УДК517.3+519.65

Денисюк В.П., д-р фіз.-мат. наук
Рибачук Л.В., канд. фіз.-мат. наук

ПРО ДРОБОВЕ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

**Інститут комп'ютерних технологій
Національного авіаційного університету**

Розглянуто співставлення дробових похідних та інтегралів від тригонометричних функцій, обчислених за Ліувілем, Ріманом-Ліувілем, Адамаром та Вейлем; наведено деякі чисельні результати порівняння цих методів

Вступ

Область математичного аналізу, що її називають дробовим інтегродиференціюванням, присвячена дослідженню похідних та інтегралів довільного (дійсного або комплексного) порядку, має давню історію і глибокий зміст, спричинений взаємозв'язками із різноманітними питаннями теорії функцій, інтегральних і диференціальних рівнянь тощо.Дробове числення функцій однієї і багатьох змінних, яке живиться ідеями і результатами різних напрямів в математичному аналізі, продовжує інтенсивно розвиватися і в теперішній час, свідоцтвом чому є велика кількість публікацій за останні роки.

Дробові інтеграли і похідні цілого порядку – це звичайні інтеграли і похідні. Проте у випадку дробового порядку ці поняття мають певну специфіку, яка виявляється, наприклад, в тому, що для цих понять у різних ситуаціях природно виникають їх різноманітні модифікації. Співвідношення між такими модифікаціями і є одним з напрямків вивчення інтегро-диференціювання.

Суттєвою особливістю дробового числення є можливість узагальнення багатьох математичних об'єктів і понять. Варто відзначити широку універсалізацію операцій дробового інтегродиференціювання. Так, наприклад, операції диференціювання та інтегрування в дробовому аналізі є симетричними щодо знаку порядку похідної чи інтегралу і виконуються за одним алгоритмом, а звичайні (натуральні) інтеграли та похідні стають частинним випадком дробових аналогів.

Поняття дробового диференціювання та інтегрування звичайно пов'язують з ім'ям Ліувіля. Проте насправді ще засновники диференціального та інтегрального числення замислювалися над похідними не лише цілого, а і дробового порядку.

Дробові похідні привертали увагу Лейбніца, Ейлера, Ліувіля, Абеля, Рімана, Летнікова, Вейля, Адамара і багатьох інших відомих математиків, які значною мірою вплинули на розвиток дробового інтегро-диференціювання.

В історії розвитку дробового інтегро-диференціювання відомо немало робіт, в яких в різні часи перевідкривалися вже відомі результати, інколи тими ж самими засобами, що і у попередників, а інколи на підґрунті інших методів. Ця обставина погіршувалася ще й тим, що існує велика кількість різних підходів до дробового інтегро-диференціювання, і відповідно, різних напрямів у дробовому численні. Співставлення цих підходів і напрямів проводилося рідко і було порівняно мало відоме.

Комплексний порядок *a* дробового інтегро-диференціювання розглядався у працях Ліувіля, Рімана, Грюнвальда, Летнікова, Кобера, Лава, Фішера та ін.

У другій половині 20 – го століття інтерес до дробового інтегродиференціювання значно посилився. Наступний розвиток цієї галузі математичного аналізу пов'язаний з іменами Ж. Адамара, Г. Гарді, Г.Вейля, А.Маршо, М. Джрбашяна, С. Самка, А. Кілбаса, В. Кірякової, О.Марічева, Б. Роса, А. МакБрайда, А. Сайго, К. Нішімото, А. Нахушева, Н.Вірченко та ін. З' являються різноманітні узагальнення формул дробового числення.

Дробове інтегро-диференціювання має неабияке прикладне значення. Після відомої задачі Абеля про таутохрону, перші застосування були дані Ліувілем в задачах геометрії, фізики і механіки. Зокрема, серед цих застосувань слід згадати і відому задачу Лапласа про вплив нескінченного прямолінійного провідника на магніт, задачу Ампера про взаємодію двох таких провідників, задачі, пов'язані з притягуванням тіл, задачу про розподіл тепла в шарі, задачу Гауса про наближені квадратури тощо. У теперішній час дробове інтегро-диференціювання застосовується в багатьох галузях науки і техніки, таких як хімічна фізика, теорія випадкових процесів, в'язкопружність, теорія гравітації тощо.

