УДК 519.233.2:621.391.83 (045)

Заліський М.Ю.,
Соломенцев О.В., д-р техн. наук

МЕТОД ПОСЛІДОВНОГО ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СТАТИСТИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ

Розглянуто один з алгоритмів послідовного оцінювання параметрів щільності розподілу ймовірностей, визначено основні характеристики розробленого алгоритму та отримані аналітичні співвідношення для їх розрахунку

Вступ

Останнім часом значна увага приділяється системам управління технологічними процесами, моніторингу параметрів робочого середовища, умов їх застосування, оцінки результативності та ефективності систем тощо.

Для наведених задач притаманною особливістю є випадковий характер вихідних даних. Тому для обробки отриманихь даних широко використовуються статистичні методи на основі математичної статистики, теорії ймовірностей, теорії перевірки статистичних гіпотез тощо.

Умовно методи статистичної обробки інформації можна поділити на класичні та послідовні методи аналізування даних.

Класичні алгоритми засновані на застосуванні наперед визначеному обсягу вибірки. Характерна особливість методів послідовного аналізу полягає в тому, що кількість спостережень, необхідних для процесу перевірки статистичних гіпотез та оцінювання, наперед невідома. Рішення про завершення експерименту залежить на кожній поточній стадії дослідження від результатів попередніх випробувань. Перевага даного методу полягає в тому, що він дозволяє побудувати таку методику обробки даних, яка має у середньому значно менший обсяг спостережень, ніж еквівалентна їй за надійністю процедура перевірки, що базується на попередньо визначеному обсязі спостережень (при однакових рівнях показників якості оцінювання та перевірки гіпотез тощо). Вважаємо, що послідовні методи статистичного аналізування даних базуються на підході, розробленому А. Вальдом [1].

Постановка задачі

Серед основних статистичних задач, які вирішується в системах управління технологічними процесами, є задачі перевірки гіпотез та оцінювання характеристик параметрів розподілів.

Аналіз літератури [1–6] показує, що вирішенню задач перевірки статистичних гіпотез за допомогою як класичних, так і послідовних методів приділена значна увага – розроблена певна методична база, що включає нормативні документи, показники та критерії для прийняття чи відхилення простих та складних гіпотез, методи синтезу та аналізу параметричних та непараметричних алгоритмів обробки статистичних даних тощо.

Задачі оцінювання в сучасній літератури зазвичай розглядаються з точки зору класичного підходу. Оскільки послідовні методи мають значний виграш з точки зору тривалості досліджень [1], то для мінімізації затрат часу та ресурсів актуальним постає питання розробки послідовних алгоритмів оцінювання.

Крім того, основні результати в галузі синтезу та аналізу процедур послідовного оцінювання носять здебільшого теоретичний характер, інженерних методів розрахунку бракує, що стримує їх широке використання та знижує рівень ефективності та результативності на практиці.

Тому виникає задача синтезу та аналізу інженерних методів послідовного оцінювання характеристик випадкових процесів, які могли б використовуватись у сучасних системах управління технологічними процесами.

Основна частина

Як відомо, статистичне оцінювання – це сукупність способів, що використовуються в математичній статистиці для наближеного визначення невідомих розподілів імовірностей (або яких-небудь їх характеристик) за результатами спостережень. У загальному випадку задача оцінювання формулюється таким чином: на основі статистичної інформації, що міститься у вибірці, зробити статистичне рішення про справжнє значення невідомого параметра [7, 8].

У випадку оцінювання щільності розподілу ймовірностей (ЩРІ) випадкової величини *X* вважають, що існує вектор параметрів, $\vec{A}$ за допомогою якого описується задана щільність. При цьому є певні алгоритми $\varphi_i(\vec{x}_i)$, який дозволяє отримати оцінки A^* $(\vec{x}_i$ – вибірка вихідних даних, отриманих внаслідок реалізації випадкової величини *X*). Класичні алгоритми можуть бути параметричними та непараметричними. Крім того, розрізняють алгоритми, синтезовані за методом найменших квадратів, максимуму функції правдоподібності, моментів, квантилів тощо.

Для порівняння отриманих алгоритмів оцінювання використовують сукупність характеристик (зміщенність, достатність та ефективність), які характеризують якість (оптимальність) оцінювання.

