

УДК 620.1.08:537.634:004.942(045)

Петрищев О.М., д-р техн. наук
Мелешко М.А., канд. техн. наук
Трохимець В.О.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ТЕНЗОРНИХ КОНСТАНТ СТАНУ ФЕРОМАГНІТНИХ ПОЛІКРИСТАЛІЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

Факультет комп'ютерних систем
Національного авіаційного університету

Описано постановку модельного експерименту. Побудовано математичну модель фізичного стану вимірювального модуля. Запропоновано методику визначення основних фізико-технічних констант полікристалічного феромагнітного матеріалу

Вступ

Розробка нових технологій та методів отримання, обробки вимірювальної інформації являється актуальним напрямком теоретичних та експериментальних досліджень. В ряді таких областей як: технічна діагностика та авіоніка, дефектоскопія та неруйнівний контроль, ультразвукова медична діагностика важливим являється розробка нових датчиків, в тому числі, що базуються на застосуванні магнітострикційного ефекту. Експериментальне отримання точних значень магнітострикційних констант дозволяє будувати більш точні математичні моделі, що описують взаємодію параметрів технічного приладу та параметрів фізичних процесів, що входять до складу магнітострикційного ефекту. Умовно, по типу взаємодії параметрів технічного приладу та параметрів фізичних процесів виділяють дві групи задач.

В першій групі – магнітострикційний ефект являється однією із ланок, що входить до складу паразитного внутрішнього зв'язку і приводить до зменшення результуючого к.к.д. та надійності роботи технічного пристрою.

Друга група задач пов'язана з розробкою технічних пристроїв, що входять до прямого ланцюга перетворення приладу і базуються на застосуванні магнітострикційного ефекту, наприклад, магнітострикційних випромінювачів та датчиків автоматики.

Як в першому випадку, при вирішенні задач компенсації, так і в другому випадку при вирішенні задач оптимізації (максимізації та стабілізації) параметрів магнітострикційного ефекту необхідно точно визначити магнітострикційні та інші фізико-технічні константи матеріалу. Тому, очевидно являється наукова актуальність та економічна доцільність проведення експериментальних та теоретичних досліджень в цьому напрямку.

Аналіз досліджень

У 1842 р. Д.П. Джоуль вперше спостерігає зміну форми зразка із заліза в магнітному полі. Явище відносної зміни розмірів феромагнітного зразка отримало назву прямого магнітострикційного ефекту або ефекту Джоуля. В 1865г., італійський фізик Е. Вілларі відкрив, що намагніченість феромагнітних зразків змінюється під дією прикладених механічних сил. Це явище отримало назву зворотного магнітострикційного ефекту і називається в даний час ефектом Вілларі. Довгий час магнітострикція вивчалася порівняно мало не тільки із-за експериментальних труднощів, а головним чином через нез'ясованість важливості ролі цього явища в процесах намагнічування феромагнітних тіл.

Дослідження явища магнітострикції, у зв'язку з розвитком теорії технічного намагнічування, почало інтенсивно відбуватися в 20-х роках 20 ст. Перелік робіт та отриманих результатів міститься в монографії С.В. Вонсовського та Я.С.Шура [1].

Якщо в перший період розвитку відбувалася побудова фізичної моделі явища в рамках загальної теорії феромагнетизму, то подальший розвиток пов'язаний із створенням феноменологічної теорії, що описує пружні та електромагнітні поля в магнітострикційному середовищі в процесі їх взаємодії.

В СРСР ці роботи були розпочаті академіком Н.М. Андреевим (Акустичний інститут АН СРСР, Москва). Серед перших публікацій цього напрямку можна відзначити роботи Н.П. Голяминой із співробітниками (бібліографія [4]). В теоретичних дослідженнях К.Б. Власова [2, 3] сформульовано в найбільш закінченому вигляді рівняння стану магнітострикційного середовища з урахуванням нелінійності п'єзомагнітних та магнітних характеристик.

Експериментальний підхід по визначенню констант магнітострикції представлений у монографії Л.Н. Сиркіна [4]. Але в приведених результатах міститься ряд суттєвих помилок. Серед зарубіжних дослідників що працювали в цьому напрямі, необхідно відзначити таких авторів: В. Новацкий [5, 6], Е. Кикучи [7].

В монографії М.Р. Короткіна [8] 90-і роки, відзначається недостатня дослідженість області магнітострикції та перспективність робіт в цьому напрямку. Серед вітчизняних робіт цього напрямку – дослідження проведені в Національному університеті КПІ. Результати представлені в публікації [9, 10].

Постановка задачі

Метою наукових досліджень є розробка методики вимірювання та аналітичної обробки отриманих результатів для визначення магнітострикційних констант феромагнітного полікристалічного матеріалу. Теоретичною основою методу являється математична модель фізичного стану кільцевого сердечника. Прототипом розроблюваного методу являється робота [4], в якій виправлені такі недоліки:

рівняння стану середовища записується в тензорній формі, тоді як в прото-

типі в скалярній формі, що приводить до втрати фізичного змісту констант.

розглянута математична модель радіальних коливань кільця, на відміну від прийнятого в прототипі помилкового припущення про напружено-деформований стан стиску-розтягнення, що характерний для стержнів.

В результаті отримана адекватна математична модель фізичних коливань дослідного зразка та побудована методика виміру та аналітичного визначення констант магнітострикції полікристалічного феромагнітного матеріалу.

Результати досліджень

Феноменологічна теорія магнітострикційних явищ була побудована К.Б. Власовим в кінці п'ятидесятих – початку шестидесятих років двадцятого сторіччя [2, 3]. В цих роботах побудовані рівняння стану деформованого феромагнетика з урахуванням анізотропії та нелінійності його магнітних властивостей. Отримані рівняння рівняння стану включають матеріальні константи, які описуються тензорами четвертого, шостого та восьмого рангів. Ці рівняння можуть описувати напружено-деформований стан феромагнетика, що виникає під дією достатньо високого рівня напруженості змінного магнітного поля, коли нелінійні властивості матеріалу проявляються в повній мірі. У випадку, коли в об'ємі полікристалічного, тобто ізотропного в розмагніченому стані, феромагнетика існує сильне постійне магнітне поле, а на його фоні діє невелике по амплітуді змінне магнітне поле (відношення модулів векторів повинне бути не менше десяти) із загальних рівнянь, що приведені в роботі [2], отримують співвідношення виду:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^H u_{k,l}^* + m_{pqij} H_p^0 H_q^*, \quad (1)$$

$$B_s^* = m_{rsnm} H_r^0 u_{n,m}^* + \mu_{sl}^e H_l^*, \quad (2)$$

де σ_{ij} – змінний у часі компонент тензора результуючих механічних напруг; c_{ijkl}^H – компонент тензора модулів пружності розмагніченого феромагнетика;

$u_{k,l}$ – змінний в часі компонент вектора переміщення матеріальних частинок ферромагнетика від положення рівноваги. Кома між індексами означає операцію диференціювання виразу, що записаний до коми по координаті, індекс якої поставлений після коми; m_{pqij} – компонент тензора магнітострикційних констант; B_s^* – компонент змінного в часі вектора результуючої магнітної індукції; μ_{sl}^e – компонент тензора магнітної проникності, що вимірюється в режимі постійної деформації.