Дробове інтегродиференціювання в наш час знаходить широке застосування в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, крайових задач математичної фізики, в теорії спеціальних функцій, теорії чисел, у багатьох галузях прикладної математики тощо.

Розглядаються деякі результати порівняння дробових похідних та інтегралів від тригонометричних функцій, обчислених за Ліувілем, Ріманом-Ліувілем, Адамаром та Вейлем та наведемо деякі чисельні результати порівняння цих методів; при цьому, враховуючи порівняно мале розповсюдження теорії та методів дробового інтегро-диференціювання в інженерній практиці, наведемо короткий історичний огляд цього питання.

Як відомо, в 1832-1837 рр. з'являється серія робіт Ж. Ліувіля, яка зробила його творцем достатньо повноцінної теорії дробового інтегродиференціювання. Означення Ліувіля дробового диференціювання спершу було засноване на формулі диференціювання показникової функції і стосується функцій, що можуть бути подані у вигляді ряду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}.$$

Для таких функцій, за означенням Ліувіля, похідна довільного (в тому числі і комплексного) порядку p визначається таким чином [1]

$$D^{-p} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^p e^{a_k x}$$

Зрозуміло, що обмеженість такого означення пов'язана із збіжністю ряду (1).

В тому ж 1832 році Ж. Ліувілем було введено операцію інтегрування дробового порядку, яка визначається таким чином

$$I_\alpha^{-\infty} f = I_\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \ (\alpha > 0).$$

У 1847 році Б. Ріманом дробове інтегрування було впроваджено таким чином

$$I_\alpha^a f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \ (\alpha > 0).$$

У подальшому дробове інтегрування, що визначається цією формулою, отримало назву дробового інтегралу Рімана-Ліувіля.

Слід зауважити, що хоча робота Рімана, в якій було запропоновано цю формулу, було виконано ним у 1847 році, опубліковано її було лише у 1876 році – через 10 років після його смерті.

В 1867 році А. Грюнвальд і в 1868 році А.В. Летніков запропоновують інший підхід до дробового інтегродиференціювання, заснований на узагальнені звичайного диференціювання функції $f(x)$ порядку $n \in N$ у вигляді

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\Delta_h^n f)x}{h^n},$$

де $(\Delta_h^n f)x$ – скінченна різниця порядку $n \in N$ функції f з кроком h. Різниця $(\Delta_h^\alpha f)x$ дробового порядку $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, визначається рядом

$$(\Delta_h^\alpha f)x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh),$$

де $\frac{\alpha}{k}$– біноміальні коефіцієнти, які для довільних дійсних чисел визначаються за формулами [2]

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\alpha-k)}.$$

Похідні дробового порядку Грюнвальда-Летнікова визначаються таким чином

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} f)x}{h^{\alpha}}.$$

Відповідно, інтеграли дробового порядку визначаються формулами

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{\alpha} (\Delta_h^{-\alpha} f)x.$$

Можна показати [1], що при певних обмеженнях інтеграли і похідні дробового порядку у розумінні Грюнвальда – Летнікова збігаються із відповідними інтегралами і похідними у розумінні Рімана-Ліувіля.

У 1892 році виходить змістовна робота Ж. Адамара. Ідея дробового диференціювання аналітичної функції через почленне диференціювання її ряду Тейлора, хоча і відома до Адамара, використовується в цій роботі як ефективно працюючий математичний апарат, усвідомлений як дробове диференціювання аналітичної в колі функції по радіусу. З того часу такий підхід прийнято називати підходом Адамара [1]. Згідно з Адамаром, якщо

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!},$$

то дробова похідна визначається таким чином

$$D^{\alpha} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-c)^{k-\alpha}.$$

а дробове інтегрування – за формулою

$$I_{\alpha}^{A,c} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(c) \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha)} \frac{(x-c)^{k+\alpha}}{k!}.$$

В цій же роботі, напевне, вперше з'являється конструкція узагальненого дробового інтегрування у формі

$$\int_0^1 v(\xi) f(z\xi)\, d\xi.$$

Проте ця ідея Адамаром далі не розвивалася, хоча він і розглянув випадок

$$v(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (-\ln \xi)^{\alpha-1}.$$