Доведено, що надефективні оцінки можна отримати при наявності розривів першого та другого родуЩРІ.

В інженерній практиці показниками якості оцінювання для класичних методів є математичне очікування та дисперсія оцінки, а для послідовних – крім вищезазначених, математичне очікування, дисперсія та за необхідністю щільність розподілу оцінки та тривалості спостережень.

Схему формування послідовних оцінок можна схематично представити за допомогою чотирьох блоків: блоку накопичення даних експерименту, блоку формування оцінок, блоку перевірки параметрів зупину та помножувача (рис. 1). У блоці накопичення даних експеримент послідовно (по одному відліку) формується вибірка випадкової величини *X* (до складу блоку може входити початкова навчальна вибірка). У блоці перевірки параметрів зупину виконується розрахунок певних характеристик випадкової величини *X* і порівняння їх з наперед заданими граничними значеннями. У випадку виконання умов зупину на виході блоку отримуємо сигнал типу логічної одиниці; у протилежній ситуації – типу логічного нуля. Блок формування оцінок здійснює розрахунок невідомих параметрів розподілу ймовірностей, будує графіки щільностей розподілу оцінки та тривалості спостереження. Дані з блоку формування оцінок можуть поступати на вихід через помножувач лише у випадку виконання умов зупину (тобто коли на інший вхід помножувача надходить сигнал типу логічної одиниці).

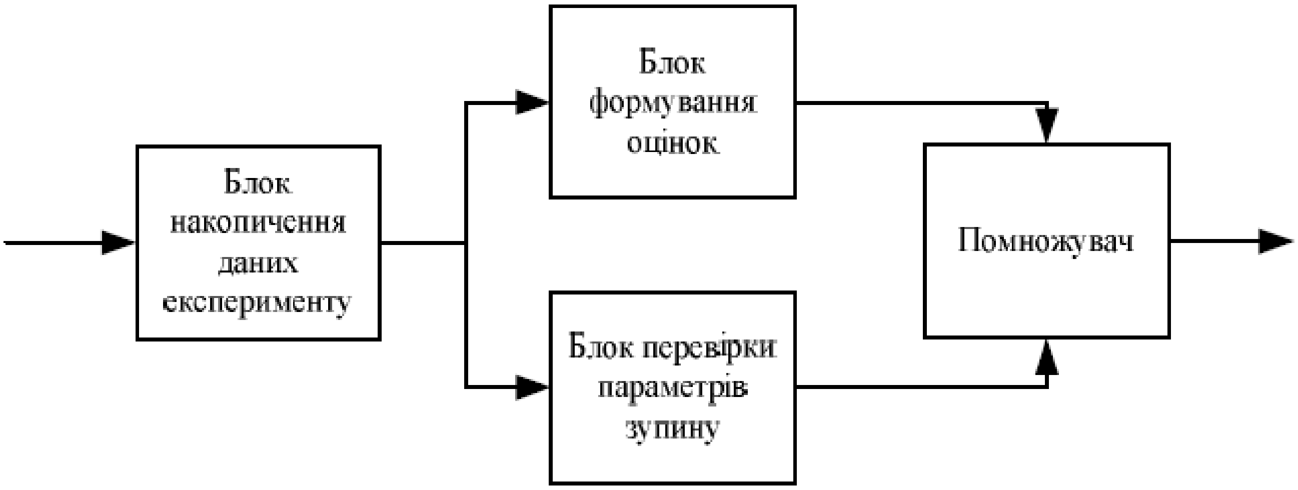


Рис. 1. Схема формування послідовних оцінок.

Розглянемо задачу оцінювання значення розмаху d рівномірно розподіленої випадкової величини на інтервалі [0;1]. На практиці такому розподілу можуть задовольняти показники стабільності та ефективності функціонування систем управління технологічними процесами, систем менеджменту якості виробництва продукції та надання послуг – коефіцієнт готовності, коефіцієнт оперативної готовності, коефіцієнт технічного використання тощо. При цьому будемо порівнювати основні параметри, отримані за допомогою класичної та послідовної схем оцінювання.

