УДК 004.519.2

Мінаєва Ю. І.

ВИБІР ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ НА ПІДСТАВІ МЕТОДІВ І МОДЕЛЕЙ НЕЧІТКОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ТЕНЗОРНОМУ БАЗИСІ

Київський національний університет будівництва і архітектури

Розглянуто питання розв’язку задач нечіткого лінійного програмування шляхом представлення параметрів нечіткої моделі тензорами 2-го рангу. Показано можливість розв΄язку вказаного класу задач на рівні множини чітких задач лінійного програмування, сформованих для 1-го інваріанта та норм тензорів, що моделюють нечіткі параметри

Вступ

Г.Марковіц у роботі [1] розглянув задачу оптимізації фондового портфеля в координатах “прибутковість-ризик”. Якщо портфель моделюється багатомірною випадковою величиною очікуваної прибутковості його активів, то можна виділити параметри середньої прибутковості, розрахункового відхилення від середнього (ризик) і побудувати кореляційну матрицю стохастичного взаємного зв'язку активів портфеля. Тоді задача оптимізації фондового портфеля розглядається в двох аспектах:

а) задача максимізації прибутковості портфеля при фіксованому рівні його ризику;

б) задача мінімізації ризику портфеля при фіксованій необхідній середній прибутковості портфеля.

Згідно з моделлю Марковіца формування портфелю цінних паперів (ПЦП) серед характеристик цінних паперів (ЦП) виділяють такі: портфель містить N типів ЦП, що характеризуються параметрами:

– початковою ціною W_{i0} одного паперу перед його доданням у портфель;

– числом паперів n_i у портфелі;

– початковими інвестиціями S_{i0} в даний портфельний сегмент;

– середньоочікуваною прибутковістю паперу r_i;

– стандартним відхиленням σ_i від значення r_i.

Портфель цінних паперів характеризується:

– сумарним обсягом портфельних інвестицій S;

– частковим ціновим розподілом паперів у портфелі $\{x_i\}$, причому для вихідного портфеля виконується

$$x_i = \frac{S_{i0}}{S}, \sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ i = 1, N \qquad (1)$$

– кореляційною матрицею $\{\rho ij\}$, коефіцієнти якої характеризують зв'язок між прибутковостями i-ого і j-ого паперів. Якщо ρ_{ij}=-1, це означає повну негативну кореляцію, якщо ρ_{ij}=1 – повна позитивна кореляція.

За [1] ПЦП описаний системою статистично пов'язаних випадкових величин з нормальними законами розподілу. Тоді, відповідно до теорії випадкових величин, очікувана прибутковість портфеля r знаходиться за формулою

$$r = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i ,$$

стандартне відхилення портфеля σ –

$$\sigma = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)^{1/2}$$

Задача керування таким портфелем описується наступним чином: знайти такий вектор $x = \{x_i\}_{i=1}^{N}$, що максимізує цільову функцію r при заданому обмеженні на рівень ризику σ :

$$\begin{cases} r \to \max \\ \sigma = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)^{1/2} \\ \sigma = \text{const} \le \sigma_M \\ \sum_{i=1}^{N} x_1 = 1 \end{cases}$$

де σ_M – ризик паперу з максимальною середньо очікуваною прибутковістю.

Сучасні дослідження [2] показали обмеження застосування методології [1] в її чистому вигляді, однак нечіткомножинний підхід у розв'язанні оптимізаційної задачі Марковіца не тільки має право на існування, але в ряді випадків є найбільш прийнятним. Наприклад, консолідований портфель пенсійних накопичень повинен бути дворівневим. У першу чергу, це повинен бути індексний портфель на дозволених активах, у якому оптимізовані пропорції модельних класів (індексних активів). Оптимізацію такого портфеля доцільно робити методом Марковіца в нечіткій постановці задачі.

