УДК 517.958:532/533, 681.51.015

[1]**Бичков О.С.,** к.ф.-м.н.,
[1]**Заворотний А.Л.,** к.ф.-м.н.,
[1]**Касьянюк В.С.,** к.ф.-м.н.,
[1]**Грідчін І.Ю.,**
[2]**Гладков О.В.**

ЗАДАЧА СПОСТЕРЕЖУВАНОСТІ В ЛІНІЙНИХ АЕРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ. ЗАСТОСУВАННЯ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОГО ПІДХОДУ

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
[2]Державний комітет України з питань науки, інновацій та інформатизації

Розроблено новий метод розв'язування задачі спостережуваності в лінійних аеродинамічних системах. Для отримання невідомих характеристик стану об'єкту використовується принцип парето-оптимальної оптимізації. При цьому враховується наявність збурень в похідних цих характеристик. Розроблено програмне забезпечення, що реалізує розроблений метод. За допомогою даного програмного забезпечення проведено порівняння результатів роботи розробленого та класичного методів відновлення невідомих характеристик стану об'єкту як на експериментальних, так і на реальних даних з датчиків літака

Вступ

При автоматичному керуванні мається на увазі, що спостереження супроводжується вимірюванням координат, параметрів та в поняття «спостереження», «вимірювання» вкладається практично однаковий зміст. Поняття ж сопостережуваність та вимірюваність [1] мають різний зміст в теорії керування. Так, під вимірюваністю розуміють можливість безпосереднього отримання числового значення тієї чи іншої фізичної величини. Нажаль в задачах керування, зокрема в задачах керування літальними апаратами, безпосереднє отримання значення фізичної величини не завжди є можливим. Натомість отримувана інформація містить потрібні величини в спотвореному вигляді. Так якщо G – деякий прилад, що надає інформацію про стан об'єкту - вектор u, то інформація на виході приладу має вигляд

$$y = Gu + \nu, \qquad (1)$$

де y – вектор - отримувана інформація, ν - вектор зашумлення виходу приладу.

Таким чином, отримувана інформація виявляється спотвореною по-перше, самою природою приладу, що перетворює необхідні дані та, по-друге, деяким шумом. Частіше за все оператор G є лінійним, часто матричним або перетворенням з одногу гільбертового простору в інший.

Проблема, отже, полягає в тому, щоб з вимірювання y отримати якомога більш точні значення параметрів об'єкту при чому не ті, які він має, будучи спотворений в системі вимірювання, а інші, властиві системі «об'єкт-середовище», не спотвореній вимірюванням. Загальні теоретичні викладки стосовно проблеми спостережуваності можуть бути знайдені, наприклад, в джерелі [1].

У більш загальній постановці задачі ставиться задача оцінки вимірювання певного ідеального, гіпотетичного приладу Π за вимірюваннями приладу G. Або, іншими словами, необхідно визначити перетворення B, яке, при застосуванні до результатів вимірювання G, дасть наближення вимірювання приладом Π:

$$By \approx \Pi u$$

В основу методу, використаного для розв'язання даної задачі покладений метод редукції до виходу з заданого приладу Ю.П. Питьєва [2]. Згідно цього методу, рівняння (1) перетворюється до вигляду:

$$By = \Pi u + (BG - \Pi)u + B\nu$$

За оцінку $\hat{\Pi u}$ приймається By, де B є розв'язком задачі опуклого програмування:

$$\begin{cases}\varphi(B)\xrightarrow{\quad}\min\limits_{B}\\ h(B)\le\varepsilon,\varepsilon>0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}h(B)\xrightarrow{\quad}\min\limits_{B}\\ \varphi(B)\le\varepsilon,\varepsilon>0\end{cases}.$$

де $h(B)=M\|Bv\|^2$ - рівень шумового фону (дисперсія) оцінки $\hat{\Pi u}=By$, а $\varphi(B)=\|BG-\Pi\|$, операторна нев'язка, що характеризує її зсув.

