вирішуємо систему рівнянь другого порядку відносно α1 та α2 отримуємо α1opt та α2 opt.

Підставляємо у вираз (11) замість Y3* його значення (2). Тоді отримуємо :

$$D_{\varepsilon}(\alpha_1,\alpha_2)=$$
$$=M[(Y_3-\alpha_1Y_1-\alpha_2Y_2)^2]. \qquad (20)$$

Беремо похідні від Dε(α1 , α2) по α1 та α2 , і прирівнюємо їх нулю :

$$\frac{\partial D_{\varepsilon}(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_1}=$$
$$=M\{2(Y_3-\alpha_1Y_1-\alpha_2Y_2)(-Y_1)\}=0; \qquad (21)$$
$$\frac{\partial D_{\varepsilon}(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_2}=M\{2(Y_3-\alpha_1Y_1-$$
$$-\alpha_2Y_2)(-Y_2)\}=0. \qquad (22)$$

Використовуючи властивості математичного сподівання для виразів (21),

(22) та перемножуючи складові у фігурних дужках, отримаємо :

$$M[\alpha_1 Y_1^2 + \alpha_2 Y_1 Y_2 - Y_1 Y_3] = 0; \quad (23)$$

$$M[\alpha_1 Y_1 Y_2 + \alpha_2 Y_2^2 - Y_2 Y_3] = 0. \quad (24)$$

$$\begin{cases} M[\alpha_1 Y_1^2 + \alpha_2 Y_1 Y_2] = M[Y_1 Y_3] \\ M[\alpha_1 Y_1 Y_2 + \alpha_2 Y_2^2] = M[Y_2 Y_3] . \end{cases} \quad (25)$$

У системі рівнянь (25) замінюючи математичні сподівання *M[Y12], M[Y1Y2], M[Y1Y3], M[Y22], M[Y2Y3*] їх значеннями, отримаємо :

Систему рівнянь (26) записуємо у матричній формі :

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} = b_1 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} = b_2 \end{cases} , \quad (27)$$

де

$$a_{11} = m_{Y_1}^2 + D_{Y_1} \ ;$$

$$a_{12} = m_{Y_1} m_{Y_2} + k(t_1, t_2) \ ;$$

$$b_1 = m_{Y_1} m_{Y_3} + k(t_1, t_3) \ ;$$

$$a_{21} = m_{Y_1} m_{Y_2} + k(t_1, t_2) \ ;$$

$$a_{22} = m_{Y_2}^2 + D_{Y_2} \ ;$$

$$b_2 = m_{Y_2} m_{Y_3} + k(t_2, t_3) \ .$$

Розв'язуючи систему рівнянь (27) відносно α1 і α2 по правилу Крамера, отримаємо :

$$\alpha_{1opt} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{12}} = \frac{b_1\, a_{22} - b_2\, a_{12}}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}} \ ; \quad (28)$$

$$\alpha_{2opt} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{12}} = \frac{a_{11}\, b_2 - b_1\, a_{21}}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}} \ . \quad (29)$$

Беремо другі похідні від ∂2 *D*ε(α1, α2), отримуємо матрицю з других похідних

$$A_{12}(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_1^2} = M[Y_1^2] & \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = M[Y_1 Y_2] \\ \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} = M[Y_2 Y_1] & \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_2^2} = M[Y_2^2] \end{vmatrix} . \quad (30)$$

де $D = D(\alpha_1, \alpha_2)$ - для скорочення довжини запису.

Тому при оптимальному значенні параметрів α1opt, α2opt дисперсія похибки екстраполяції мінімальна та приймає таке значення :

$$D_\varepsilon(\alpha_{1opt}, \alpha_{2opt})_{\min} = m_{Y_3}^2 + \sigma_{Y_3}^2 + \\ + \alpha_{1opt}^2 (m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) + \alpha_{2opt}^2 (m_{Y_2}^2 + \\ + \sigma_{Y_2}^2) - 2\alpha_{1opt}[m_{Y_1} m_{Y_3} + k(t_1, t_3)] - \\ - 2\alpha_{2opt}[m_{Y_2} m_{Y_3} + k(t_2, t_3)] + \\ + 2\alpha_{1opt}\alpha_{2opt} + [m_{Y_1} m_{Y_2} + k(t_1, t_2)] \ . \quad (31)$$

