УДК 621.391(045)

Красноусова О.Ю., канд. техн. наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ СПЕКТРОВ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

Институт электроники и систем управления
Национального авиационного университета

Предложена методика определения спектральных плотностей $\dot{S}$ для некоторых степенных функций времени, являющихся неинтегрируемыми сигналами. Приведены примеры использования полученных выражений S для определения спектров других неинтегрируемых сигналов, а также интегрируемых сигналов (без вычисления интегралов Фурье)

Введение и постановка задачи

Степенные функции типа t^n не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости [1], поэтому относятся к так называемым неинтегрируемым сигналам [2]. Известно, что полиномиальная функция $u(t)$ – линейная комбинация таких степенных функций.

Функция включения полиномиальных колебаний $v(t) = u(t)h(t)$ является мультипликативной комбинацией $u(t)$ и функции Хевисайда $h(t)$.

Импульс $w(t)$, полиномиальной формы и конечной длительности τ, выражается в виде комбинации $w(t) = v(t) - u(t)h(t-\tau)$. В свою очередь функцию Хевисайда можно записать в виде $h(t)=\frac{1}{2}+y_0(t)$, где $y_0(t)=\frac{1}{2}Sgnt.$

Ранее показано [3], что импульс полиномиальной формы можно представить в виде алгебраической взвешенной суммы комбинаций $t^n \cdot y_0(t)$ и $(t-\tau)^n y_0(t-\tau).$

В свою очередь очевидным является представление степенной функции в виде комбинаций $t^n = t^n h(t) + t^n h(-t)$. Таким образом, частотные спектры импульсов полиномиальной формы можно определять исходя из выражений спектральной плотности $\dot{S}$ для неинтегрируемых сигналов типа $t^n h(t)$ или $t^n y_0(t)$, эти же выражения $\dot{S}$ для функций включения можно использовать и для определения спектров $\dot{S}$ самих степенных функций t^n . В литературе приводятся точные выражения $\dot{S}$ только для нескольких простейших неинтегрируемых сигналов. Например в [2] описан способ определения и приведены выражения для сигналов $u(t) = 1$; $e^{\pm j\omega_0 t}$; $\cos\omega_0 t$; $\sin\omega_0 t$ и $v = h(t)$. Выражение $\dot{S}[y_0]$ легко получается с учетом $y_0 = h(t)-\frac{1}{2}$. Ранее неоднократно предпринимались попытки вычисления интеграла Фурье путем замены неинтегрируемых сигналов – функций включения типа $v = u(t)h(t)$ затухающими функциями $\tilde{v} = ve^{-\alpha t}$. После вычисления интеграла Фурье и получения спектра $\dot{S}[\tilde{v}]$ коэффициент α устремлялся к нулю.

Нами показано [4], что выражения спектров $\dot{S}$, полученные таким способом, являются неточными и приводят к абсурдным результатам при переходе от функций v к функциям $u(t)$.

Предложены способы определения спектров и получены точные выражения $\dot{S}$ для функций включения колебаний гармонического типа, а также для мультипликативных комбинаций типа , $t^n u_i$, $t^n u_i h(t)$, где u_i – любая гармоническая функция [4]. В указанных способах исключались операции вычисления интеграла Фурье.

Представляет практический інтерес обосновать способ определения спектров и определить выражения $\dot{S}$ для самих степенных функций типа $u = t^n;\ |t|^n$, для функций включения $v = t^n h(t)$ и для функций типа $t^n \cdot y_0(t)$, $|t|^n y_0(t)$. Эти задачи решаются в работе.

Используемая методика

Степенные функции типа $u = t^n;\ u = |t|^n$ нами представляется в виде линейных комбинаций функций включения сигналов

$$t^n = t^n h(t) + t^n h(-t), |t|^n = t^n h(t) + (-t) h(-t),$$

а также в виде интегралов, разных порядков, по отношениям к функциям $u(t) = 1$, $u(t) = y_0(t)$, $u(t) = \delta(t)$, $v(t) = h(t)$.

Вводится понятие и используется выражение центральной первообразной функции (ЦПФ). Например, ЦПФ первого порядка по отношению к производной $u^{(1)}(t)$ есть интеграл $u(t) = \int u^{(1)}(t)dt + C$, когда C=0. Спектр такой ЦПФ находим из соотношения $\dot{S}[u] = (j\omega)^{-1}\dot{S}[u^{(1)}]$. Далее ЦПФ порядка n обозначаются в виде $(1)^{(-n)}$, $y_0^{(-n)}(t)$, $\delta^{(-n)}(t)$, $h^{(-n)}(t)$.