З описаного перетворення природно випливає задача одночасної мінімізації як рівня шумового фону, так і величини операторної нев'язки шуканої оцінка, тобто двокритеріальна задача оптимізації:

$$\begin{cases}\varphi(B)\xrightarrow{\quad}\min\limits_{B}\\ h(B)\xrightarrow{\quad}\min\limits_{B}\end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язками задачі (2) є множина ефективних векторів $\tilde{B}$ таких, що за умови

$$\varphi(\hat{B})\le\varphi(\tilde{B})$$
$$h(\hat{B})\le h(\tilde{B}),$$

випливає, що $\varphi(\hat{B})=\varphi(\tilde{B})$, $h(\hat{B})\le h(\tilde{B})$.

Для вибору параметру Парето можна скористатися принципами багатокритеріальної оптимізації [3]:

<u>Принцип рівномірної оптимальності</u>

За значення параметру береться

$$\alpha=\arg\min_{\alpha}(\varphi(\alpha)+h(\alpha))$$

В цьому випадку α =1.

<u>Принцип справедливого компромісу</u>

Згідно цьому принципу, α обирається як

$$\alpha=\arg\min_{\alpha}(\varphi(\alpha)h(\alpha))$$

<u>Принцип гарантованого результату</u>

Параметр Парето обирається з умови

$$\alpha=\arg\min_{\alpha}\max_{(h,Y)}(\varphi(\alpha),h(\alpha))$$

Задача спостережуваності грає надзвичайно важливу роль в задачах керування в аеродинаміці, тому велике значення має точне визначення параметрів польоту за даними вимірювальних приладів.

Під час тестування літального апарату застосовується велика кількість датчиків, які дозволяють вимірювати важливі параметри безпосередньо. Але після проведення випробувань велика кількість датчиків прибирається та безпосереднє вимірювання стає недоступним, і доводиться розв'язувати задачу спостережуваності.

В даній статті розглядається лінійна модель літального апарату з лінійним керуванням:

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ u=Cx \qquad (3)$$

Або, позначивши $\overline{A}=A+BC$ будемо далі розглядати систему

$$\dot{x}=\overline{A}x \qquad (4)$$

Вважатимемо, що частина параметрів вектору x може бути виміряна безпосередньо. Нехай довжина вектора x дорівнює n, а кількість відомих компонент – m. Не зменшуючи загальності, вважатимемо також, що відомі параметри знаходяться в початку вектора x.

Позначимо $x^m=(x_1,...,x_m)$ - відома частина вектора x, а $x^{m-n}=(x_{m-n+1},...,x_n)$ - його невідома частина.

Тепер, якщо оцінити частину $\dot{x}^m=(\dot{x}_1,...,\dot{x}_m)$ вектора $\dot{x}$ за допомогою відомих значень $x^m=(x_1,...,x_m)$, ми отримаємо задачу (1).

Зафіксуємо деякий момент часу $\tilde{t}\in[0;T]$ і припустимо, що в даний момент відомі перші m елементів вектора x $(x_i(\tilde{t}),\ i=\overline{1,m},\ 1\le m\le n-1)$, а також відомі перші m елементів вектора $\dot{x}$. Похибки в оцінці $\dot{x}$ промоделюємо, додавши в праву частину (3) випадковий вектор v:

$$\dot{x}_{\tilde{t}}=\overline{A}x_{\tilde{t}}+v,$$

де $\dot{x}_{\tilde{t}}$ та $x_{\tilde{t}}$ - вектори $\dot{x}$ та x в момент $\tilde{t}$, $v=(v_1,...,v_n)^*$ - вектор випадкових величин.

Розглянемо відому частину

$$\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}}=\tilde{A}x_{\tilde{t}}+\tilde{v},$$

де $\tilde{x}_{\tilde{t}} = (\dot{x}_1(\tilde{t}), ..., \dot{x}_m(\tilde{t}))^*$, $\tilde{v} = (v_1, ..., v_m)^*$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$.