Як відомо, для побудови послідовного алгоритму оцінювання необхідно виробити певне правило зупину. В якості одного з таких правил можна використати наступне припущення: експеримент буде продовжуватися, якщо на i -му кроці значення розмаху d (який визначається як різниця максимального та мінімального значення вибірки) не буде перевищувати наперед заданого граничного значення розмаху $d_{гр}$ (або 1- Δ , де Δ – параметр зупину). Тобто при $d < d_{гр}$ процес буде перебувати в області продовження експерименту, а при гр $d \geq d$ – в області зупину (рис. 2).

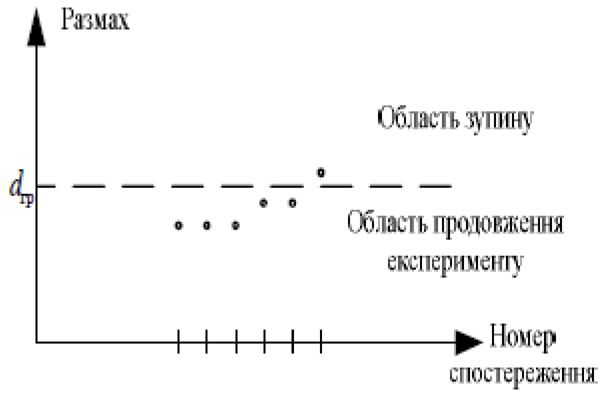


Рис. 2. Графічне пояснення запропонованого алгоритму

У даному випадку можна розрізнити дві групи параметрів: параметри оцінки d ($f(d)$ – щільність розподілу розмаху; m_1 (d) – математичне сподівання розмаху; m_2(d) – дисперсія розмаху) та параметри тривалості ($f(n)$ – щільність розподілу тривалості спостережень n ; m_1(n) – математичне сподівання тривалості спостережень; μ_2(n) – дисперсія тривалості спостережень).

Розглянемо основні характеристики оцінки d . Для оцінки щільності розподілу розмаху d у випадку моделювання за класичною схемою можна побудувати гістограму частот (рис. 3), яка є статистичним аналогом цієї щільності. Дана гістограма отримана для обсягу вибірки N =1000 .

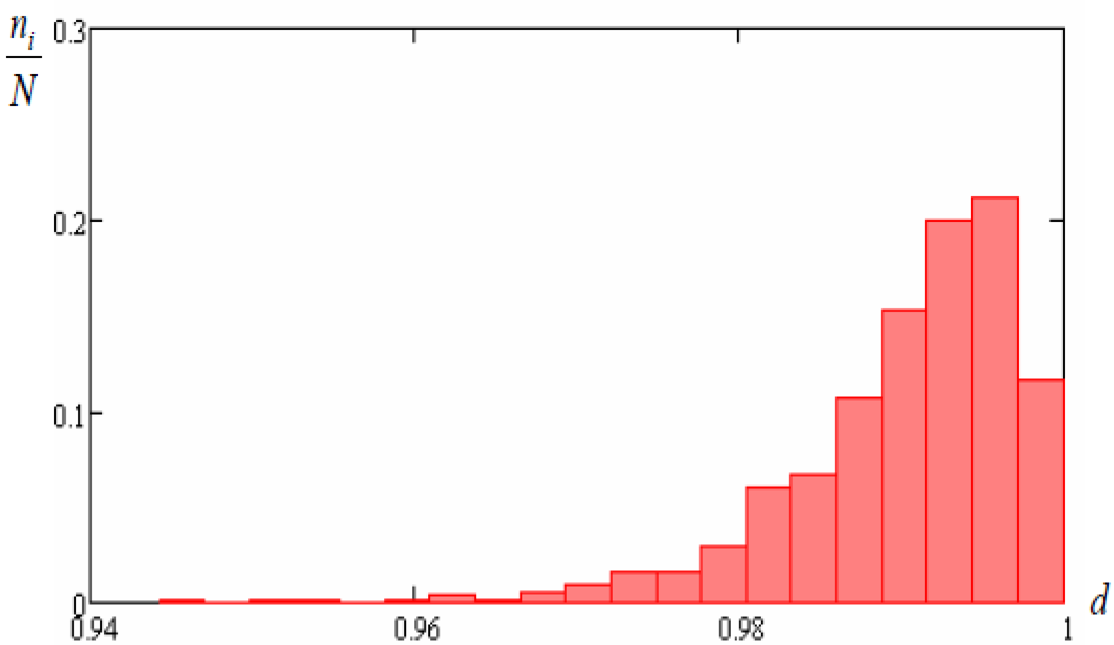


Рис. 3. Гістограма відносних частот розмаху для класичного алгоритму (n_i – відносна частота попадання в заданий інтервал)

Крім того, можна простежити, як при цьому змінюються характеристики даної щільності розподілу на прикладі її моментів (рис. 4).