Дисперсію оцінки *Y3** отримуємо за наступною формулою:

$$D[Y_3^*] = D[\alpha_{1opt} Y_1 + \alpha_{2opt} Y_2] = \\ = D[\alpha_{1opt} Y_1] + D[\alpha_{2opt} Y_2] + \\ + 2D[(\alpha_{1opt} Y_1)(\alpha_{2opt} Y_2)] = \\ = \alpha_{1opt}^2 \sigma_{Y_1}^2 + \alpha_{2opt}^2 \sigma_{Y_2}^2 + \\ + 2\alpha_{1opt}\alpha_{2opt} k_Y(t_1, t_2) \quad (32)$$

Ефективність двопараметричного оптимального способу екстраполяції оцінюють за формулами непрямих вимірювань.

Відношення сигнал/шум на виході оптимального екстраполятора:

$$h_1 = \frac{D[Y_3]}{D_\varepsilon(\alpha_{1opt,} \alpha_{2opt})_{\min}} , \quad (33)$$

де $D[Y_3]$ – дисперсія випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t3, $D_\varepsilon(\alpha_{1opt,} \alpha_{2opt})_{\min}$ – мінімальна дисперсія похибки екстраполяції.

Відношення дисперсії випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t3, до дисперсії екстрапольованого значення сигналу $D[Y_3^*]$

$$h_2 = \frac{D[Y_3]}{D[Y_3^*]}. \quad (34)$$

Відношення різниці між дисперсією випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t3, та дисперсією екстрапольованого сигналу $D[Y_3^*]$ до мінімальної дисперсії похибки екстраполяції:

$$h_3 = \frac{D[Y_3] - D[Y_3^*]}{D_\varepsilon(\alpha_{1opt,}\alpha_{2opt})_{\min}}. \quad (35)$$

Приклад. В цьому прикладі наведені результати експерименту, що був проведений методом цифрового статистичного імітаційного моделювання. Виконуємо оптимальну екстраполяцію значення Y_3^* по двом попереднім значенням *Y1, Y2*. Результати вимірювання *X1, X2, X3, Y1, Y2, Y3* моделюємо реалізаціями випадкових величин за допомогою функції (36) системи *MathCAD* [4]

$$Y_i = rnorm\{n, M[Y], \sigma\},$$
$$i = 1{,}3 \quad (36)$$

де число n реалізацій для кожної точки вибрано $n = 1,\ M[Y_i]$ – математичне очікування ВНС, σ – середньоквадратичне відхилення спостерігаємого ВНС, яке обчислюються за формулою (16) [5].

Моделювання роботи способу було проведено в системі *MathCAD*. Вона дозволяє використовувати різні вхідні дані експериментів і виконувати статистичні експерименти.

В експерименті були обрані наступні початкові дані :

$$t_1 = 6 \text{ с},\ t_2 = 10 \text{ с},\ t_3 = 12 \text{ с},$$

де *t1, t2* – моменти часу, в які спостерігаються реалізації *Y1, Y2* випадкового нестаціонарного сигналу (ВНС), *t3* – момент часу, для якого виконується екстраполяція; γ = 0,7 – коефіцієнт нелінійності, $\Delta\tau_\xi = 4$ с – інтервал кореляції завади; $\sigma_\xi = 0{,}01$ В, $m_0 = 1$ В, $m_1 = 0{,}02$ В/с, $\sigma_0 = 0{,}3$ В, $\sigma_1 = 0{,}002$ В.

Реалізації *Yi* утворюють за допомогою функції генерації випадкових чисел (36) з гаусовським розподілом при заданих *n, M[Yi],* σ. В експерименті задана точність моделювання "шість знаків після коми".

В табл. 1 показано результати експерименту. На рис. 2 відображений графік $D_\varepsilon(\alpha_{1opt,}\alpha_{2opt})_{\min}$ для різних значень α_1 та α_2, а на рис. 3 відображені графіки X*(t), Y(t)* та *Yopt(t),* де *Yopt*(t) відображає Y_3^* на графіку.