Вважатимемо, що $M(v) = 0$, а коваріаційна матриця $\tilde{\Re}_v = \begin{pmatrix} Dv_1 & 0 \\ 0 & Dv_m \end{pmatrix}$ є невиродженою.

Позначимо $x_{\tilde{t}}^{n-m} = (x_{m+1}(\tilde{t}), ..., x_n(\tilde{t}))^T$, $\tilde{A}_{n-m} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1m+1} & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{mm+1} & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$, $y = \tilde{x}_{\tilde{t}} - \tilde{A}_m x_{\tilde{t}}^m$, де $\tilde{A}_m = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{mm} \end{pmatrix}$.

Тоді $y = \tilde{A}_{n-m} x_{\tilde{t}}^{n-m} + \tilde{v}$.

Континуум парето-оптимальних оцінок описується формулою

$$\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m} = \tilde{A}_{n-m}^T (\tilde{A}_{n-m} \tilde{A}_{n-m}^T + \alpha \tilde{\Re}_v)^{-1} y,$$

де α - параметр оптимізації, критерії вибору якого були описані раніше.

Задача чисельного диференціювання полягає в обчисленні похідної функції в деякій точці x^* за заданими значеннями функції в деяких інших точках.

При цьому можливі 2 випадки:

1). точка $x^* \in (x_i, x_{i-1}), i = \overline{1,n}$

2). точка $x^* = x_i$, $i = \overline{1,n}$

В першому випадку таблиця значень функції згладжується деякою функцією $\varphi(x)$, що є глобальним(локальним) інтерполяційним многочленом, отриманим за МНК з деякою похибкою $R_n(x)$, в результаті чого мають місце наступні рівності:

$$\begin{array}{ll} y(x) = \varphi(x) + R_n(x) & y(x^*) = \varphi(x^*) + R_n(x^*) \\ y'(x) = \varphi'(x) + R_n'(x) & y'(x^*) = \varphi'(x^*) + R_n'(x^*) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (5)$$

Необхідно зазначити, що задача чисельного диференціювання є некоректною в тому розумінні, що близькість шуканої функції $y(x)$ та зглажуючої функції $\varphi(x)$ не забезпечує близькості їх похідних.

Більше того, функції $\varphi(x)$ та $y(x)$ можуть мати похідні різних знаків в цих точках. Тим не менше, формули (5) широко вживаються на практиці.

В другому випадку частіше за все використовується апарат розкладу функції в ряд Тейлора, для чого функція в точці x^* повинна мати достатню кількість похідних. Необхідно зазначити, що в аеродинаміці ми зазвичай маємо справу з коливальними процесами, тобто тригонометричними функціями. А тому, оскільки ці функції є досить гладкими, застосування апарату розкладу функції в ряд Тейлора дає гарні результати. Також застосування рядів Тейлора є зручним в нашому випадку тим, що вимірювання відбуваються через сталі проміжки часу, які надалі ми позначатимемо h.

Отже, нехай внутрішній вузол $x^* = x_i$, $i = \overline{1,n}$ оточують вузли $x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i-2}, x_{i+2}, ...$. Причому вони розташовані на однаковій відстані h один від одного. Тоді, розкладаючи значення $y_{i-1}, y_{i+1}, y_{i-2}, y_{i+2}, ...$ (кількість точок залежить від необхідної точності методу, це буде детально описано нижче), у ряд Тейлора до похідної порядку k, отримаємо формули:

$$\begin{array}{l} y_{i-1} = y(x_i - h) = y_i - y'_i h + y''_i \frac{h^2}{2} - y'''_i \frac{h^3}{6} + \ldots + (-1)^{k-1} y^{(k-1)}{}_i \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^{k-1} y^{(k-1)}(\xi) \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}, \xi \in (x_i, x_{i-1}) \\ y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + y'_i h + y''_i \frac{h^2}{2} + y'''_i \frac{h^3}{6} + \ldots + y^{(k-1)}{}_i \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} + y^{(k-1)}(\xi) \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}, \xi \in (x_i, x_{i-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (6)$$