Задачі вибору оптимального портфеля за Марковіцем в нечітко-множинній постановці зводяться, як правило, до задач математичного програмування [3], що, у свою чергу, може класифікуватися на три категорії в залежності від типу невизначеності [4] :

- нечітке математичне програмування з неясністю;
- нечітке математичне програмування з неоднозначністю;
- нечітке математичне програмування з неясністю і неоднозначністю.

Зазначивши недостатню коректність наведених визначень, звернемо увагу на таке. Нечітке математичне програмування в першій категорії спочатку розглянуто в роботах [5-7]. Як розв'язок проблеми прийняття рішень з нечіткими цілями і обмеженнями.

Друга категорія в нечіткому математичному програмуванні має справу з неоднозначними коефіцієнтами цільової функції й обмеженнями цілісності, але не стосується нечітких цілей і обмежень. У роботі [8] введені чотири індекси нерівності між нечіткими числами [9], що базується на теорії можливостей [10]. Задача вибору оптимального портфеля переведена в проблему математичного програмування з нечіткими коефіцієнтами. Оскільки нечіткі коефіцієнти можуть бути визначені як розподіли можливості у величині коефіцієнта, цей тип задачі нечіткого математичного програмування зазвичай називається можливісним програмуванням.

Останній тип задачі нечіткого математичного програмування має справу з неоднозначними коефіцієнтами, а також невизначеною перевагою ухвалення розв'язку. у роботі [11] було сформульовано тип задачі нечіткого лінійного програмування. В цій моделі невизначене формування розв'язку переваги представлено нечіткою областю можливих значень і потрібно, щоб нечітка функціональна величина включалася в дану нечітку область досяжних значень.

На відміну від гнучкого програмування, цей тип задач нечіткого математичного програмування був названий робосним програмуванням. У роботі [12] сформульована загальна задача математичного програмування з нечіткими коефіцієнтами, що базується на методі розв'язку [13] з нечітким відношенням переваги.

Основні типи і моделі розв'язку нечітких задач математичного (лінійного) програмування

Вихідна задача лінійного програмування (ЗЛП) [14] приймається у вигляді

$$\max \tilde{c}_1 x_1 + \cdots + \tilde{c}_n x_n , \tag{5}$$

при обмеженнях

$$\tilde{a}_{i1} x_1 + \cdots + \tilde{a}_{in} x_n \ \tilde{\leq} \ \tilde{b}_i , i = 1, \cdots, m ,$$ де

$$\tilde{c}_j = \{c_j^{(k)}/\mu_{c_j}\}, \mu_{c_j} \to [0,1] \tilde{a}_{ij} = \{a_{ij}^{(k)}/\mu_{a_{ij}}\}, \mu_{a_{ij}} \to [0,1], j = 1, \cdots, n$$

Розв′язок проблеми нечіткого лінійного програмування (НЛП - *FLP*) розглядають як схеми множинного нечіткого виведення (висновку), де антецеденти схеми відповідають обмеженням цілісності НЛП проблеми і факт висновку (схеми) проінтерпретований як цільова функція НЛП проблеми. Потім процес розв'язку складається з двох кроків:

Для кожної змінної розв'язку $x \in R^n$ обчислюють величину цільової функції - MAX(x) через *sup-min* згортку антецедент-обмеження цілісності і факт-ціль. Визначається оптимальний розв'язок НЛП проблеми – будь-яка точка, що робить максимальним елемент набору $\{MAX(x) \mid x \in R^n\}$ (в контексті даного відношення нерівності).