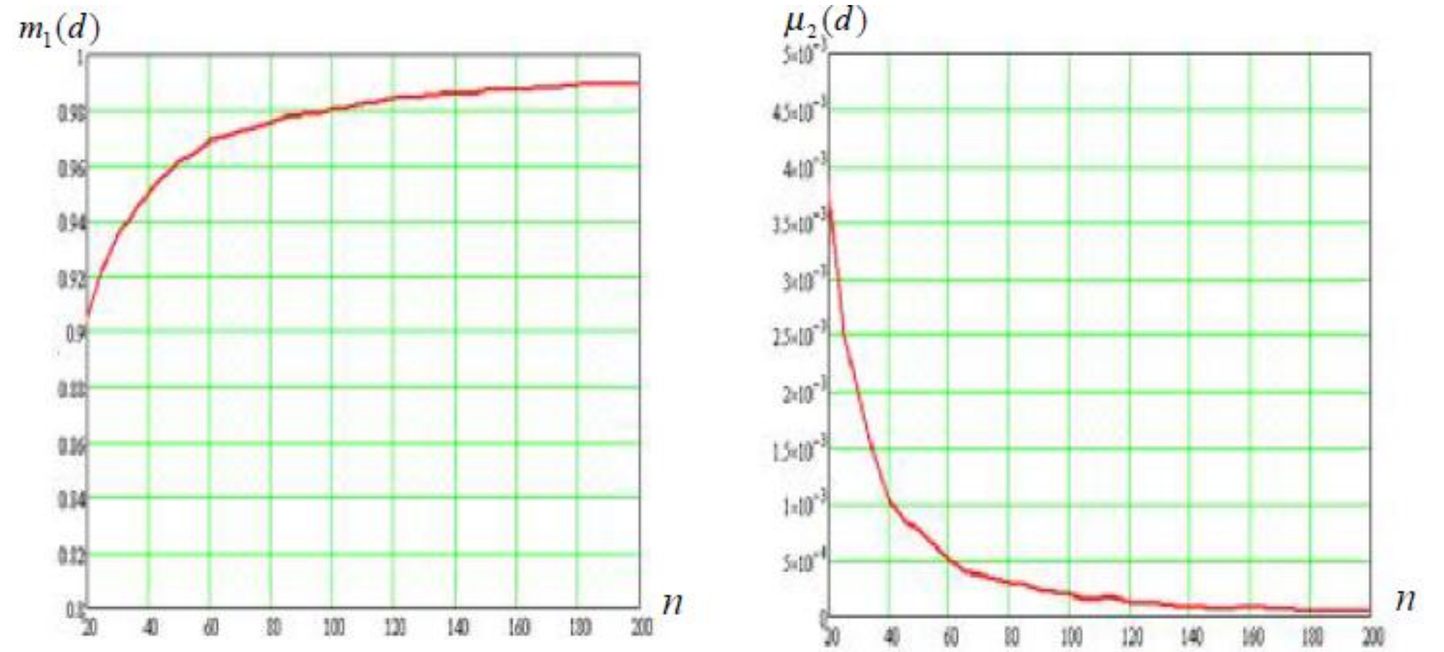


Рис. 4. Експериментальні графіки залежності математичного сподівання та дисперсії розмаху від тривалості спостережень (класичний алгоритм)

З графіків (рис. 4) видно, що при збільшенні об’єму вибірки математичне сподівання оцінки $m_1(d)$ прямує до одиниці (реальне значення оцінки), а дисперсія $\mu 2(d)$ – до нуля. Тобто дана оцінка є обґрунтованою.

У випадку моделювання послідовного алгоритму можна простежити, як змінюються математичне сподівання та дисперсія оцінки при прямуванні граничного значення розмаху $d_{гр}$ до одиниці (рис. 5). При цьому зі збільшенням параметру $d_{гр}$ міра розбіжності між ним та математичним сподіванням оцінки та дисперсія оцінки прямують до нуля.