Определяются и используются реккурентные формулы ЦПФ для этих функций, а также выражения их спектров $\dot{S}$. Нетрудно видеть, что ЦПФ первого порядка по отношению к $\delta(t)$ есть функция $y_0(t) = \delta^{(-1)}(t)$. Тогда $\delta^{(-n)}(t) = y_0^{(-n+1)}$.

Более детально используемая методика поясняется ниже, в том числе, при рассмотрении примеров определения спектров $\dot{S}$.

ЦПФ исходных функций и их спектры

Приведем выражения ЦПФ, любого порядка n, для исходных функций:

$$u(t) = \delta(t);\quad y_0(t);\quad 1;\quad v(t) = h(t).$$

Используя последовательное многократное интегрирование и полагая каждый разра венство C=0 для аддитивной добавки в формуле интеграла, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\delta^{(-n-1)} = y_0^{(-n)} = t^n y_0 \frac{1}{n!},\quad n \ge 0,\\ &(1)^{(-n)} = t^n \frac{1}{n!},\\ &h^{(-n)} = t^n h \frac{1}{n!}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что эти ЦПФ представляют собой степенные функции и мультипликативные комбинации типа $t^n y_0$.

Степенные функции типа $u(t) = |t|^n$ при нечетных числах n можно получить, используя (1) и очевидные равенства

$$h(t) + h(-t) = 1,\quad h(-t) = y_0(-t) + \frac{1}{2}.$$

Например:

$$|t| = th(t) + [-th(-t)] = ty_0(t) + [-ty_0(-t)],$$

$$|t|^3 = t^3 h(t) + [-t^3 h(-t)] = t^3 y_0(t) + [-t^3 y_0(-t)].$$

Спектры ЦПФ, типа (1), с учетом известных выражений $\dot{S}$ для исходных функций имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{S}[\delta^{(-n-1)}] = \dot{S}[y_0^{(-n)}] = (j\omega)^{-n-1}\\ &\dot{S}[(1)^{(-n)}] = 2\pi\delta(\omega)(j\omega)^{-n},\\ &\dot{S}[(h)^{(-n)}] = (j\omega)^{-n-1} + \pi(j\omega)^{-n}\delta(\omega) \end{aligned}\right\}. (2)$$

Как показано нами в [4], спектр любой функции включения v = $u(t)h(t)$, где $u(t)$ – неинтегрируемый сигнал, равен сумме:

$$\dot{S}[v] = LS[v] + DS[v], \qquad (3)$$

где LS – операторная составляющая, получаемая из операторного изображения $L[v]$ при замене оператора p на jw; $DS[v]$ – это δ – составляющая, равная взвешенной суме δ – функций или (и) взвешенной сумме производных δ – функций.

Нетрудно показать, что симметричные степенные функции $u(t)$, заданные на бесконечном интервале $t \in (-\infty,\infty)$ и проходящие через нуль, можно разбить на два.

типа (по типу их спектров): *LS* – тип и *DS* – тип

Например, функцию $u(t) = t^1$ можно представить в виде:

$$u(t) = th(t) + th(-t) = th(t) - [-th(-t)]. \quad (4)$$

Используя (1), имеем $th(t) = h^{(-1)}(t)$.

$$\dot{S}[th(t)] = (j\omega)^{-2} + \pi(j\omega)^{-1}\delta(\omega).$$

Для функции - $th(-t)$ в приведенном выше выражении $\dot{S}$ надо взять знак минус при ω , тогда

$$\dot{S}[-t \cdot h(-t)] = (j\omega)^{-2} + \pi(-j\omega)^{-1}\delta(-\omega).$$

С учетом $\delta(-\omega) = \delta d(\omega)$, записанных выше выражений спектров и выражения (4), получим

$$\dot{S}[u(t)] = 2\pi(j\omega)^{-1}\delta(\omega), \quad (5)$$

т.е. имеет место спектр типа *DS*.

(Для этой же функции $u = t$ выражение (5) можно также получить, используя выражения ЦПФ $(1)^{(-1)}$ и ее спектр (2)).

Рассмотрим функцию $u(t) = |t|$. Представим ее в виде $u(t) = th(t) + [-th(-t)]$.