Інтерпретація НЛП проблеми як схеми множинного нечіткого виведення у формі [7,8]:

Антецедент$_1$ Обмеження$_1$

$$(x) = \tilde{a}_{11}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n \quad \le \tilde{b}_1;$$

$$\vdots$$

Антецедент$_m$ Обмеження$_m$

$$(x) = \tilde{a}_{m1}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{mn}x_n \quad \le \tilde{b}_m;$$

Факт

Мета(x):= $\tilde{c}_1x_1 + \cdots + \tilde{c}_nx_n$

Наслідок MAX(x),

де $x \in R^n$, наслідок (величина цільової функції в системі обмежень у x) MAX(x) обчислена як

$$MAX(x) = \text{Мета}(x) \circ \bigcap_{i=1}^{n} \text{Обмеження}_i(x),$$

тобто

$$\mu_{MAX(x)}(v) = \sup \min\{\mu_{\text{Мета}(x)}(u),$$
$$\mu_{\text{Обмеження}_1(x)}(u,w), \cdots, \mu_{\text{Обмеження}_m(x)}(u,v)\}.$$

Оптимальна величина цільової функції проблеми НЛП, що позначається M, визначається як

$$M:=\sup\{MAX(x) \mid x \in Rn\},$$

де *sup* слід розуміти у контексті даного чіткого відношення нерівності для цільової функції. Нарешті, розв'язок $x^* \in R^n$ у проблемі НЛП отримано шляхом розв'язання рівняння

$$MAX(X)=M,$$

Доведено, що множина рішень проблеми НЛП не є порожньою, множина максимізації елементів $\{MAX(x) \mid x \in R^n\}$ також не є порожньою.

Окрему групу задач НЛП (ЗНЛП) складають т.зв. задачі повного нечіткого лінійного програмування (ПНЛП - FFLP) [15], один із прикладів якої наведено нижче:

$$\min \ \tilde{z} = \tilde{c}_1 \otimes \tilde{x}_1 + \cdots + \tilde{c}_n \otimes \tilde{x}_n$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11} \otimes \tilde{x}_1 \oplus \cdots + \tilde{a}_{n1} \otimes \tilde{x}_n \succeq \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{m1} \otimes \tilde{x}_1 \oplus \cdots + \tilde{a}_{mn} \otimes \tilde{x}_n \succeq \tilde{b}_m \\ \tilde{x}_1 \succeq 0, \tilde{x}_2 \succeq 0, \cdots, \tilde{x}_n \succeq 0 \end{cases}$$

чи в матричній формі

$$\min \ \tilde{z} = \tilde{c} \ \otimes \tilde{x}$$

при обмеженнях

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} \succeq \tilde{b},$$
$$\tilde{x} \succeq 0$$

де відношення $\succeq$ визначене у вигляді: $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$, якщо і тільки якщо $D(A) \ge D(B)$, де $D: F(\Re) \to \Re$ - функція ранжування; $\otimes$ - знак скалярного добутку нечітких змінних (НЗ) або нечітких чисел (НЧ)

$$\lambda \otimes \tilde{A} = \lambda \otimes (a, \alpha, \beta)_{LR} = \begin{cases} (\lambda a, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR}, \lambda > 0 \\ (\lambda a, -\lambda\alpha, -\lambda\beta)_{LR}, \lambda < 0 \end{cases}$$

де нижній індекс *LR* означає стандартну (*L*-*R*) – функцію належності (ФН), яка задається трійкою параметрів $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)$, де a-мода, α, β - правий та лівий коефіцієнти нечіткості відповідно.

Загальний підхід у розв'язку цього типу задач полягає в тому, що для стандартної (найпростішої) ФН формується множина чітких задач, на підставі розв′язків останніх формується розв'язок початкової нечіткої задачі лінійного програмування (НЗЛП). Наприклад, матриця коефіцієнтів $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m*n}$, $1 \le i, j \le n$ - $m \times n$-нечітка матриця, де

$$(\forall i, j) \ \tilde{a}_{ij} \succ 0 \ \text{or} \ \tilde{a}_{ij} \prec 0 \ \text{and} \ \tilde{x}_i, \tilde{b}_j \in F(\Re).$$

Якщо матриця A позначена як $\tilde{A} = (A, A', A'')$ при $A = [a_{ij}]_{m*n}$, $A' = [a_{ij}]_{m \cdot n}$, $A'' = [a''_{ij}]_{m \cdot n}$ $x = (x, x', x'')$, $b = (b, b', b'')$, одержуємо наступну задачу:

$$\min \ \tilde{z} = (c, c', c'',) \otimes (x, x', x'')$$

при обмеженнях

$$(A, A', A'') \otimes (x, x', x'') \succeq (b, b', b''),$$
$$(x, x', x'') \succeq 0.$$