Очевидно, що тензор модулів пружності розмагніченого ферромагнетика і тензор магнітострикційних констант являються ізотропними тензорами четвертого рангу, що визначаються, як показано в роботі [12], за допомогою двох, не рівних один одному, матеріальних констант. Визначимо компоненти цих тензорів таким чином:

$$c_{ijkl}^H = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3)$$

$$m_{ijkl} = m_2 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{m_1 - m_2}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4)$$

де λ і G – константи Ламе, (G – модуль зсуву). Із модулем Юнга E та коефіцієнтом Пуасона ці величини зв'язані співвідношеннями:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad \text{та} \quad \nu = \lambda / (2(\lambda + G)),$$

де δ_{ij} – символи Леопольда Кронекера; m_1 і m_2 – магнітострикційні константи, що визначаються експериментально; μ_{ij}^e – тензор магнітної проникності, що має діагональну матрицю. Два з трьох компонентів рівні по величині і разом менше третього, тобто проникності, що вимірюється у напрямку вектора напруженості постійного магнітного поля.

Необхідно підкреслити, що магнітна проникність μ_{ij}^e повинна визначатись в режимі сталих деформацій, тобто при переміщенні ферромагнетика всі компоненти тензора деформацій повинні дорів-

нювати нулю. Іноді можна зустріти визначення величини μ_{ij}^e – як магнітної проникності “затиснутого” ферромагнетика. Це визначення базується на припущенні, що можна зафіксувати розміри досліджуваного зразка і не допустити зміни його розмірів під час намагнічування. Але при вимірюванні індуктивності котушки з сердечником із досліджуваного матеріалу у змінних магнітних полях, для визначення проникності – розміри зразка не тільки періодично збільшуються, але і періодично зменшуються. Уникнути змін розмірів зразка не можливо навіть теоретично. Тому, очевидним стає висновок, що режим постійних деформацій ніколи не реалізується при проведенні експериментальних досліджень. Таким чином, значення μ_{ij}^e не можливо визначити експериментально.

При проведенні вимірювань на низьких частотах, коли масштаб просторової неоднорідності напружено-деформованого стану матеріалу зразка (довжина хвилі) значно перевищує найбільший розмір зразка, реалізується режим постійності результуючих механічних напруг. В цьому режимі проводиться вимірювання магнітної проникності μ_{ij}^σ . Відповідні рівняння стану мають вигляд:

$$\epsilon_{ij}^* = s_{ijkl}^H \sigma_{kl}^* + m'_{pqij} H_\rho^0 H_q^*, \dots \dots \dots (5)$$

$$B_s^* = m'_{rsnm} H_r^0 \sigma_{nm}^* + \mu_{sl}^\sigma H_l^*, \dots \dots \dots (6)$$

де $\epsilon_{ij}^* = (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$ – компонент тензора бескінечно малих, змінних у часі деформацій; s_{ijkl}^H – компонент тензора пружних податливостей розмагніченого полікристалічного ферромагнетика (тобто компонент ізотропного тензора четвертого рангу); m'_{pqij} – компонент тензора магнітострикційних констант другого типу, який для полікристалічних ферромагнетиків так як і тензор m_{pqij} являється ізотропним тензором четвертого рангу.

Рівняння (1), (2) та (5), (6) не вичерпують перелік феноменологічного опису магнітострикційних явищ. Кожен із цих

варіантів має свої переваги та недоліки. Так за допомогою рівнянь (1), (2) зручно описувати напружено-деформований, тобто механічний стан феромагнетика. Але труднощі виникають із-за наявності

невимірюваної величини μ_{ij}^{ε} . За допомогою рівнянь стану (5), (6) зручно описувати магнітний стан деформованого феромагнетика. Але стає практично неможливим розрахунок напружено-деформованого стану зразка із вільними границями. В деформованому та перемагнічуваному феромагнетикі пружні та магнітні поля взаємопов'язані та взаємообумовлені, тому для вичерпного опису фізичного стану магнітостриційного матеріалу необхідно використовувати мінімум два варіанти рівнянь стану. Матеріальні константи, що входять в рівняння стану (1), (2) та (5), (6) пов'язані між собою функціональними співвідношеннями. Для визначення цих взаємозв'язків, введемо пьезомагнітні константи першого та другого типу, які пов'язані з відповідними магнітостриційними константами такими лінійними співвідношеннями:

$$m_{qij} = m_{pqij} H_p^0, \quad m'_{qij} = m'_{pqij} H_p^0.$$

Для зручності запису перепишемо обидва варіанти рівнянь стану з використанням індексів Фойгта:

$$\sigma_{\alpha}^* = c_{\alpha\beta}^H \varepsilon_{\beta}^* - m_{q\alpha} H_q^*, \quad (7)$$

$$B_s^* = m_{s\gamma} \varepsilon_{\gamma}^* + \mu_{sl}^{\varepsilon} H_l^*, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\lambda}^* = S_{\lambda\delta}^H \sigma_{\delta}^* - m'_{q\lambda} H_q^*, \quad (9)$$

$$B_i^* = m'_{i\alpha} \sigma_{\alpha}^* + \mu_{in}^{\sigma} H_n^*, \quad (10)$$

де грецькими буквами позначені індекси Фойгта, що формуються із симетричної пари тензорних індексів і набувають значень 1,2,...,6.