Для отримання залежності похідної (в нашому випадку першого порядку) необхідно елімінувати похідні старших порядків. Це призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

В даній статті був розглянутий метод апарату розкладу в ряд Тейлора: у вигляді, викладеному вище (центральні різниці) – далі називатимемо його методом центральних різниць Тейлора. Також був розглянутий метод, заснований на диференціюванні інтерполяційного многочлення.

Оскільки дані спостережень є зашумленими, в результаті отримання алгоритму отримується також зашумлений сигнал. Але нам відомо, що необхідно отримати гладку, тригонометричну функцію. Тому після роботи алгоритму до його виходу застосовується алгоритм знешумлення (denoising). В даній статті застосована усереднюючи фільтрація, яка полягає в наступному: значення знешумленої функції отримується як середнє значення навколишніх точок:

$$\hat{y}_i = \sum_{k=-l}^{l} y_{i+k}, i = \overline{k+1, n-k} \quad (7)$$

Як бачимо, параметром алгоритму є k – кількість сусідніх точок, за якими обраховується нове значення.

При великих похибках вхідних даних одного застосування алгоритму знешумлення може бути не достатньо. Тому передбачена можливість декількох послідовних застосувань алгоритму.

Ефективність методу була перевірена на практиці та результати були порівняні з класичним методом розв'язання задачі спостережуваності.

Порівняння відбувалося як на експериментальних даних, отриманих аналітичним розв'язанням диференціального рівняння (4) так і на реальних даних, отриманих на датчиках літального апарату під час випробувального польоту. Метод добре зарекомендував себе як на експериментальних даних, так і на реальних, виявивши значну перевагу перед класичним методом.

Отже, для порівняння розглядається система:

$$\dot{x} = \overline{A}x,$$

де

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 1 & 0 & -0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Проміжок – [0; 10], кількість точок – 1000.

Серед параметрів генерування даних – параметри зашумлення. Зашумлення даних відбувається за нормальним розподілом з нульовим математичним сподіванням та дисперсією, заданою користувачем. Дані були порівняні на різних значеннях шуму.

На наступних рисунках зображені згенеровані дані (рис. 1, 2). На першому рисунку дисперсія шуму складає 0.0001. На другому – 0.05. Як побачимо, в той час як у випадку малої дисперсії результати роботи методів майже не відрізняються, при великих значеннях перевага парето-оптимального підходу очевидна.

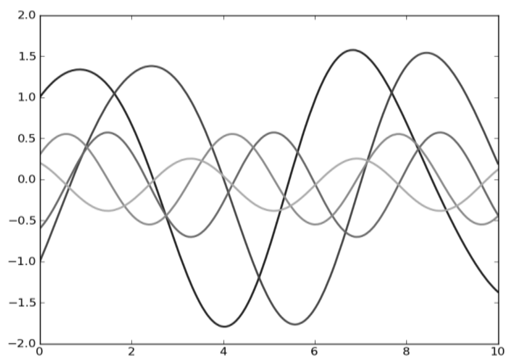

Рис. 1 Згенеровані експериментальні дані

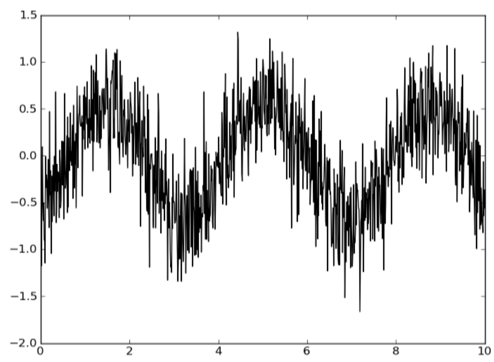

Рис. 2 Згенеровані експериментальні дані з великою дисперсією похибки

В розглянутому прикладі невідомими вважаються координати 2 та 3.