Безпосередньою перевіркою нескладно переконатися, що для функцій, які можуть бути подані рядами Тейлора, дробовий інтеграл Рімана – Ліувіля співпадає з дробовим інтегралом за Адамаром, тобто

$$I_{\alpha}^{A,0} f = I_{\alpha}^{a} f.$$

Звичайна форма дробового інтегрування за Ріманом – Ліувілем виявляється незручною в теорії тригонометричних рядів, яка має справу з періодичними функціями. Природно, що для періодичних функцій операція дробового інтегродиференціювання має бути введена таким чином, щоб вона переводила їх в періодичні функції з тим же періодом. Легко бачити, що дробове інтегродиференціювання за Ріманом – Ліувілем такої властивості не має. Дійсно, вирази для дробових похідних за Ріманом – Ліувілем тригонометричних функцій $\sin wx$ та $\cos wx$ мають вигляд [2]

$$D^{\alpha} \sin \omega(x-a) = \sin \omega(x-a) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-\omega^2)^k \binom{\alpha}{2k} \frac{(x-a)^{2k-\alpha}}{\Gamma(1+2k-\alpha)} +$$

$$+ \omega \cos \omega(x-a) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-\omega^2)^k \binom{\alpha}{2k+1} \frac{(x-a)^{1+2k-\alpha}}{\Gamma(2+2k-\alpha)};$$

$$D^{\alpha}\cos\omega(x-a)=\cos\omega(x-a)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}(-\omega^2)^k\binom{\alpha}{2k}\frac{(x-a)^{2k-\alpha}}{\Gamma(1+2k-\alpha)}-$$
$$-\omega\sin\omega(x-a)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}(-\omega^2)^k\binom{\alpha}{2k+1}\frac{(x-a)^{1+2k-\alpha}}{\Gamma(2+2k-\alpha)}.$$

Отже, обчислення дробових похідних та інтегралів за Ріманом – Ліувілем (Адамаром) від тригонометричних функцій призводить до неперіодичних функцій.

В теорії тригонометричних рядів користуються іншим означенням дробового інтегро-диференціювання, запропонованим Г. Вейлем у 1917 році. Згідно з Вейлем, якщо

$$f(x)=\sum_{|n|>0}c_n e^{inx}\ ,\ \ (c_0=0)\ .$$

то інтеграл Вейля порядку α ($\alpha > o$) , визначається таким чином

$$If_{\alpha}(x)=\sum_{|n|>0}\frac{c_n e^{inx}}{(in)^{\alpha}}\ .$$

Цей оператор при натуральних значеннях a являє собою a-кратний інтеграл від функції $f(x)$, але інакше нормований, а саме вимогою, щоб функція $I_a f$ мала період і щоб її середнє значення на періоді дорівнювало нулю.

Нескладно показати [3], що інтеграл Вейля можна подати у вигляді згортки

$$If_{\alpha}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)\Psi^{\alpha}(t)\,dt\,,$$

де

$$\Psi^{\alpha}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(nx-\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{n^{\alpha}}\ .$$

В [1] показано, що для періодичних функцій з нульовим середнім дробові інтеграли Вейля співпадають з дробовими інтегралами Ліувіля на всій прямій, тобто

$$I_{\alpha}f=If_{\alpha}(x)\ .$$

Нескладно показати, що обчислення дробових похідних та інтегралів від тригонометричних функцій за Вейлем (Ліувілем) призводить до таких же тригонометричних функцій, зсунутих певним чином; при цьому зберігається властивість періодичності.

З цього можна зробити висновок, що втрата періодичності при виконанні операцій дробового інтегрування та диференціювання відбувається внаслідок виконання цих операцій саме у розумінні Рімана – Ліувіля (Адамара).

Природно виникає питання про те, наскільки відрізняються між собою похідні від тригонометричних функцій у розумінні Рімана –Ліувіля та Адамара від таких же похідних у розумінні Ліувіля та Вейля. Можна показати, що відмінність між цими похідними оцінюється формулами

а) для $f(x)=\sin x$

$$\delta_s(x,\alpha)=I_{\alpha}^{A}f(x)-If_{\alpha}(x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left[\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n-\alpha)}x^{2n-1-\alpha}-\right.$$
$$\left.-\left(x+\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{2n-1}\right],$$

б) для $f(x)=\cos x$

$$\delta_c(x,\alpha)=I_{\alpha}^{A}f(x)-If_{\alpha}(x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[2(n-1)]!}\left[\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(2n-1-\alpha)}x^{2(n-1)-\alpha}-\right.$$
$$\left.-\left(x+\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{2(n-1)}\right].$$

Графіки похибки $\delta_s(x,\alpha)$ а для деяких значень параметра α наведено на рис. 1 – 3.