Підставимо рівняння (7) у співвідношення (9):

$$\varepsilon_{\lambda}^* - s_{\lambda\delta}^H c_{\delta\beta}^H \varepsilon_{\beta}^* = (m'_{q\lambda} - s_{\lambda\delta}^H m_{q\delta}) H_q^*. \quad (11)$$

Оскільки $\varepsilon_{\lambda}^* = \delta_{\lambda\beta} \varepsilon_{\beta}^*$ та співвідношення (11) повинні виконуватися при будь яких значеннях деформації ε_{β}^* та

компонентах вектора напруженності H_q^* , тому повинні виконуватися співвідношення між матеріальними константами:

$$s_{\lambda\beta}^H c_{\delta\beta}^H = \delta_{\lambda\beta}, \quad (12)$$

$$m'_{q\lambda} = s_{\lambda\delta}^H m_{q\delta}. \quad (13)$$

Із формули (12) слідує, що матриці пружних податливостей та модулів пружності являються взаємооберненими і розраховуються у відповідності із формулою:

$$s_{\lambda\mu}^H = (-1)^{\lambda+\mu} \cdot \frac{M_{\lambda\mu}}{|c_{\alpha\beta}^H|}, \quad (14)$$

де $M_{\lambda\mu}$ – мінор матриці модулів пружності. $\|c_{\alpha\beta}^H\|$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 6$) отримується шляхом викреслювання строчки із номером λ та стовпця із номером μ ; $|c_{\alpha\beta}^H|$ – детермінант квадратної матриці $\|c_{\alpha\beta}^H\|$.

Виконуючи обчислення по формулі (14) отримуємо формули для розрахунку пружних податливостей через модулі пружності.

$$s_{11}^H = s_{22}^H = s_{33}^H = \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)},$$

$$s_{12}^H = s_{13}^H = s_{21}^H = s_{23}^H = s_{31}^H = s_{32}^H = -\frac{\lambda}{2G(3\lambda + 2G)},$$

$$s_{44}^H = s_{55}^H = s_{66}^H = \frac{1}{G}.$$

Всі інші елементи матриці $\|s_{\alpha\beta}^H\|$ дорівнюють нулю. Підставляючи співвідношення (9) в рівняння стану (8) і прирівнюючи отриманий результат виразу (10) отримуємо:

$$m'_{i\alpha} \sigma_{\alpha}^* + \mu_{in}^{\sigma} H_n^* = m_{l\gamma} s_{\gamma\delta}^H \sigma_{\delta}^* + m_{l\gamma} m'_{q\gamma} H_q^* + \mu_{ij}^{\varepsilon} H_j^*.$$

Із останнього рівняння слідує:

$$\mu_{in}^{\sigma} - \mu_{in}^{\varepsilon} = m_{l\gamma} s_{\gamma\delta}^H m_{n\delta}. \quad (15)$$

Із загального співвідношення (15) для компонентів діагональної матриці магнітної проникності отримуємо вирази:

$$\begin{aligned} \mu_1^\sigma - \mu_1^\varepsilon &= m_{1\gamma} s_{\gamma\delta}^H m_{1\delta}, \\ \mu_2^\sigma - \mu_2^\varepsilon &= m_{2\gamma} s_{\gamma\delta}^H m_{2\delta}, \\ \mu_3^\sigma - \mu_3^\varepsilon &= m_{3\gamma} s_{\gamma\delta}^H m_{3\delta}. \end{aligned} \quad (16)$$

У співвідношеннях (16) тензорні індекси при символах магнітних проникностей замінені на індекси Фойгта: $(\gamma, \delta) = 1, 2, \dots, 6$.

У запропонованому способі визначення фізико-механічних констант феромагнітних полікристалічних матеріалів виділяються два послідовно виконуваних етапи.

Експериментальний етап

Експериментальний етап починається із формування вимірювального модуля, схема якого приведена на рис. 1.

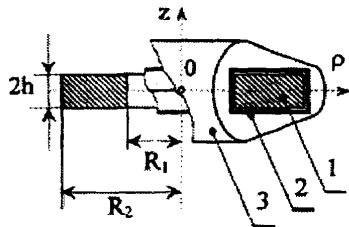


Рис. 1. Вимірювальний модуль

Із досліджуваного феромагнітного матеріалу формується тестовий зразок у формі плоского кільця. Визначаються геометричні розміри кільця: R_1, R_2 – внутрішній та зовнішній радіуси кільця; h – напівтовщина кільця. Геометричні розміри кільцевого дослідного зразка повинні знаходитися у співвідношеннях:

$$\frac{R_2}{R_1} < 1,5, \quad \frac{h}{R_2} < 0,1$$

Кільцевий зразок із досліджуваного матеріалу (позиція 1 на рис.1) розміщують в пластиковій обоймі (позиція 2 на рис. 1), що складається з двох частин. В конструкції реалізована вимога: відсутність механічного контакту досліджуваного зразка з зовнішнім середовищем (стінками обойми). Для цього в середині кожної з двох частин обойми виготовляються точкові опори, на яких "підвішується" досліджуваний кільцевий зразок. На пластикову обойму навивається намагнічуюча котушка (позиція 3 на рис.1).

Таким чином сукупність трьох елементів: кільцевий зразок із досліджуваного феромагнітного матеріалу, пластикова обойма та намагнічуюча котушка складають вимірювальний модуль, який у ланцюгу змінного струму проявляє властивості індуктивності. Визначається вага дослідного зразка m і проводиться розрахунок щільності феромагнітного матеріалу ρ_0 по формулі:

$$\rho_0 = \frac{m}{2\pi h(R_2^2 - R_1^2)}, \text{ кг/м}^3$$

Для проведення досліджень створюється дослідна установка, блок-схема якої приведена на рис. 2.

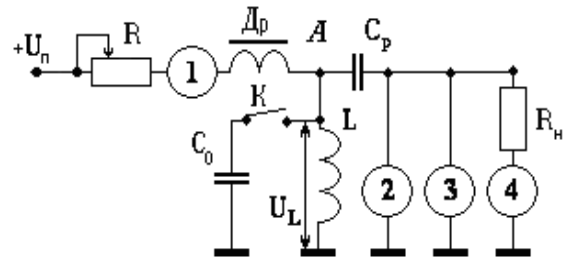


Рис. 2. Блок-схема дослідної установки для вимірювання квазістатичної індуктивності L_0 та частот магнітомеханічного резонансу та антирезонансу: 1 – міліамперметр; 2 – електронний частотомір; 3 – електронний вольтметр; 4 – генератор синусоїдального сигналу