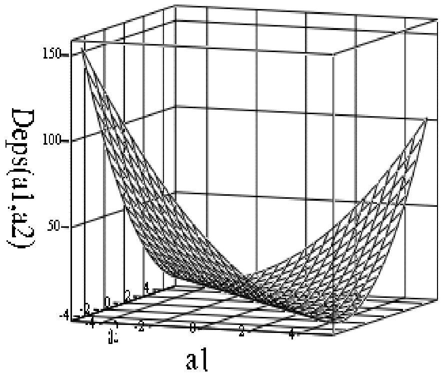

Рис. 2. Залежність $D_\varepsilon(\alpha_{1opt,}\alpha_{2opt})_{\min}$ для різних значень α_1 та α_2

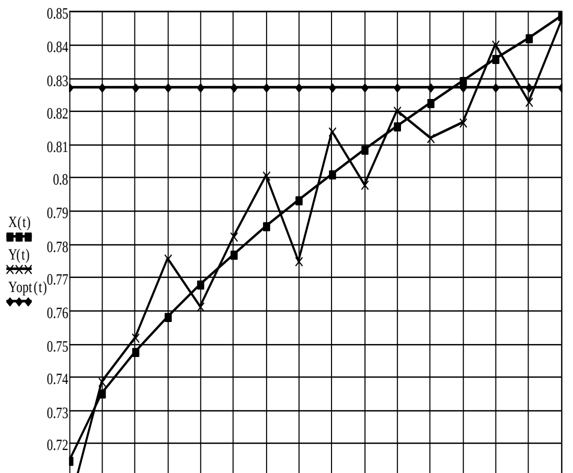

Рис. 3. Графік результатів експерименту

Таблиця 1. Результати експерименту

X1	X2	X3
0,784968	0,815233	0,828938
Y1	Y2	Y3
0,800433	0,819824	0,816517
Y3*	α1opt	α2opt

продовження табл. 1

0,829211	-0,03785	1,048406
ξ1	ξ2	ξ3
0,015465	0,004591	-0,01242
D[Y3]	D[Y3*]	h1
0,09023	0,092122	962,125565
Dε(α1opt, α2opt)min		
0,0000094		

Висновки

Аналіз результатів експерименту показує працездатність і високу ефективність способу навіть при низькому відношенню середньоквадратичних значень сигнал / шум.

За результатами експерименту можна зробити такі висновки:

Запропонований метод двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад позбавлений основного недоліку однопараметричного методу оптимальної екстраполяції, який полягає в тому, що коли при обчисленні параметру оптимальної екстраполяції αopt цей параметр може бути негативним $\alpha opt < 0$. Це приводить до того, що вимоги нормування α1 + α2 > 1 порушуються, а це може привести до спотворення результатів екстраполяції.

Показник ефективності оптимальної екстраполяції $h1$ показує, що оптимальна екстраполяція забезпечує достатньо високу точність – дисперсія похибки (шумів) екстраполяції в 962 разів менше дисперсії самого ВНС.

В результаті оптимальної екстраполяції значення оцінки істинного значення Y_3^* для моменту часу $t3$=12 с знаходиться ближче до реального значення випадкового нестаціонарного сигналу в цей момент часу – $X3$, ніж до того значення, що спостерігається – $Y3$ (рис. 3).

Графік рис. 2 показує, що мінімальна дисперсія похибки екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_{1opt},\alpha_{2opt})_{\min}$ має мінімум при значенні α_{1opt} та α_{2opt}.

Наведені результати експерименту наглядно ілюструють новизну, корисність та високу ефективність способу оптимальної екстраполяції, що пропонується в статті. Крім того, запропонований метод має зручну для практичного використання форму.

Список літератури

1. Метод оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / В.О. Ігнатов, О.В. Андрєєв, В.І. Андрєєв. – К.:НАУ, Проблеми інформатизації та управління. Збірник наукових праць. Випуск 2(30), 2010. – С. 79–83.

2. *Игнатов В.А.* Теория информации и передачи сигналов. Учебник для вузов. 2-ое изд. Перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1990. – 280 с.

3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М Наука, 1968. – 720 с.

4. *Дьяконов В.П.* Энциклопедия MathCAD 2001 и MathCAD 11. – М.: Изд. Солон-пресс, 2004. – 832 с.

5. Справочник по теории вероятности и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Петренко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 640 с.

Подано до редакції 24.12.2010