УДК 629.735.018.7:681.325.53(045)

Сукач О.М.

ЕНТРОПІЙНА ОЦІНКА ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ В АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМАХ КОНТРОЛЮ

Національний авіаційний університет

Розглянуто проблему визначення похибок в автоматизованих системах вимірювання та обґрунтовано вибір моделі закону розподілу невідомої випадкової величини похибки для вирішення задач прийняття рішень

Вступ

При вимірюванні визначальних параметрів з метою визначення якості функціонування складних автоматизованих ерготехнічних систем неминуче виникають помилки, пов′язані з похибками датчиків системи, яка контролюється, похибками обробки вимірювань, впливом зовнішніх чинників, тощо. Для точного вирішення задач прийняття рішення про знаходження параметра(ів), який контролюється (вимірюється) в межах допуску необхідно знати закон розподілу похибки, яку вносять випадкові процеси, та його параметри.

Постановка задачі

Вимірювальні прилади, у тому числі датчики, які використовуються в системах контролю мають похибку (±Δ), яка вказується в паспортних даних. У відповідності до [4] замість терміна «похибка» вводиться поняття «невизначеність вимірювання». В дійсності похибка є випадковою функцією часу, закон розподілу якої в загальному випадку невідомий.

В процесі контролю визначити дійсний закон розподілу випадкової величини похибки та центр її розподілу доволі складно. Задача полягає в тому, щоб визначити модель і параметри закону розподілу, який вносить таку саму невизначеність вимірювання, як і паспортна похибка та може бути прийнятий для вирішення задач прийняття рішення при оцінці стану об′єкта контролю.

Розрахунок ентропії

Мірою невизначеності (дезінформації, яка вноситься) є інформаційна ентропія (ентропія Шеннона [1]) закону розподілу похибки, тобто різниця між дійсним значенням параметра, який контролюється, та значенням, яке спостерегається (вимірюється) з похибкою.

Ентропія безперервної випадкової величини визначається як [1]:

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln f(x)dx \quad , \qquad (1)$$

де $f(x)$ – щільність розподілу випадкової величини.

Дослідження [3] показують, що у більшості практичних випадків похибки контролю параметрів розподілені симетрично. В загальному випадку вони можуть бути представлені симетричним експоненційним законом розподілу з функцією щільності ймовірності:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2\lambda\sigma\Gamma(1/\alpha)}\exp\left(-\left|\frac{x-m_x}{\lambda\sigma}\right|^{\alpha}\right), \qquad (2)$$

де $\lambda = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)}}$, α – постійна для даного закону розподілу, $\Gamma(y)$–гама-функція [2]:

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} t^{y-1}e^{-t}dt \; .$$

Для зручності будемо розглядати нормований закон розподілу для якого математичне сподівання $m_x = 0$, а $\lambda\sigma = 1$. Функція щільності ймовірності (2) в такому випадку може бути записана як:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)}\exp\left(-|x|^{\alpha}\right) = \\ = K(\alpha)\exp\left(-|x|^{\alpha}\right) \quad , \qquad (3)$$

де $K(\alpha)$ – нормуючий множник розподілу, який залежить від показника ступеня α.

На рис. 1 показані графіки функцій щільності розподілу сімейства експоненційних розподілів при різних значення показника ступеня α.

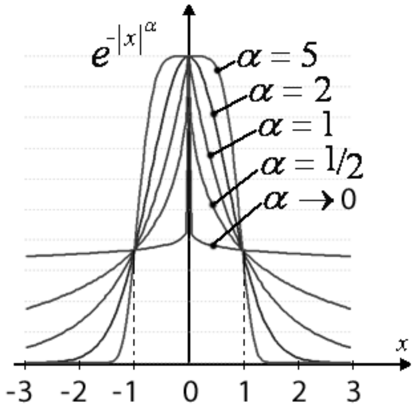

Рис. 1. Сімейство екпоненційних розподілів

При $\alpha = 1$ розподіл відповідає двосторонньому розподілу Лапласа, при $\alpha = 2$ – нормальному розподілу (Гуасса), при $\alpha \to \infty$ розподіл становиться рівномірним [2]. При реальному розподілу показник ступеня може приймати довільне, у тому числі дрібне додатне значення.

Ентропійне значення похибки – це значення похибки з рівномірний законом розподілу, яке вносить таку саму дезинформацію, як і похибка з дійсним законом розподілу. Розрахуємо ентропійне значення похибки для різних апріорно відомих законів розподілу.