Порядок проведення дослідів. Вимірювальний модуль (символ L) включається в точку А експериментальної схеми. Змінним резистором R встановлюється значення постійного струму I_0 , який визначає рівень окружної компоненти H_ϑ^0 вектора напруженості постійного поля намагнічування. Струм контролюється міліамперметром 1. Магнітострикційні константи та магнітні проникності визначаються для того рівня напруженості магнітного поля, який був створений в дослідному зразку під час експерименту. Навантажувальний резистор R_n – запобігає шунтуванню вимірювального модуля по постійному струму малим вихідним опором генератора синусоїдального сигналу 4. При замиканні ключа (символ K) до

вимірювального модуля (символ L) підключається конденсатор (символ C_0 на рис. 2). Рекомендується використовувати неелектролітичні конденсатори з малими втратами. Значення вимірювального конденсатора розраховується так, щоб резонансна частота паралельного коливального контура LC_0 знаходилась в діапазоні до 10 кГц. При фіксованому значенні амплітуди вихідного сигналу U_0 (в даному досліді на рівні, що не перевищує 1 В) змінюють частоту ω вихідного сигналу генератора. При проходженні точки на якій вольтметр показує максимальне значення напруги та фіксують відповідну частоту f_0 , що показує частотомір. По вимірюваному значенню f_0 обчислюють значення квазістатичної індуктивності вимірювального модуля L_0 за формулою:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}$$

Після вимірювання значення частоти f_0 квазістатичної індуктивності L_0 вимірювального модуля ключ K розмикається. Змінюючи частоту вихідного сигналу генератора в досліджуваному діапазоні частот (при незмінному значенні напруги, що не перевищує 1 В) отримують залежність зміни падіння напруги U_L на вимірювальному модулі. Дросель $\Delta\delta 1$ запобігає шунтуванню вимірювального модуля по постійному струму. Змінюючи частоту сигналу ω в досліджуваному діапазоні частот, визначають точки різкого росту індуктивності вимірювального модуля (спостерігається магнітомеханічний резонанс). Їх називаються частотами магнітомеханічного резонансу f_P . При проходженні частот, що супроводжується різким зменшенням індуктивного опору вимірювального модуля (зменшується індуктивність), фіксують показання частотоміра. Точки магнітомеханічного антирезонансу позначаються відповідно f_a . В

результаті проведення дослідів отримуємо типова функціональна залежність, загальний вид якої представлений на рис. 3.

Для аналітичної частини вхідними являються дані отримані в результаті проведення дослідної частини: f_{p1} , f_{p2} – частоти перших двох магнітомеханічних резонансів; f_{a1} – частота першого магнітомеханічного антирезонансу. Щільність феромагнітного матеріалу ρ_0 . По частоті магнітомеханічного резонансу вимірювального модуля розраховується значення квазістатичної індуктивності L_0 :

$$L_0 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_0} \text{ Гн,}$$

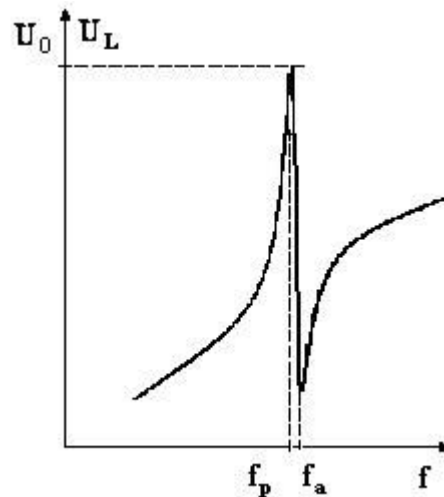


Рис. 3. Типова функціональна залежність зміни напруги на виході вимірювального модуля в досліджуваному діапазоні частот

Математична модель стану вимірювального модуля

Аналітичною мірою енергії електромагнітного поля, що запасується електричним контуром вимірювального модуля, являється коефіцієнт самоіндукції або індуктивність контура [11]. Середнє значення за період електричного струму енергія електромагнітного поля визначається по формулі:

$$W_{em} = \frac{1}{2} L (I^*)^2 \quad (17)$$

З іншого боку

$$W_{em} = \frac{1}{2} \int_V \vec{B}^* \vec{H}^* dV \quad (18)$$

де V та dV елементи об'єму досліджуваного зразка; \vec{B}^* та \vec{H}^* – амплітудні значення векторів магнітної індукції та напруженості магнітного поля, що змінюються у відповідності із гармонічним законом в об'ємі кільцевого сердечника вимірювального модуля. Прирівнюючи праві частини рівнянь (17) і (18), з урахуванням того, що вектор напруженості змінного магнітного поля повністю визначається окружною компонентою H_{ϑ}^* , отримуємо загальний вираз для розрахунку індуктивності вимірювального модуля:

$$L = \frac{1}{(I)^2} \int_V \vec{B}_s^* \vec{H}_{\vartheta}^* dV \quad (19)$$

В області низьких частот, коли в сердечнику реалізується однорідний напружено-деформований стан, результуючі механічні напруги $\sigma_{nm}^* \equiv 0 \forall \xi_k \in V$ (ξ_k – координати точки в криволінійній системі координат). При цьому рівняння стану (6) набуває наступного виду:

$$B_s^* = \mu_{sl}^{\sigma} H_l^* \quad (20)$$

Із загального співвідношення (20) випливає: $B_{\vartheta}^* = \mu_2^{\sigma} H_{\vartheta}^*$. Враховуючи, що $H_{\vartheta}^* = NI^* / (2\pi R_{\text{ср}})$, де $R_{\text{ср}} = (R_1 + R_2) / 2$. З виразу (19) отримуємо формулу для розрахунку індуктивності вимірювального модуля в області низьких частот (в експерименті – вимірювана квазістатична індуктивність L_0).

$$L = L_0 = \mu_2^{\sigma} \frac{2N^2 h (R_2 - R_1)}{\pi (R_2 + R_1)} \quad (21)$$

В результаті сумісної дії двох складових: постійного поля підмагнічування, вектор напруженості якого має один окружний компонент $H_{\vartheta}^0 = NI_0 / (2\pi R_{\text{ср}})$ та змінного магнітного поля $H_{\vartheta}^* = NI^* / (2\pi R_{\text{ср}})$ в об'ємі плоского кільця розвиваються осесиметричні пружні коливання. Якщо розміри кільця задовольняють нерівності $h/R_1 \ll 1$, то масштаб просторової неоднорідності напружено-деформованого стану (довжина хвилі) іс-