Для початку розглянемо результати при малих значеннях дисперсії (рис. 3, 4):

D = 0.0001:

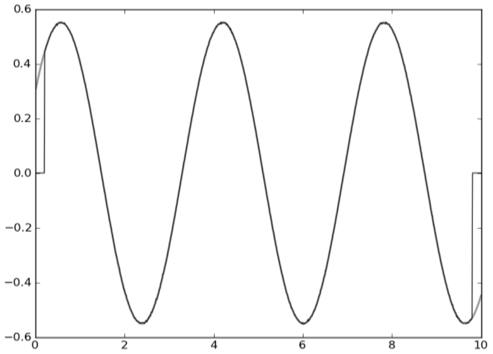

Рис. 3 Дані, відновлені за допомогою розробленого методу

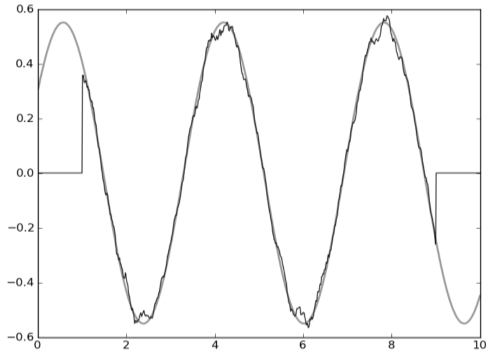

Рис. 4 Дані, відновлені за допомогою класичного методу

При збільшенні значення дисперсії похибки до значення D=0.05 класичний метод виявляється неспроможним відновити дані (рис.5,6):

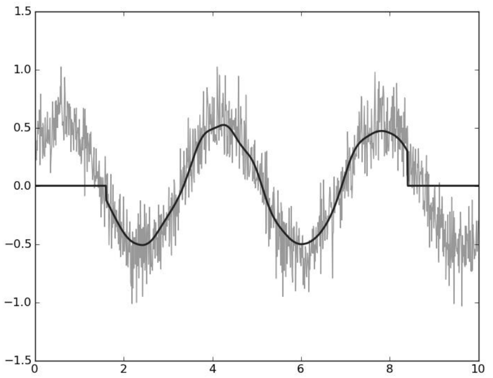

Рис. 5 Дані, відновлені за допомогою розробленого методу

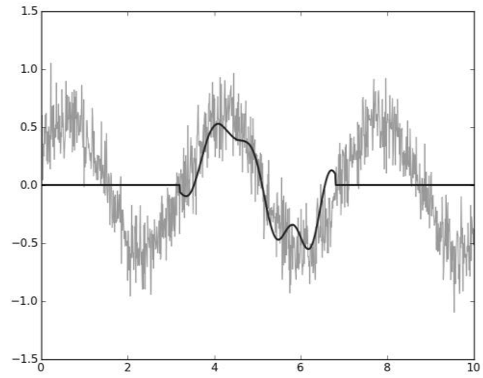

Рис. 6 Дані, відновлені за допомогою класичного методу

Розроблений метод добре справляється з даними, зашумленими ще більше. Далі показані відновлені дані при дисперсії 0.2 (рис. 7). Також метод був опротестований на реальних даних, отриманих з показань датчиків під час випробувального польоту (рис. 8). Знову ж таки, при малій дисперсії
D=0.0001 обидва методи добре відновлюють дані (рис. 9, 10).

Але при великій дисперсії (D=0.05) класичний метод не спроможний якісно відновити дані, в той час як розроблений метод справляється з задачею на тому проміжку, де шум не перевищує основний сигнал: В даній статті зроблене застосування парето-оптимального підходу до розв'язання задачі стостережуваності в аеродинамічних системах. Задача є дуже важливою в аеродинаміці, тому створення точних та надійних методів є необхідним. В якості підзадачі досліджені методи чисельного диференціювання для тригонометричних функцій. Розроблений метод був порівняний з одним із класичних методів.