Для трикутної нечіткої змінної оцінювальна функція має вигляд $D(\tilde{A}) = \bar{A} + \frac{1}{4}(A'' - A')$ і для трикутних НЗ $\tilde{A}$

та $\tilde{\mathrm{B}}$ маємо $\tilde{\mathrm{A}} \succeq \tilde{\mathrm{B}}$, якщо тільки $\overline{\mathrm{A}} + \frac{1}{4}(\mathrm{A}'' - \mathrm{A}') \geq \overline{\mathrm{A}} + \frac{1}{4}(\mathrm{B}'' - \mathrm{B}')$. З урахуванням введених передумов задача

$$\min \ (1,1,1) \otimes \tilde{x}_1 \oplus (2,2,2) \otimes \tilde{x}_2,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} (4,1,0) \otimes \tilde{\mathrm{x}}_1 \oplus (-3,2,1) \otimes \tilde{\mathrm{x}}_2 \succeq (2,1,2), \\ (-3,1,2) \otimes \tilde{\mathrm{x}}_1 \oplus (2,2,1) \otimes \tilde{\mathrm{x}}_2 \succeq (1,0,1), \\ \tilde{\mathrm{x}}_1 \succeq 0, \\ \tilde{\mathrm{x}}_2 \succeq 0 \end{cases}$$

трансформується в задачу

$$\min \ x_1 - 0.25x_1' + 0.25x_1'' + 2.25x_2 - 0.5x_2' + 0.5x_2''$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 3.75x_1 - 0.25x_1' + 0.25x_1'' - 3.25x_2 + 0.75x_2' - 0.75x_2'' \geq 2.25, \\ -2.75x_1 + 0.75x_1' - 0.75x_1'' + 2x_2 - 0.5x_2' + 0.5x'' \geq 1.25, \\ x_1 - 0.25x_1' + 0.25x_1'' \geq 0, \\ x_2 - 0.25x_2' + 0.25x_2'' \geq 0, \\ x_1 - x_1' \geq 0, \\ x_2 - x_2' \geq 0. \end{cases}$$

розв'язком якої є нечіткий вектор x=(x1, x2), x1 = =(8.25, 8.25, 0), x2 =(0, 0, 35.5). У роботах [17-19] наведені чисельні формування і розв′язку такого типу задач НЛП.

У загальному випадку наявна спроба нечіткого розширення методів розв'язання стандартних ЗЛП на нечіткі (природно, ніякої доказової бази при цьому не існує), розв'язок, здавалося б, загальної задачі стає настільки унікальним, обмеженим великою кількістю явних і схованих умов і умовностей, що отримати його за допомогою інших методів досить складно, а інколи практично нереально.

Показовим, у цьому відношенні є також те, що існування декількох абсолютно рівноправних методів дефадзифікації при рішенні нечіткої ЗЛП для дефадзифікованої задачі, дає також різні результати.

Тензор-змінні як аналоги нечітких змінних

У роботах [20, 21] показано, що представлення об'єкта дослідження (виміру) у вигляді тензора є більш адекватним, ніж представлення у вигляді величини. Тензорна модель, розглянута як матрична проекція, дозволяє аналізувати об'єкт у різних системах координат, тобто експертні оцінки об'єкта розглядаються як той самий об'єкт в різних системах координат Відповідність між цими системами координат, що характеризуються тензорами, може бути встановлена за допомогою т. зв. «тензора приєднання», що дозволяє погодити і зв'язати різні точки зору. Особливістю тензорної моделі об'єкта є те, що при зміні координат компоненти тензора змінюються, хоча властивості тензора залишаються інваріантними.