точно перевищує товщину кільця. У цьому випадку можна вважати, що в об'ємі кільця виникає узагальнений плоский напружений стан [6]. При цьому матриці напруги і деформацій будуть визначатися таким чином:

$$\begin{aligned} \|\sigma_{ij}\| &= \begin{vmatrix} \sigma_{\rho\rho} & \sigma_{\rho\vartheta} & 0 \\ \sigma_{\vartheta} & \sigma_{\vartheta\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \|\varepsilon_{nm}\| &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{\rho\rho} & \varepsilon_{\rho\vartheta} & 0 \\ \varepsilon_{\vartheta\rho} & \varepsilon_{\vartheta\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Враховуючи, що задача має осьову симетрію, в матриці (22) відповідні компоненти прирівнюються нулю $\sigma_{\rho\vartheta} = \sigma_{\vartheta\rho}$ і $\varepsilon_{\rho\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta\rho}$. У такому випадку визначення напружено-деформованого стану кільця вектор переміщення матеріальних частинок від положення рівноваги має усього лише один відмінний від нуля радіальний компонент u_{ρ} , при цьому компоненти тензора деформації $\varepsilon_{\rho\rho} \equiv \varepsilon_{\rho} = du_{\rho} / d\rho$ і $\varepsilon_{\vartheta\vartheta} \equiv \varepsilon_{\vartheta} = u_{\rho} / \rho$.

Нормальні напруги σ_{ρ} , σ_{ϑ} і σ_z визначаються з рівняння стану (1) таким чином:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= c_{11}^H \varepsilon_{\rho} + c_{12}^H \varepsilon_{\vartheta} + c_{13}^H \varepsilon_z - m_{21} H_{\vartheta}^0 H_{\vartheta}^* \\ \sigma_{\vartheta} &= c_{21}^H \varepsilon_{\rho} + c_{22}^H \varepsilon_{\vartheta} + c_{23}^H \varepsilon_z - m_{22} H_{\vartheta}^0 H_{\vartheta}^* \end{aligned} \quad (23)$$

$\sigma_z = c_{31}^H \varepsilon_{\rho} + c_{32}^H \varepsilon_{\vartheta} + c_{33}^H \varepsilon_z - m_{23} H_{\vartheta}^0 H_{\vartheta}^*$, де компоненти тензорів записані з використанням індексів Фойгта. Полікристалічний феромагнетик у розмагніченому стані являється ізотропним по пружним і магнітострикційним властивостям, тобто величини c_{ijkl}^H і m_{pqij} визначаються співвідношеннями (3) і (4), тому справедливі співвідношення між матеріальними константами:

$$\begin{aligned} c_{11}^H = c_{22}^H = c_{33}^H = \lambda + 2G, \quad c_{11}^H = c_{12}^H = c_{23}^H = \lambda, \\ m_{21} = m_{23} = m_2, \end{aligned}$$

$m_{22} = m_1$. Компонент тензора деформації ε_z визначають з умови $\sigma_z = 0$ таким чином:

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_\rho + \varepsilon_\vartheta) + \frac{m_2}{\lambda + 2G}H_\vartheta^0 H_\vartheta^* \quad (24)$$

З рівняння стану (2) слідує:

$$B_\vartheta^* = m_2 H_\vartheta^0 \varepsilon_\rho + m_1 H_\vartheta^0 \varepsilon_\vartheta + m_2 H^0 \varepsilon_z + \mu_2^\varepsilon H_\vartheta^* \quad (25)$$

Підставляючи у співвідношення (25) визначені компоненти тензора деформації, отримуємо результат:

$$B_\vartheta^* = \frac{NI_0}{2\pi R_{cp}} \left\{ m_2^* \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + m_1^* \frac{u_\rho}{\rho} \right\} + \mu_2^* \frac{NI^*}{2\pi R_{cp}} \quad (26)$$

$$L_1(\omega) = \frac{N^2 I_0 h}{\pi^* R_{cp}^2} \times m_2^* [R_2 u_\rho(R_2) - R_1 u_\rho(R_1)] + (m_1^* - m_2^*) \times \frac{N^2 I_0 h}{\pi^* R_{cp}^2} \int_{R_1}^{R_2} u_\rho(\rho) d\rho$$

Для завершення побудови математичної моделі вимірювального модуля, необхідно визначити функцію $u_\rho(\rho)$, тобто визначити радіальний компонент вектора переміщення матеріальних частинок в об'ємі кільцевого сердечника. Функція $u_\rho(\rho)$ повинна відповідати фундаментальним співвідношенням механіки деформованого твердого тіла. Цій вимозі відповідають побудовані на законах Ньютона рівняння руху елемента об'єму деформованого твердого тіла. У випадку, коли зовнішні впливи, що викликають деформації, змінюються в часі за законом $e^{j\omega t}$, рівняння руху називають рівняннями сталих коливань. Стосовно розглянутої ситуації, система рівнянь сталих коливань, записана в циліндричній системі координат [7], спрощується і зводиться до одного рівняння наступного виду:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\vartheta}{\rho} + \omega^2 \rho_0 u_\rho = 0 \quad (28)$$

де ρ_0 – щільність досліджуваного феромагнітного матеріалу.

Підставляючи у рівняння (28) визначення результуючих напруг σ_ρ і σ_ϑ з урахуванням співвідношень для розрахунку деформацій ε_ρ , ε_ϑ і ε_z , після прак-

де

$$m_2^* = m_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \right),$$

$$m_1^* = m_1 \left(1 - \frac{m_2 \lambda}{m_1 (\lambda + 2G)} \right),$$

$$\mu_2^* = \mu_2^\varepsilon \left(1 + \frac{(m_2 NI_0)^2}{4\pi^2 \mu_2^\varepsilon R_{cp}^2 (\lambda + 2G)} \right).$$

Підстановка співвідношення (26) у визначення індуктивності (19) дає наступний результат:

$$L = L_0^* + L_1(\omega) \quad (27)$$

$$L_0^* = \mu_2^* \frac{2N^2 h (R_2 - R_1)}{\pi (R_2 + R_1)}$$

де

точно очевидних алгебраїчних перетворень отримуємо стандартне рівняння Бесселя:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + [(\gamma \rho)^2 - 1] u_\rho = -\rho K \quad (29)$$

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2 \rho_0}{c_{11}^*}; \quad c_{11}^* = c_{11}^H - \frac{(c_{12}^H)^2}{c_{11}^H};$$

де

$$K = (m_1^* - m_2^*) \frac{N^2 I_0 I^*}{4\pi^2 c_{11}^* R_{cp}^2}$$

Рішення рівняння (29) виконується по стандартній процедурі методу варіації постійних [13] і записується таким чином:

$$u_\rho = [A + A(\rho)] J_1(\gamma \rho) + [B + B(\rho)] N_1(\gamma \rho) \quad (30)$$

де: $J_\nu(x)$ і $N_\nu(x)$ – функції Бесселя і функції Неймана порядку ν :

$$A(\rho) = \frac{\pi}{2\gamma} K [N_0(\gamma R_1) - N_0(\gamma \rho)]$$

$$B(\rho) = -\frac{\pi}{2\gamma} K [J_0(\gamma R_1) - J_0(\gamma \rho)]$$

Константи A і B у співвідношенні (30) знаходять із граничних умов.