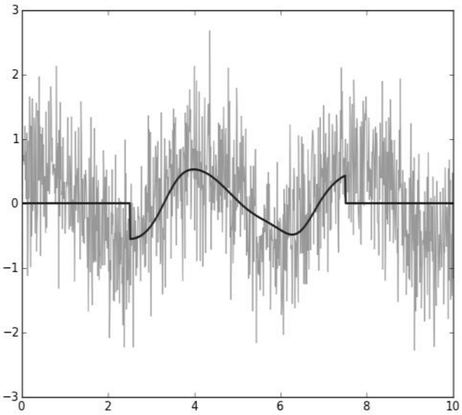

Рис. 7 Дані, відновлені за допомогою розробленого методу

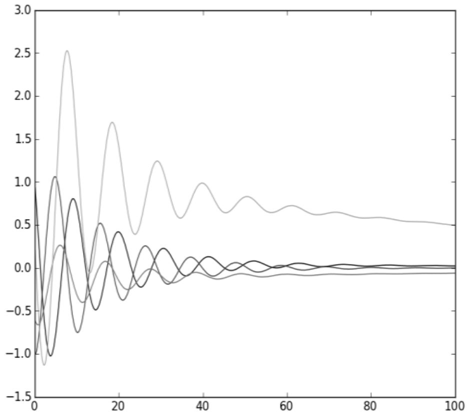

Рис. 8 Дані реального польоту

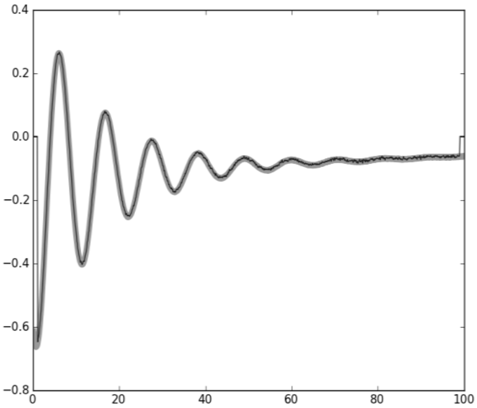

Рис. 9 Дані, відновлені за допомогою розробленого методу

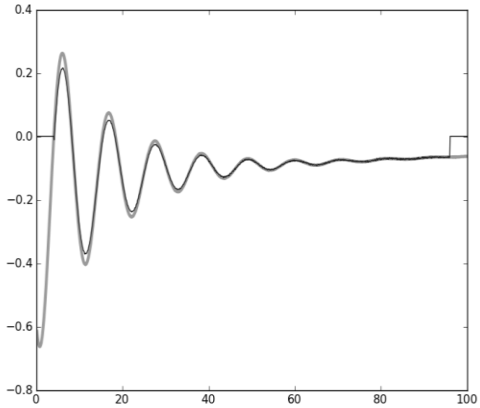

Рис. 10 Дані, відновлені за допомогою класичного методу

Висновки

Розв’язання задачі спостережуваності і показало очевидну перевагу. Оскільки метод був протестований на даних реального польоту, повністю можливим є його практичне застосування в системах керування.

Список літератури

1. Справочник по теории автоматического управления. – М., Наука, 1987. – 712 с.

2. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. – М.: Высшая школа, 1989. – 315 с.

3. *Белов Ю.А., Касьянюк В.С.* Парето-оптимальная редукция в линейных системах со случайными погрешностями. Сб. доклада на расширенном заседании семинара института прикладной математики им. И.Н. Векуа. Тбилиси, из Тбилисского ун-та, 1989. – т.4, №3. – С. 21–24.

Подано до редакції 20.12.2010