Властивості тензора, що залишаються незмінними при перетвореннях координат, визначаються системою його інваріантів, деякі з яких є коефіцієнтами характеристичного рівняння. Інваріанти - константи, значення яких зберігаються при зміні системи координат. Величини головних інваріантів можуть бути визначені через власні значення, число головних інваріантів для тензора рангу r визначається виразом r+1, у загальному випадку кількість незалежних інваріантів набагато більша. Вона визначається можливістю розкладання головного тензора на систему приєднаних тензорів: симетричний – кососиметричний, девіатор – ізотропний. Однією з важливих інваріантних характеристик тензора є його величина – магнітуда, яку можна обчислити на основі параметрів матриці тензора, також інваріантом може бути норма.

Відзначимо важливу обставину, якщо для представлення нечітких змінних використовують кілька моделей дефадзифікації, одержуючи при цьому, природно, різні значення, то для тензор-змінної існує єдина система інваріантів, що однозначно характеризує тензор.

Можна зазначити, що для задачі формування портфеля цінних паперів доцільно розглянути параметри даної задачі – прибутковість портфеля і ризик – як тензор-змінні. При даному підході є можливість перейти до чіткої постановки задачі навіть за неповної визначеності вхідних параметрів.

Представлення нечіткої змінної у вигляді тензора

Множина нечітких змінних (НЗ), розглянута як сукупність пар „значення-функція належності”, може бути структурована шляхом представлення НЗ у вигляді тензора. Діада природно відповідає представленню НЧ (НЗ) у формі „значення (1-й вектор)-ФН (2-й вектор)” $\tilde{x} = \{x/\mu^x\} = \{x_i/\mu_i^x\},\ i = 1,2,...,n$.; $\mu^x \rightarrow[0,1]$. Раціонально (хоча зовсім необов'язково) представляти НЗ у вигляді множини, що складається з 3^n, n=1,2,... компонент. В цьому випадку маємо діадний тензор, властивості якого добре досліджені. Головна перевага використання тензор-змінної як моделі невизначеності полягає у наступному:

- можливість представлення об'єкта у вигляді 3n чисел, n=1,2,... дозволяє на підставі принципу екстремальної ентропії визначити при необхідності ФН, що об'єктивно відтворює «значущість» елемента в складі об'єкта, у загальному випадку тензорне моделювання невизначеності не потребує обов′язкого використання ФН;

Тензор- змінна модель, створена запропонованим способом, відноситься до класу т.зв. діадних тензорів [22], з трьох незалежних інваріантів вона має тільки перший інваріант (слід), який не дорівнює нулю. У розглянутому випадку – трикутна ФН - слід – t=trace(T^x)=x_2

Припустимо, що НЗ задана у вигляді: $\tilde{x} = \{x/\mu^x\}$, $x = [x_1\ x_2\ x_3\ ]$, $\mu^x = [\mu_1^x\ \mu_2^x\ \ \mu_3^x]$.
Тензор-змінна (ТЗ) – аналог НЗ, може бути обчислена за такою схемою: НЗ $\rightarrow$ ТЗ, $\tilde{x} \rightarrow$Tx, Tx= x•μ^x, де • - знак тензорного добутку, або, використовуючи засоби пакету математичного моделювання (ПММ) МатЛаб шляхом реалізації функції

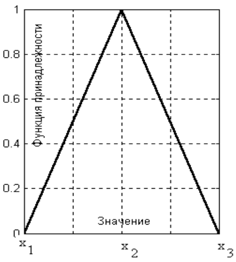
Tx =kron (x, $(\mu^x)^T$),

де верхній індекс Т – символ транспонування. Для наведеної НЗ маємо ТЗ у вигляді тензора 2-го рангу з матрицею

$$T^X = \begin{pmatrix} x_1 * \mu_1^x, x_2 * \mu_1^x, x_3 * \mu_1^x \\ x_1 * \mu_2^x, x_2 * \mu_2^x, x_3 * \mu_2^x \\ x_1 * \mu_3^x, x_2 * \mu_3^x, x_3 * \mu_3^x \end{pmatrix}$$