Враховуючи те, що кільце з досліджуваного феромагнітного матеріалу торкається обійми лише в декількох місцях, а вся інша поверхня вільна від механічних контактів з матеріальними тілами. Тому, на поверхні S кільцевого зразка у відпо-

відності з третім законом Ньютона повинні виконуватися умови: $\sigma_{kj}n_k = 0 \forall \xi_k \in S$, де n_k – k-й компонент вектора зовнішньої одиничної нормалі до поверхні S. На поверхнях $z = \pm h$ умови $\sigma_{zz} = \sigma_{z\rho} = \sigma_{z\vartheta} = 0$ виконуються автоматично, що слідує із визначення напружено-деформованого стану кільця. На бокових поверхнях (границях) кільця $\rho = R_1$ і $\rho = R_2$ по визначенню $\sigma_{\rho z} = \sigma_{\rho\vartheta} = 0$, а гранична умова:

$$\text{де } A(R, \xi) = b(R_2) - b(R_1) \{1 - (\xi - 1) \times (c_{11}^H / c_{11}^*) [J(R_1)b(R_2) - N(R_2)a(R_2)]\};$$

$$B(R, \xi) = a(R_2) - a(R_1) \{1 + (\xi - 1) \times (c_{11}^H / c_{11}^*) [J(R_2)b(R_2) - N(R_2)a(R_2)]\};$$

$$b(R_1) = (1 - k^2) \times N_0(\gamma R_1) - \frac{1 - k}{\gamma R_1} N_1(\gamma R_1);$$

$$i = 1, 2; k = c_{12}^H / c_{11}^H;$$

$$a(R_1) = (1 - k^2) \times J_0(\gamma R_1) - \frac{1 - k}{\gamma R_1} J_1(\gamma R_1);$$

$$J(R_2) = \frac{\pi}{2} [J_0(\gamma R_1) - J_0(\gamma R_2)];$$

$$N(R_2) = \frac{\pi}{2} [N_0(\gamma R_1) - N_0(\gamma R_2)];$$

$$\Delta_0 = a(R_1)b(R_2) - a(R_2)b(R_1);$$

$$\xi = \frac{m_2(1 - k)}{m_1(1 - \frac{m_2}{m_1}k)}.$$

$$F(\omega) = \frac{1}{(\gamma R_{cp})^2} \left\{ \left[\frac{A(R, \xi)}{\Delta_0} + \frac{\pi}{2} (\xi - 1) \frac{c_{11}^H}{c_{11}^*} \times N_0(\gamma R_1) \right] \times \right. \\ \left. \times \{ (\gamma R_2) J_1(\gamma R_2) - (\gamma R_1) J_1(\gamma R_1) - (\xi - 1) [J_0(\gamma R_2) - J_0(\gamma R_1)] \} + \right. \\ \left. + \left[\frac{B(R, \xi)}{\Delta_0} - \frac{\pi}{2} (\xi - 1) \frac{c_{11}^H}{c_{11}^*} \times J_0(\gamma R_1) \right] \cdot \{ (\gamma R_2) N_1(\gamma R_2) - (\gamma R_1) N_1(\gamma R_1) - (\xi - 1) [N_0(\gamma R_2) - N_0(\gamma R_1)] \} \right. \\ \left. - (\xi - 1)^2 \frac{c_{11}^H}{c_{11}^*} \ln(R_2/R_1) \right\}.$$

Вираз (32) описує енергоємність вимірювального модуля в широкому діапазоні частот і являється математичною моделлю фізичного стану вимірювального модуля. З формули (32) випливає, що на частотах, коли частотно-залежна величина Δ_0 набуває нульових значень, індуктивність L вимірювального модуля переходить в нескінченність.

$$\sigma_\rho = 0 \forall \rho = R_1, R_2, \tag{31}$$

виконується в результаті відповідного вибору констант А і В. Константи, що задовольняють умові (31) визначаються із виразів:

$$A = m_2^* \frac{N^2 I_0 I^*}{4\pi^2 \gamma R_{cp}^2 c_{11}^H} \cdot \frac{A(R, \xi)}{\Delta_0},$$

$$B = m_2^* \frac{N^2 I_0 I^*}{4\pi^2 \gamma R_{cp}^2 c_{11}^H} \cdot \frac{B(R, \xi)}{\Delta_0},$$

Підстановка загального рішення (30) у визначення індуктивності L вимірювального модуля (27) приводить до наступного результату:

$$L = L_0^* \left\{ 1 + K_m^2 \left[1 + (1 - k^2) \frac{R_2 + R_1}{2(R_2 - R_1)} F(\omega) \right] \right\}, \tag{32}$$

$$\text{де } L_0^* = \mu_2^\varepsilon \frac{N^2 h}{\pi} \times 2(R_2 - R_1) / (R_2 + R_1);$$

$$K_m^2 = \frac{1}{c_{11}^H \mu_2^\varepsilon} (m_2 N I_0 / 2\pi R_{cp})^2;$$

У табл. 1 приведені два перші корені рівняння $\Delta_0 = 0$, де $x = \gamma R_1$. Числові значення коренів визначалися при фіксованому відношенні радіусів $R_2 / R_1 = 1,5$ експериментального зразка на якому проводилась апробація розглядуваного експериментального способу визначення фі-

зико-механічних констант магніострикційних матеріалів.