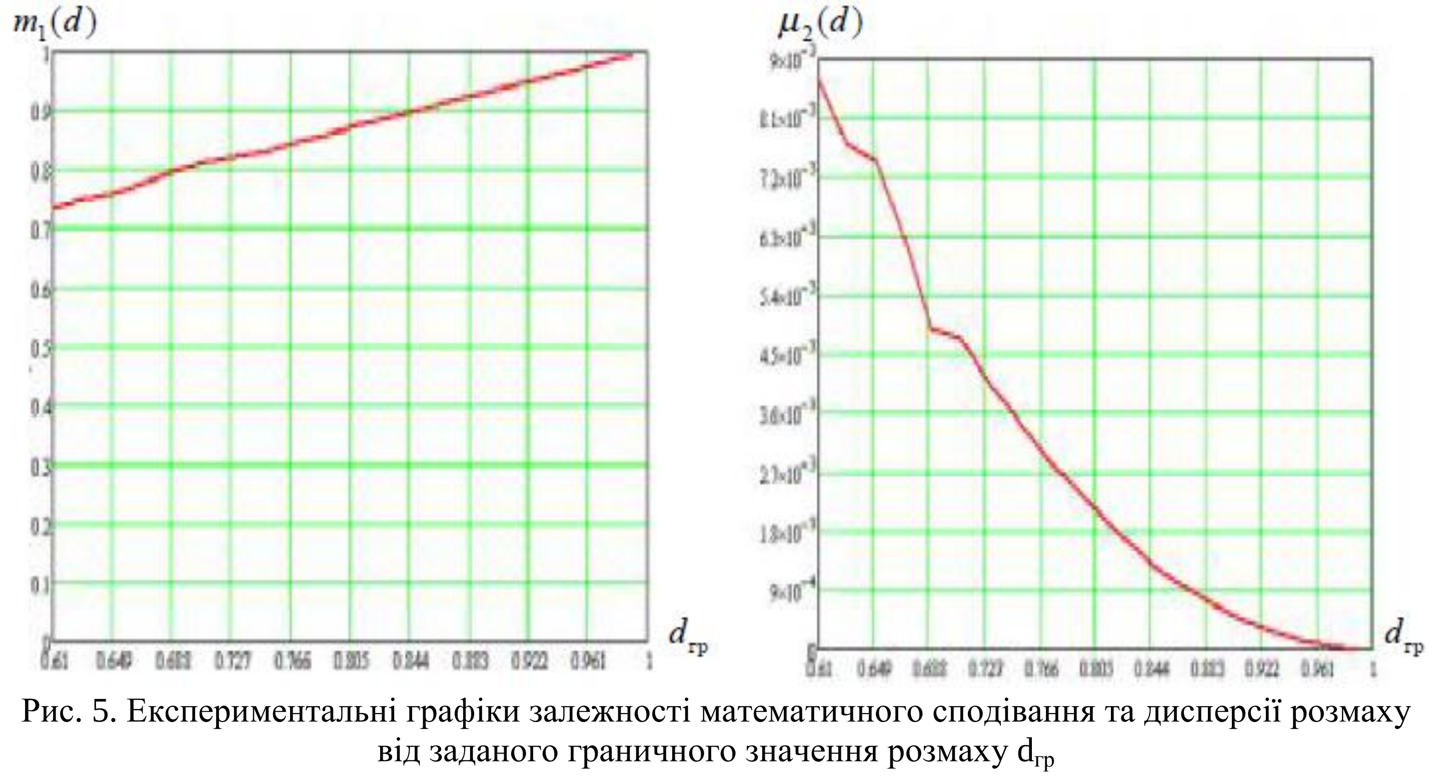


Рис. 5. Експериментальні графіки залежності математичного сподівання та дисперсії розмаху від заданого граничного значення розмаху $d_{гр}$

Для перевірки ефективності запропонованого послідовного алгоритму оцінювання порівняємо отримані значення дисперсій оцінки при їх однакових математичних сподіваннях (рис. 6). Як видно з графіку, послідовний алгоритм дає виграш за дисперсією (приблизно у три рази) у порівнянні з відповідним йому класичним алгоритмом.