Используя приведенные выше выражения спектров $\dot{S}$ для составляющих $u(t)$, получим спектр *LS* типа:

$$\dot{S}[u(t)] = 2(j\omega)^{-2}. \quad (6)$$

Заметим, что в этом случае при суммировании спектров $\dot{S}$ $[-t \cdot h(t)]$ и $\dot{S}$ $[-t \cdot h(-t)]$, т.е. спектров $\dot{S}$ $[h^{(-1)}(t)]$ и $\dot{S}$ $[h^{(-1)}(-t)]$ компенсируются составляющие *DS* и арифметически суммируются сотавляющие *LS*. В результате этого спектр $\dot{S}$ $[u(t)]$ оказывается равным удвоенному значению составляющей $LS[t \cdot h(t)]$. (В свою очередь, для сигнала $u(t) = 1 \cdot e$ будут взаимно компенсироваться составляющие $LS[t \cdot h(t)]$ $LS[t \cdot h(-t)]$ и арифметически складываться составляющие *DS* типа). Естественно, что могут существовать и функции $u(t)$ *LS* и *DS* типов, когда $u(t)$ - сумма функций *LS* и *DS* типа.

Графики нескольких функций типов *LS* и *DS* представлены на рис. 1.

Рассмотрим функции типа $u(t) = a_2t^2$, $y(t) = a_2t^2h(t) - a_2t^2h(-t)$, первая из которых является четной, вторая нечетной.

Используем выражения ЦПФ, (1). Из (1) получим $u\ (t) = 2a_2(1)^{(-2)}$. Этой функции соответствует кривая $u^{(-2)}$ (рис. 1 б, с учетом масштабного коэффициента $2a_2$).

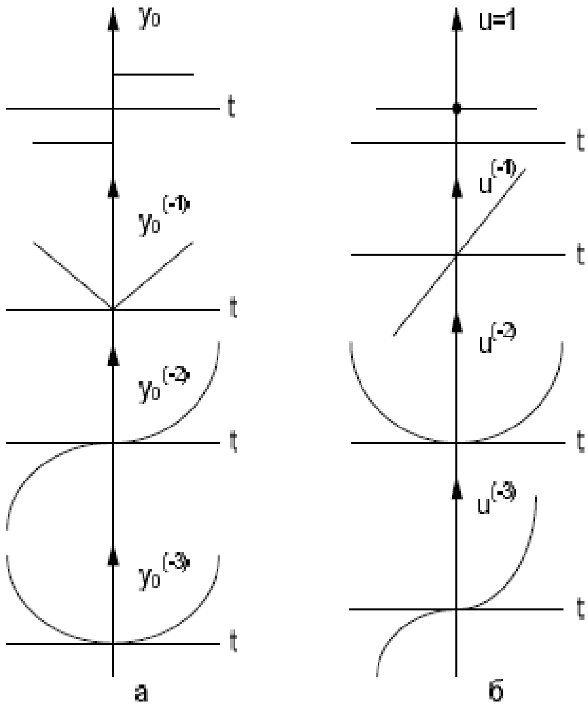

Рис. 1. Функции типа *LS* (а) и *DS* (б)

Используем выражения спектров ЦПФ, (2). Из (2) с учетом выражения $u(t)$ через ЦПФ $u^{(-2)} = 1^{(-2)}$ следует:

$$\dot{S}[u^1] = 4a_2\pi\delta(\omega)(j\omega)^{-2}.$$

Для функции $y(t)$ учитываем, что

$$h(t) - h(-t) = y_0(t) - y_0(-t).$$

Спектр составляющей $a_2t^2y_0(t)$, находим с учетом первого выражения из (1) и первого выражения из (2): $a_2t^2y_0(t) = y_0^{(-2)}2a_2$, (график $y_0^{(-2)}$ дан на рис. 1 а), $\dot{S}[2a_2y_0^{(-2)}] = 2a_2(j\omega)^{-3}$. Спектр составляющей $a_2t^2y_0(-t)$, получаем из спектра первой составляющей, изменив в ней знак при ω, т.к.

$t^2 y_0(-t) = (-t)^2 y_0(-t)$ (Изменение знака t в функции времени соответствует изменению знака ω в выражении $\dot{S}$).

Вычитая второй спектр из первого, получим: $\dot{S}[y] = 4a_2(j\omega)^{-3}$.