Таблиця 1.

	x_1	x_2	r_{12}
0,300	0,548128	1,923282	3,508819
0,305	0,547685	1,922326	3,509912
0,310	0,547226	1,921367	3,511103
0,315	0,546750	1,920407	3,512404
0,320	0,546256	1,919444	3,513818
0,325	0,545745	1,918479	3,515340
0,330	0,545216	1,917511	3,516975
0,335	0,544670	1,916542	3,518721
0,340	0,544106	1,915571	3,520584
0,345	0,543523	1,914598	3,522570
0,350	0,542923	1,913622	3,524666
0,355	0,542304	1,911665	3,529226
0,360	0,541667	1,911665	3,529226
0,365	0,541011	1,910683	3,531690
0,370	0,540337	1,909700	3,534276
0,375	0,539643	1,908714	3,536994
0,380	0,538930	1,907726	3,539840
0,385	0,538198	1,906737	3,542817
0,390	0,537447	1,905745	3,545922
0,395	0,536675	1,904752	3,549172
0,400	0,535884	1,903752	3,552545

Варійованим параметром є коефіцієнт Пуассона $\nu = \lambda / [2(\lambda - G)]$, що зв'язаний з параметром k відношенням $k = \nu / (1 - \nu)$. Періодичне зростання енергоємності вимірювального модуля, що виражається у збільшенні індуктивності, можна прокоментувати таким чином. У процесі деформування зразка домени змінюють свою орієнтацію. Створюване ними внутрішнє магнітне поле в деяких ситуаціях доповнює і підсилює поле зовнішнього джерела. Це приводить до збільшення амплітуд зміщень матеріальних часток деформованого зразка від положення рівноваги і до зростання рівня внутрішнього поля. Зростання інтенсивності внутрішнього поля ініціює подальше збільшення амплітуд зміщень і виникає резонансне поглинання енергії джерела зовнішнього поля. При цьому енергія джерела зовнішнього поля практично цілком перекачується в об'єм деформованого зразка. На деяких інших частотах розподіл деформацій по об'єму кільця стає та-

ким, що внутрішнє поле спрямоване зустрічно магнітному полю зовнішнього джерела і частково компенсує його. При цьому енергоємність дослідного зразка зменшується, що виявляється у зменшенні його індуктивності L . Це явище називається магнітомеханічним антирезонансом. Частоти резонансної зміни енергоємності (частоти магнітомеханічних резонансів та антирезонансів) визначаються формою, розмірами і набором матеріальних параметрів дослідного зразка. Тому, вимірявши значення цих частот можна розрахунковим шляхом отримати числові значення фізико-механічних параметрів матеріалу дослідного зразка.

Методика аналітичної обробки результатів

Вхідними для аналітичної частини способу експериментального визначення фізико-механічних параметрів полікристалічних феромагнітних (магніострикційних) матеріалів є значення величин:

- число витків обмотки N ;

- сила постійного струму I_0 (А);
- геометричні параметри зразка;
- половина висоти кільцевого сердечника h (м);
- внутрішній радіус кільця R_1 (м);
- зовнішній радіус кільця R_2 (м);
- маса кільцевого сердечника m (кг);
- квазістатична індуктивність L_0 (Гн);
- частота першого магнітомеханічного резонансу f_{p1} (Гц);
- частота другого магнітомеханічного резонансу f_{p2} (Гц);
- частота першого магнітомеханічного антирезонансу f_{a1} (Гц).

Обробка вхідних величин виконується в такому порядку.

Визначається щільність феромагнетика

$$\rho_0 = \frac{m}{2\pi h(R_2^2 - R_1^2)}, \text{ кг/м}^3.$$

Визначається відношення частот магнітомеханічних резонансів

$$r_{21} = f_{p2}/f_{p1}.$$

По розрахованому параметру r_{21} із таблиці 1 визначається коефіцієнт Пуассона ν полікристалічного феромагнетика та числове значення безрозмірної частоти x_1 першого магнітомеханічного резонансу.

По знайденому значенню x_1 та по вимірній частоті першого магнітоме-

$$F(\omega) = \frac{1}{(\gamma R_{cp})^2} \left\{ \left[\frac{A(R, \xi)}{\Delta_0} + \frac{\pi}{2} (\xi - 1) \frac{c_{11}^H}{c_{11}^*} \times N_0(\gamma R_1) \right] \times \right. \\ \times \{ (\gamma R_2) J_1(\gamma R_2) - (\gamma R_1) J_1(\gamma R_1) - (\xi - 1) [J_0(\gamma R_2) - J_0(\gamma R_1)] \} + \\ \left. + \left[\frac{B(R, \xi)}{\Delta_0} - \frac{\pi}{2} (\xi - 1) \frac{c_{11}^H}{c_{11}^*} \times J_0(\gamma R_1) \right] \cdot \{ (\gamma R_2) N_1(\gamma R_2) - (\gamma R_1) N_1(\gamma R_1) - (\xi - 1) [N_0(\gamma R_2) - N_0(\gamma R_1)] \} \right. \\ \left. - (\xi - 1)^2 \frac{c_{11}^H}{c_{11}^*} \ln(R_2/R_1) \right\}.$$

$$A(R, \xi) = b(R_2) - b(R_1) \{ 1 - (\xi - 1) \times (c_{11}^H/c_{11}^*) [J(R_1)b(R_2) - N(R_2)a(R_2)] \};$$

нічного резонансу f_{p1} визначається приведений модуль пружності:

$$c_{11}^* = \rho_0 \frac{4\pi^2 f_{p1}^2 R_1^2}{x_1^2}, \text{ Па.}$$

Знайдене значення коефіцієнта Пуассона ν використовується для розрахунку допоміжного параметра k :

$$k = \nu/(1 - \nu).$$

Значення k і c_{11}^* використовуються для розрахунку модулів пружності розмагніченого полікристалічного феромагнетика:

$$c_{11}^H = \lambda + 2G = \frac{c_{11}^*}{1 - k^2}, \text{ Па,}$$

$$c_{12}^H = \lambda = kc_{11}^*, \text{ Па.}$$

По вимірних значеннях частот першого магнітомеханічного резонансу f_{p1} та антирезонансу f_a розраховується значення хвильового числа γ_a на частоті першого магнітомеханічного антирезонансу:

$$\gamma_a = \frac{x_1 f_a}{R_1 f_{p1}}, \text{ 1/метр.}$$

На ЕОМ знаходиться рішення трансцендентного рівняння:

$$\left. \frac{dF(\omega, \xi)}{d\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_a} = 0.$$