Рис. 6. Порівняння дисперсій оцінки (класичного та послідовного методу) при однакових середніх значеннях оцінки

Розглянемо параметри розробленого послідовного алгоритму за тривалістю.

Шляхом нескладних математичних викладок можна отримати вираз для щільності розподілу ймовірностей тривалості спостережень:

$$f(n) = (n-1)\Delta^2 (1-\Delta)^{n-2}, \ n \geq 1.$$

Даний вираз цілком збігається з результатами, отриманими при математичному моделюванні процесу в середовищі *MathCad*. Так, при $\Delta = 0{,}01$ маємо такі щільності розподілу (рис. 7)

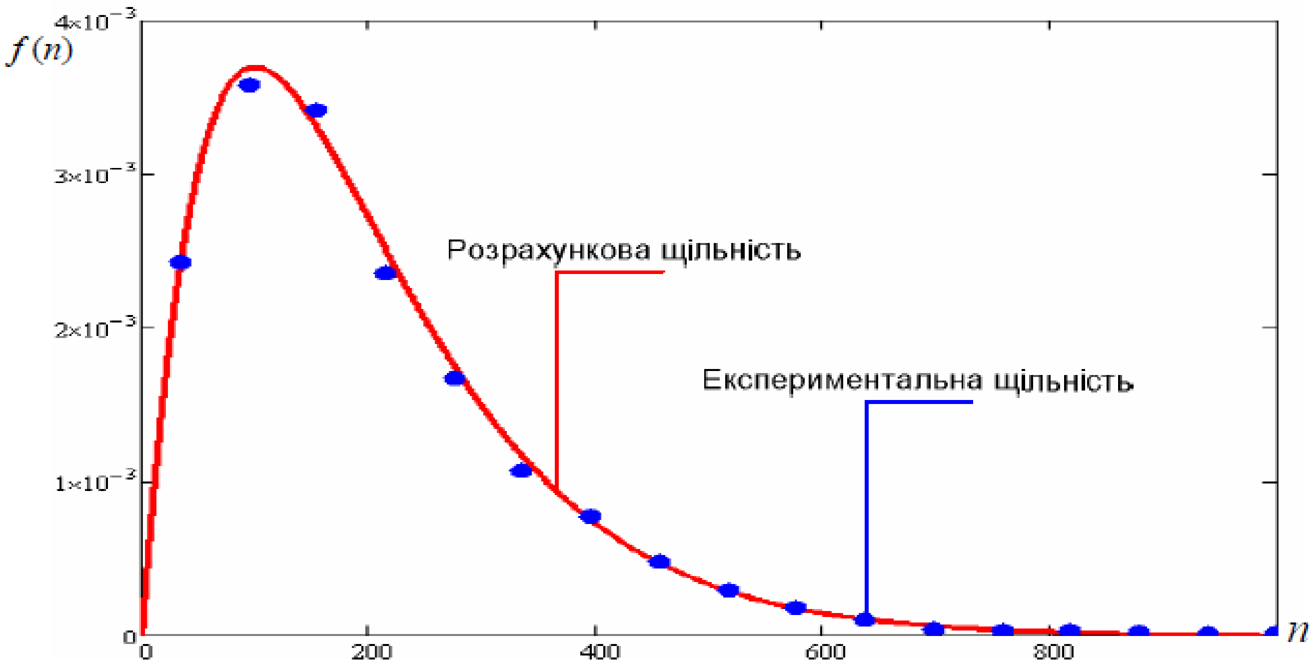


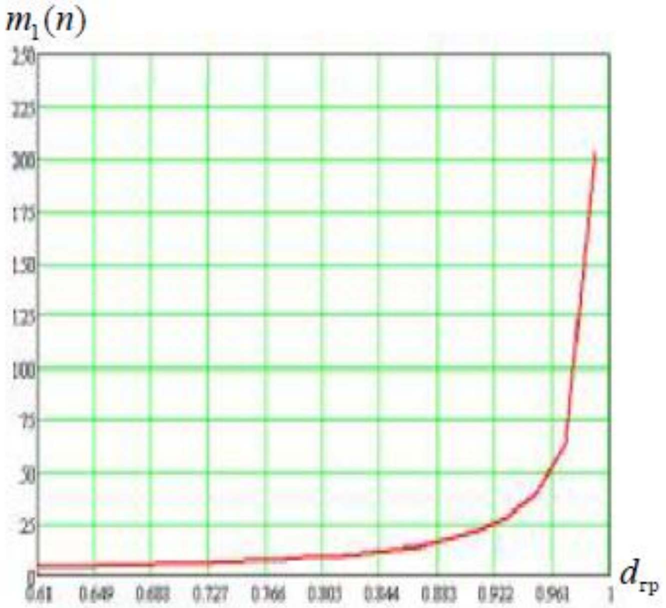
Рис. 7. Щільності розподілу ймовірностей тривалості спостережень (розрахункова та експериментальна)