Аналогічно виглядають і графіки похибки $\delta_c\,(x,\alpha)$.

Легко бачити, що найменшого значення (менше за 0,5%) величини $\delta_s(x,\alpha)$

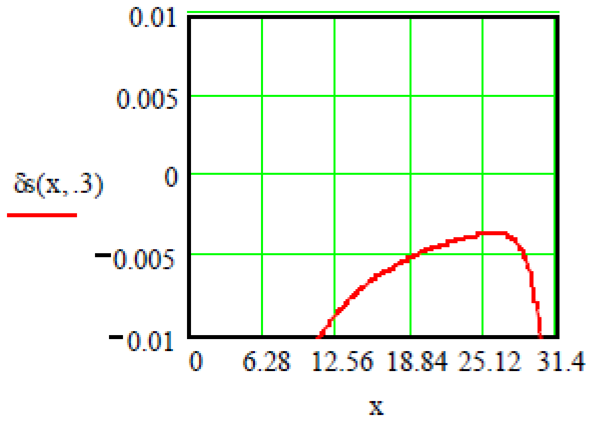

Рис. 1. Графік похибки δ_s(x,α) для значення параметра α=0.3

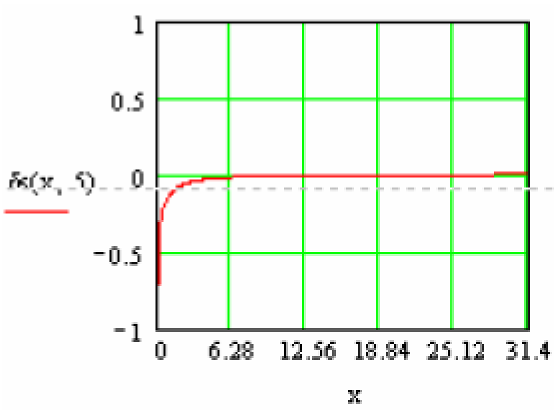

Рис. 2. Графік похибки δ_s(x,α) для значення параметра α = 0.5

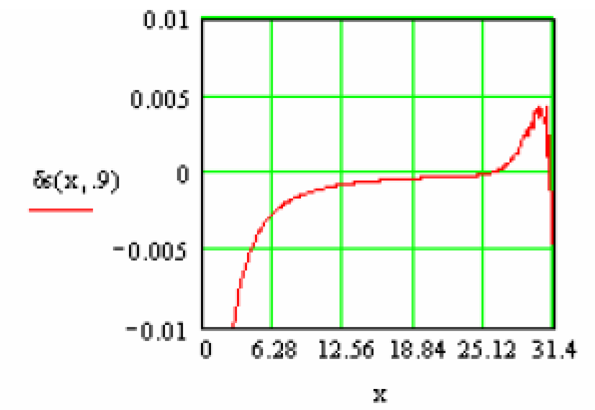

Рис. 3. Графік похибки δ_s(x,α) для значення параметра α = 0.9

та $\delta_s(x,\alpha)$ приймають на проміжку [6π, 8π].

Це пояснюється тим, що з одного боку, при малих значеннях аргументу на значення величини негативно впливає близькість аргументу до нуля, а з другого боку, при великих значеннях аргументу, зростання цих величин пояснюється швидким накопиченням обчислювальної похибки. Найменших значень ці величини набувають при значеннях параметра α, близьких до країв інтервалу (0,1) ; при значеннях цього параметру, близьких до середини інтервалу, ця похибка є найбільшою і не перевищує 0.5%.

Висновки

Спираючись на результати проведених досліджень можна зробити висновок про те, що результати дробового інтегро-диференціювання за Ріманом –Ліувіллем та Адамаром асимптотично наближаються до результатів дробового інтегродиференціювання за Вейлем та Ліувіллем.

Список літератури

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. *Вірченко Н.О., Рибак В.Я.* Основи дробового інтегро-диференціюван-ня. – К.: ТОВ “Задруга”, 2007. – 364 с.

3. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с