В результаті визначається допоміжний параметр ξ . Із всіх коренів рівняння відбирається той, що найменше відрізняється від значення -0,5. В рівнянні використовуються позначення:

$$\begin{aligned}
B(R, \xi) &= a(R_2) - a(R_1) \{1 + (\xi - 1) \times (c_{11}^H / c_{11}^*) [J(R_2)b(R_2) - N(R_2)a(R_2)]\}; \\
b(R_1) &= (1 - k^2) \times N_0(\mathcal{R}_1) - \frac{1 - k}{\mathcal{R}_1} N_1(\mathcal{R}_1); \\
i &= 1, 2; \quad k = c_{12}^H / c_{11}^H; \\
a(R_1) &= (1 - k^2) \times J_0(\mathcal{R}_1) - \frac{1 - k}{\mathcal{R}_1} J_1(\mathcal{R}_1); \\
J(R_2) &= \frac{\pi}{2} [J_0(\mathcal{R}_1) - J_0(\mathcal{R}_2)]; \\
N(R_2) &= \frac{\pi}{2} [N_0(\mathcal{R}_1) - N_0(\mathcal{R}_2)]; \\
\Delta_0 &= a(R_1)b(R_2) - a(R_2)b(R_1); \\
\xi &= \frac{m_2(1 - k)}{m_1(1 - \frac{m_2}{m_1}k)}.
\end{aligned}$$

По знайденому значенню допоміжного параметра ξ розраховується відношення магнітострикційних констант:

$$\zeta = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\xi}{1 - k + \xi k}.$$

Визначається числове значення коефіцієнта магніто механічного зв'язку

$$K_m = \sqrt{-\frac{1}{1 + (1 - k^2) \frac{R_2 + R_1}{2(R_2 - R_1)}} F(\omega, \xi)}_{\gamma = \gamma_a}.$$

По значенню коефіцієнта магніто механічного зв'язку знаходиться значення відношення матеріальних констант ζ_0

$$\zeta_0 = \frac{m_2^2}{\mu_2^\varepsilon} = \left[\frac{\pi K_m (R_2 + R_1)}{N I_0} \right]^2 c_{11}^H, \text{ Гн/м.}$$

По знайденим модулям пружності розраховуються значення елементів матриці пружних податливостей розмагніченого полікристалічного феромагнетика:

$$\begin{aligned}
s_{11}^H &= s_{22}^H = s_{33}^H = \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \text{ м}^2/\text{Н}; \\
s_{12}^H &= s_{13}^H = s_{21}^H = s_{23}^H = s_{31}^H = s_{32}^H = \\
&= -\frac{\lambda}{2G(3\lambda + 2G)} \text{ м}^2/\text{Н}.
\end{aligned}$$

По знайденим значенням матеріальних констант ζ та ζ_0 розраховується відношення магнітних проникностей:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{\mu_2^\sigma}{\mu_2^\varepsilon} = \\
&= 1 + K_m^2 c_{11}^H \left[s_{11}^H \left(2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) + s_{12}^H \left(2 + \frac{4}{\zeta} \right) \right].
\end{aligned}$$

По вимірюваному значенню квазістатичної індуктивності L_0 розраховується магнітна проникність феромагнетика в режимі постійних механічних напруг (магнітна проникність вільного кільця):

$$\mu_2^\sigma = \frac{L_0 \pi (R_1 + R_2)}{2N^2 h (R_2 - R_1)}, \text{ Гн/м.}$$

По знайдений магнітній проникності вільного кільця та відомому параметру ξ_0 розраховується магнітна проникність феромагнетика в режимі постійності деформацій:

$$\mu_2^\varepsilon = \frac{\mu_2^\sigma}{\xi_0}, \text{ Гн/м.}$$

По отриманій магнітній проникності μ_2^σ отримується магнітострикційна константа m_2 :

$$m_2 = -\frac{\pi K_m (R_2 + R_1)}{N I_0} \sqrt{c_{11}^H \mu_2^\varepsilon}, \text{ Гн/м.}$$

По відомому значенню магнітострикційної константи m_2 та допоміжному параметру ζ розраховується магнітострикційна константа m_1 :

$$m_1 = \frac{m_2}{\zeta}, \text{ Гн/м.}$$

Таким чином, отримані константи завершують аналітичну частину розглянутого методу визначення фізико-механічних параметрів полікристалічних феромагнітних матеріалів.

Висновки

Побудовано математичну модель стану вимірювального модуля, що адек-

ватно відображає: радіальні коливання матеріальних частинок дослідного торіодального зразка та описує його напружено-деформований стан.

Представлена блок-схема експериментальної установки та структура вимірювального модуля.

Побудована методика вимірювання квазістатичної індуктивності на низьких частотах, частот перших двох магніто-механічних резонансів і частоти першого магніто-механічного антирезонансу та подальшим визначенням основних фізико-механічних параметрів полікристалічних феромагнітних (магнітострикційних) матеріалів: два компоненти тензора модулів пружності, один компонент тензора магнітної проникності та два компоненти тензора магнітострикційних констант.

Список літератури

1. *Вонсовский С.В.* Ферромагнетизм. – М.: Гостехиздат, 1948. – 816 с.
2. *Власов К.Б.* Некоторые вопросы теории упругих ферромагнитных (магнитострикционных) сред // Изв. АН СССР. Сер. физическая. – 1957. – Т.21. – № 8. – С. 1140–1148.
3. *Власов К.Б.* Уравнение состояния поляризованной магнитоупругой среды // Физика металлов и металловедение. – 1956. – Т.3. – Вып. 3. – С. 551–553.
4. *Сыркин Л.Н.* Пьезомагнитная керамика // 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1980. – 208 с.
5. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах / Пер. с польского В.А. Шачнева, Г.С. Шапиро. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
6. *Новацкий В.* Теория упругости – М.: Мир, 1975. – 872 с.
7. *Кикучи Е.* Ультразвуковые преобразователи. – М.: Мир, 1972. – 424 с.
8. *Короткина М.Р.* Электромагнитоупругость. – М.: МГУ, 1988. – 302 с.
9. *Петрищев О.Н., Шпинь А.П.* Ультразвуковые магнитострикционные волноводные системы. – К.: Изд-во при Киевском ун-те, 1989. – 132 с.
10. *Петрищев О.Н.* Магнитные волны в поляризованных поликристалличе-

ских магнитострикционных материалах // Вестн. Киевского политехн. ин-та. Электроакустика и звукотехника. – 1990. – Вып. 14. – С. 23–35.

11. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 774 с.

12. *Racah G.* Determinazione del numero dei tensori isotropi independenti di rango n . – Rend. Acad. Linc., 1933. – P. 386–389.

13. *Еругин Н.П.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений – К.: Вища школа, 1974. – 472 с.

Подано до редакції 30.06.2010