Для функции включения $v(t) = u(t)h(t)$ используем третьи по счету выражения из (1) и (2), получая $v = 2a_2 h^{(-2)}$, $\dot{S} = 2a_2[(j\omega)^{-3} + (j\omega)^{-2}\pi\delta(\omega)$. Подобным образом, без напрасных попыток вычисления интеграла Фурье, можно легко получить выражения спектров для неинтегрируемых сигналов типа $u = a_n t^n$, $v = a_n t^n h(t)$, $y = a_n t^n[h(t) - h(-t)]$.

Использование полученных выражений спектров степенных функций времени

Рассмотрим примеры определения спектров для неинтегрируемого сигнала, рис. 2а, и интегрируемого сигнала, рис. 2б.

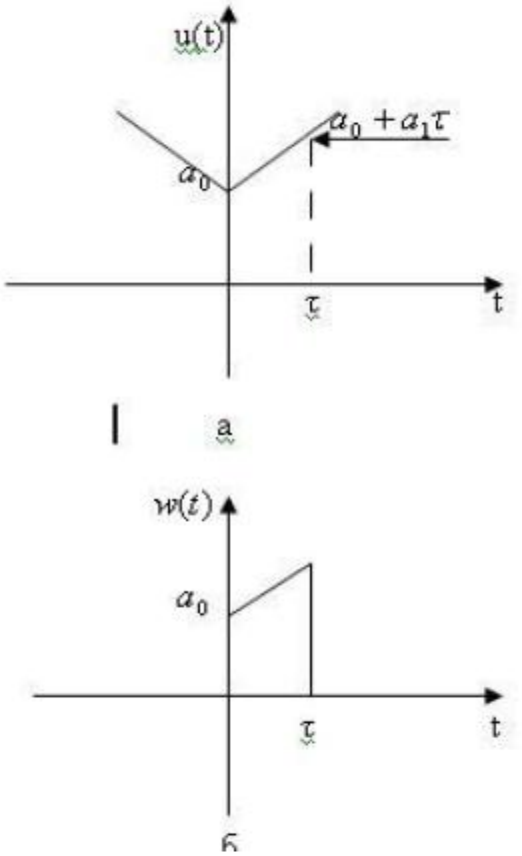

Рис.2. Неинтегрируемый (а) и интегрируемый (б) сигналы

Исходя из рис. 2а, записываем формулу сигнала $u(t) = a_0 + a_1|t|$. Это выражение соответствует сумме двух полиномиальных функций, степень полинома n =1. Зная спектр для u_0(t) = и для $y(t) = |t|$, записываем сразу спектр

$$\dot{S}[u] = 2\pi\delta(\omega)a_0 + a_1 2(j\omega)^{-2}.$$

(Это пример сигнала *LS* и *DS* типа). Исходя из рис. 2б, записываем формулу сигнала:

$$w(t) = (a_0 + a_1 t)[h(t) - h(t-\tau)]. \qquad (7)$$

Поскольку $h(t) = y_0(t) + \frac{1}{2}$ и $h(t-\tau) = y_0(t-\tau) + \frac{1}{2}$, то (7) можно преобразовать к виду:

$$w = a_0[y_0(t) - y_0(t-\tau)] + a_1 t y_0(t) - \\ - a_1[(t-\tau)y_0(t-\tau) + \tau y_0(t-\tau)]. \qquad (8)$$

Заметим, что интегрируемый сигнал w представлен в (7) и в (8) в виде алгебраической взвешенной суммы неинтегрируемых элементарных сигналов типа $h(t)$ или типа y_0(t), а также их ЦПФ. Спектры таких неинтегрируемых сигналов уже известны, см. (2). Поэтому, используя (2), из (7) или из (8) можно сразу записать выражение

$\dot{S}[w]$.

Например из (8) следует:

$$\dot{S}[w] = -a_0(j\omega)^{-1}(1 - e^{-j\omega\tau}) - \\ - a_1(j\omega)^{-1} \cdot \tau e^{-j\omega\tau} + \qquad (9) \\ + a_1(j\omega)^{-2}[1 - e^{-j\omega\tau}].$$

В свою очередь, из формулы (7) следует:

$$\dot{S}[w] = a_0[(j\omega)^{-1} + \pi\delta(\omega)](1 - e^{-j\omega\tau}) + \\ + a_1(j\omega)^{-1}[(j\omega)^{-1} + \pi\delta(\omega)](1 - e^{-j\omega\tau}) - \quad (10) \\ - a_1\tau[(j\omega)^{-1} + \pi\delta(\omega)]e^{-j\omega\tau}.$$