Для рівномірного закону розподілу(рис. 2) функція щільності розподілу (η) визначається як:

$$f(\eta_p) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta} & при \quad \eta = \in [\pm\Delta] \\ 0 & при \quad \eta = \overline{\in} [\pm\Delta] \end{cases}$$

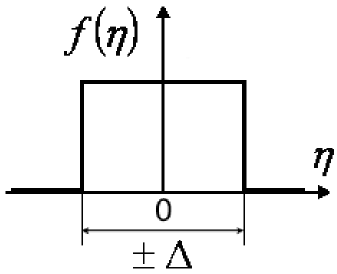

Рис. 2. Рівномірний закон розподілу

Відповідно, значення ентропії для рівномірного закону розподілу визначається за формулою (1):

$$H_p(\eta) = -\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{2\Delta} \ln\left(\frac{1}{2\Delta}\right) d\eta =$$

$$= \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{2\Delta} \ln(2\Delta) d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\Delta} \ln(2\Delta)\eta \Big|_{-\Delta}^{+\Delta} = \ln 2\Delta;$$

Розрахуємо ентропію для нормального закону розподілу, функція щільність розподілу якого задана формулою:

$$f(\eta_н) = \frac{1}{\sigma_н \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$H_i(\eta) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) \ln\left[\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right)\right] d\eta = \ln\left(\sigma_i \sqrt{2\pi}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta^2 f(\eta)}{2\sigma^2} d\eta = \ln\left(\sigma_i \sqrt{2\pi e}\right);$$

Для того, щоб виконати ентропійну оцінку та знайти відповідний ентропійний коефіцієнт для довільного закону розподілу необхідно прирівняти ентропію такого закону розподілу та ентропію рівномірного закону розподілу:

$$H_p(\eta) = H_з(\eta).$$

Для нормального закону розподілу маємо:

$$\ln 2\Delta = \ln\left(\sigma_н \sqrt{2\pi e}\right),$$

звідси: $$\Delta = \frac{\sqrt{2\pi e}}{2}\sigma_н = 2{,}066\sigma_н.$$

Відповідно, ентропійний коефіцієнт для нормального закону розподілу:

$$K = \frac{\Delta}{\sigma} = 2{,}066\sigma_н.$$

Виконавши аналогічні розрахунки для апріорно відомих експоненційних законів розподілу, функції щільність розподілу яких задаються за формулою 3, можна розрахувати відповідні їм ентропійні коефіцієнти. Дані таких розрахунків наведені в таблиці 1.

Таблиця 1. Ентропійні коефіцієнти деяких законів розподілу

Вид розподілу	**Ентропійний коефіцієнт К**	**Примітка**
$f(x) = \frac{1}{48}\exp\left(-\sqrt[4]{\lvert x\rvert}\right)$	0,085	
$f(x) = \frac{1}{12}\exp\left(-\sqrt[3]{\lvert x\rvert}\right)$	0,424	
$f(x) = \frac{1}{4}\exp\left(-\sqrt{\lvert x\rvert}\right)$	1,35	
$f(x) = \frac{1}{2}\exp\left(-\lvert x\rvert\right)$	1,92	розподіл Лапласа
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\lvert x\rvert^2\right)$	2,066	розподіл Гаусса
$f(x) = \frac{7}{2\Gamma(1/7)}\exp\left(-\lvert x\rvert^7\right)$	1,87	

Таким чином, серед усіх можливих симетричних експоненційних законів розподілу максимальну ентропію має нормальний закон розподілу, тобто нормальний закон розподілу похибки додає максимальну невизначеність результату вимірювання випадкової величини (параметра, який контролюється).

Висновки

Визначення дійсного закону розподілу параметра (похибки) є задачею неоднозначною, та доволі складною с практичної точки зору. Тому для цілей використання статистичних методів оцінки параметрів, які контролюються та похибок при їх визначенні можна припустити, що похибка розподілена по нормальному закону. Внаслідок того, що нормальний закон має максимальну ентропію його використання у якості моделі розподілу додасть у результати аналізу похибку не більше, ніж воне є у дійсності. Використання апріорної моделі нормального закону розподілу похибки дає можливість замість дійсного значення випадкової похибки контролю отримати її оцінку зверху.

Список літератури

1. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Изд. иностр. лит., 1963. — 830 с.

2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т.2. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 738 с., ил.

3. *Маликов М.Ф.* Основы метрологии. Ч. 1. Учение об измерении. - М.: Трудрезервиздат, 1949. — 480 с.

4. ISO/IEC Guide 2:2004. Standardization and related activities — General vocabulary.

Подано до редакції 13.10.2010