Раніше вказувалося, що пошук точних розв’язків неточно сформульованих задач відноситься до безперспективних проблем, тому розглянемо спрощену задачу, що досить повно характеризує проблему. Таке спрощення полягає в тому, що розглядають стандартну (для більшості задач прикладної математики) трикутну ФН: μ^x = [0 1 0], $x = [x_1\ x_2\ x_3\ ]$, x•μ^x дає

$$T^X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 * \mu_2^x, & x_2 * \mu_2^x, & x_3 * \mu_2^x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



а)

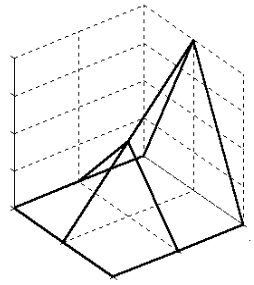

б)

Рис. 2. НЗ (а) та її тензорний аналог (б)

На рис. 2 показані НЗ з трикутною ФН та її тензорний аналог.

Нульовий інваріант – магнітуда визначається у вигляді

$$\|[A]\| = \sum \sqrt{[A]*[A]}\ .$$

В розглянутому випадку

$$\|[A]\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{m} \sum_{n=1}^{m} (A_{mn})^2}$$

Однією з розповсюджених форм представлення інваріантів є т.зв. «слідова» форма (30):

I=Tr T; II=tr(T^2); III=tr(T^3)

Через власні значення інваріанти можуть бути представлені у вигляді:I=λ_1+λ_2+ +λ_3, $II = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, III = \lambda_1^3 + \lambda_2^3\ + \lambda_3^3$.

Для інваріантів справедливі наступні співвідношення :

$$I_T = trT,\ II_T = \frac{1}{2}((tr(T)^2 - trT^2), III_T = detT\ ,$$

де оператор tr T=t_{ii} (подвійне “ii” символізує суму від 1 до 3). Для двох матриць $[A]^{N\times N}$ і $[B]^{N\times N}$ внутрішній (скалярний)[A]*[B]=tr([A][B]^T)=tr([A]^T [B]). Зазначимо, що слід квадратної матриці $[A]^{N\times N}$ визначений у вигляді tr[A]=$\sum_{k=1}^{N} A_{kk}$, має такі властивості: tr([A]$^{T)}$=tr[A], tr([A][B]) =tr([B][A]). добуток матриць [A]*[B] визначений у вигляді

$$[A]*[B]=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}A_{mn}B_{mn},$$

еквівалентний добуток слідів:tr([A][B])= =tr([B][A])

Додатково визначимо норми для матриць ТЗ:

– *n1 - 1* – норма: максимальна сума стовпчика;

– *norm(Tx,1)=max(sum(abs(Tx)))=x3*;

– *n2-Infiniti*-норма: максимальна сума рядка;

– *norm(Tx,inf)=max(sum(abs((Tx)T)))* *==x1+x2+ x3*.

Зазначимо головні особливості тензорної методології розв'язку задач НЛП – тензорне представлення невизначеності не передбачає обов'язкового використання ФН, зокрема, ТЗ може бути сформована на інтервалі $I_x=[x_1\ x_2\ x_3]$, де $x_1,\ x_2\ ,x_3$ - мінімальне, середнє та максимальне значення інтервалу:

$$I_x=[x_1\ x_2\ x_3]\rightarrow T_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\x_1&x_2&x_3\\0&0&0\end{pmatrix};$$

В даному випадку визначення ФН доцільне тільки з однієї точки зору – перехід від тензорної методології до звичної методології нечіткого аналізу – замість магнітуди доцільно використовувати норми, бо визначення магнітуди за виразом $\|[A]\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}(A_{mn})^2}$ дає одну з норм.