Выведем в (10) отдельно составляющую, не содержащую δ - импульсов. Она оказывается равна (9). Составляющая в (10), содержащая δ - импульсы, оказывается равной нулю, благодаря свойствам δ - импульсов [1]:

$$x \cdot \delta(x) = 0, \quad F(x)\delta(x) = F(0)\delta(x).$$

Для функции включения можно записать:

$$v(t)=u(t)\cdot h(t)=(a_0+a_1t)h(t)=$$
$$=(a_0+a_1t)y_0(t)+0{,}5a_0+0{,}5a_1t.$$

Откуда, с учетом (1), (2) легко получить спектр $\dot{S}$ [v]. Также нетрудно сразу записать формулу $\dot{S}$ [w], используя (2), (7) без напрасных попыток вычисления интегралов Фурье для не интегрированных сигнов.

Заметим, что при четных степенях n функций $1\cdot t^n$ можно рассматривать как мощность $\rho(t)$ сигнала $u(t)=1\cdot t^{n/2}$. При этом есть возможность простого определения спектра мощности по спектру сигнала $u(t)$.

Пусть, например, $u(t)=\tau^{-1}\cdot t$, $w(t)=u(t)\left[h(t)-h(t-\tau)\right]$ - импульс сигнала $u(t)$. Тогда импульс мощности составляет $w_\rho(t)=u^2(t)\left[h(t)-h(t-\tau)\right]$. Производная импульса w_ρ равна: $w_\rho^{(1)}=2w(t)-\delta(t-\tau)$. Учтем, что для степенных функций $u(t)$ всегда выполняется равенство [3] для спектров:

$$\dot{S}[w]=-j\omega^{-1}\dot{S}[w^{(1)}].$$

Тогда из выражения $w_\rho^{(1)}$ получим:

$$\dot{S}[w_\rho]=j\omega^{-1}[1-2\dot{S}[w]].$$

Итак, зная спектр импульса $w(t)$ для степенной функции $u(t)$, можно определить и спектр импульса $w_p(t)$ для квадрата функции $u^2(t)$. Для периодической последовательности импульсов $w(t)$, $w_p(t)$ комплексные амплитуды сигнала квадрата сигнала нетрудно определить по получаемым выражениям спектральных плотностей $\dot{S}$[w], $\dot{S}$ [w_p] известным способом [2].

Выводы

1. Предложена методика определения спектральных плотностей $\dot{S}$ степенных функций типа t^n, $|t|^n$, $t^n h(t)$, $t^n Sgnt$, $|t|^n Sgnt$, для которых невозможно вычислить интеграл Фурье.

2. Приведены примеры использования полученных выражений $\dot{S}$ степенных функций для определения спектров $\dot{S}$ неинтегрируемых сигналов, описываемых полиномами, а также для интегрируемых сигналов – импульсов полиномиальной формы при наличии разрывов первого рода.

3. Преимущество предложенной методики состоит в том, что спектральная плотность $\dot{S}$ определяется без вычисления интеграла Фурье для интегрируемых сигналов и без напрасных попыток вычисления интеграла Фурье для неинтегрируемых сигналов.

4. Правомерность используемой методики и достоверность получаемых выражений $\dot{S}$ подтверждается () косвенным способом) совпадением выражений $\dot{S}$[w], получаемых для имульсов $w(t)$ при использовании интегралов Фурье, а также полным соответствием получаемых выражений $\dot{S}$ [u], $\dot{S}$[v] с подобными выражениями, полученных в [4], при равенстве $\omega_0=0$ для функций $t^n\cdot e^{\pm j\omega_0 t}$, $t^n\cdot\cos\omega_0 t$ и их функций включения.

Список литературы

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1978. – 832 с.

2. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 1988. – 448 с.

3. *Єгоршин Ю.О., Красноусова О.Ю.* Використання властивостей δ-імпульсів при визначенні спектрів сигналів // Вісник НАУ. – К.: НАУ, 2007. – Вип. 2. – С. 6–9.

4. *Єгоршин Ю.О., Красноусова О.Ю.* Определение спектров неинтегрируемых сигналов мультипликативных комбинаций степенной и гармонических функций // Електроніка і системи управління. – К.: НАУ, 2007. – Вип. 4. – С. 55–60