Середня тривалість та дисперсія спостережень при заданому рівні Δ можуть бути визначені наступним чином:

$$m_1(n) = \sum_i \left[n(n-1)\Delta^2(1-\Delta)^{n-2} \right],$$

$$\mu_2(n) = \sum_i \left[n^2(n-1)\Delta^2(1-\Delta)^{n-2} \right] - m_1^2(n).$$

При цьому експериментально були отримані наступні залежності моментів $m_1(n)$ та $m_2(n)$ (рис.8).



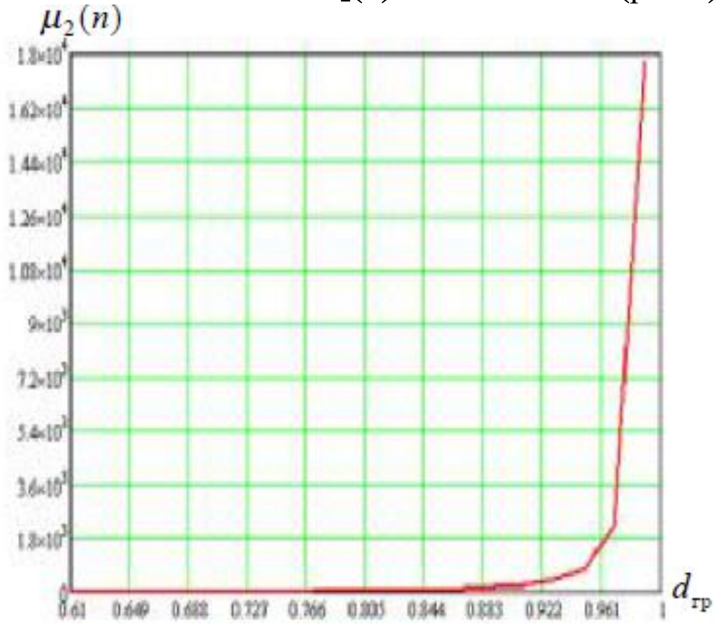


Рис. 8. Експериментальні графіки залежності математичного сподівання та дисперсії середньої тривалості від граничного значення розмаху $d_{гр}$

Висновки

Отримані результати показують, що послідовний алгоритм оцінювання для розглянутого прикладу щільності розподілу ймовірностей при однакових обсягах тривалості спостережень щодо класичного алгоритму оцінювання має менші чисельні значення дисперсій оцінок параметру розмаху *d* або меншу середню тривалість спостережень при однаковому рівні дисперсій. Отримані аналітичні співвідношення для теоретичного розрахунку щільності розподілу, математичного очікування та дисперсії тривалості спостережень цілком збігаються з результатами статистичного моделювання, що підтверджує їх достовірність.

Результати можуть бути використані під час розробки алгоритмів обробки інформації в системах управління технологічними процесами, системах менеджменту якості виробництва продукції та надання послуг тощо.

Список літератури

1. *Вальд А.* Последовательный анализ. – М.: Физматиздат, 1960. – 328 с.

2. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. – М.: Мир, 1974. – 496 с.

3. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 900 с.

4. *Фу К.* Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. – М.: Наука, 1971. – 256 с.

5. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 528 с.

6. *Дэйвид Г.* Порядковые статистики. – М.: Наука, 1979. – 336 с.

7. *Прокопенко І.Г.* Методи і засоби обробки сигналів. – К.: КМУЦА, 1997. – 92 с.

8. *Прокопенко І.Г., Корнільєв Е.А., Тарасенко С.А.* Математичні моделі в обрахунках на ЕОМ. – К.: КМУЦА, 1995. – 68 с.