Тензорні аналоги задач нечіткого лінійного програмування

Нехай вихідна (чітка) ЗЛП має стандартний вид

$$\max\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ i=1,m;\ xj\ge 0.$$

Нечітка ЗЛП приймається у вигляді

$$\max\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j\tilde{x}_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j\le\tilde{b}_i,\ i=1,m;\ xj\ge 0.$$

Тензорне представлення НЗ за трикутної ФН

$$\tilde{x}_j\rightarrow{}^jT^x=\begin{pmatrix}0&0&0\\{}^jx_1&{}^jx_2&{}^jx_3\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde{c}_j\rightarrow{}^jT^c=\begin{pmatrix}0&0&0\\{}^jc_1&{}^jc_2&{}^jc_3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{a}_{ij}\rightarrow{}^{ij}T^a=\begin{pmatrix}0&0&0\\{}^{ij}a_1&{}^{ij}a_2&{}^{ij}a_3\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde{b}_i\rightarrow{}^iT^b=\begin{pmatrix}0&0&0\\{}^ib_1&{}^ib_2&{}^ib_3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Дя НЗ із трапецієподібною ФН $\tilde{x}=\{x/\mu^x\}$ (рис. 3) вектори $x=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]$, μx = [0 1 1 0] дають ТЗ у вигляді:

$$T^x=\begin{pmatrix}x_1\mu_1^x&x_2\mu_1^x&x_3\mu_1^x&x_4\mu_1^x\\x_1\mu_2^x&x_2\mu_2^x&x_3\mu_2^x&x_4\mu_2^x\\x_1\mu_3^x&x_2\mu_3^x&x_3\mu_3^x&x_4\mu_3^x\\x_1\mu_4^x&x_2\mu_4^x&x_3\mu_4^x&x_4\mu_4^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1&x_2&x_3&x_4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Властивості ТЗ:

слід – t =trace(T^x)= x_2+x_3;

n1 - 1-норма – максимальна сума колонки-norm(T^x,1)=max(sum(abs(T^x)))= =$2x_4$;

n2–Infiniti-норма– максимальна сума рядка–norm(Tx,inf)=max(sum(abs(($(T^x)^T$))))= =$x_1+x_2+x_3+x_4$.

При розв'язанні ЗНЛП у тензорному базисі розв'язки одержують у вигляді ТЗ із матрицею T^x. В цьому випадку досить часто виникає задача визначення відповідної НЗ, необхідно визначити додатково умови, за яких можливо визначити параметри ФН НЗ. Зазначимо, що за замовчуванням приймається, що для НЗ із визначеної ФН розв'язок НЗЛП має таку ж ФН.

Для трикутної ФН для визначення {x1, x2, x3} сформульоване правило. Нехай розв'язками чітких ЗЛП для 1-го інваріанта і норм будуть вектори: $t_j^0=\{t_j^0\},n1_j^0,n2_j^0$, тоді розв'язки вихідної задачі будуть визначені з умов: ${}^jx_2^0=t_j^0,\ {}^jx_3^0=n1_j^0,\quad {}^jx_1^0+{}^jx_2^0+{}^jx_3^0=n2_j^0$. Нагадаємо, що кожен компонент розв'язку вихідної НЗЛП являє собою двовимірний вектор, кожний компонент якого – НЗ із трикутної ФН.

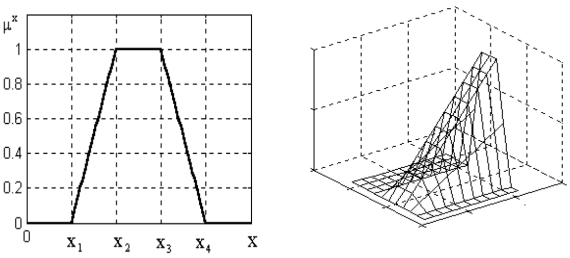
Для трапецієподібної ФН для визначення {$x_1+x_2+x_3+x_4$} можна сформулювати систему рівнянь Ax=b, що представлена нижче:

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = t, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = n_1 \\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = n_2 \end{cases}.$$

Як видно, вона є недовизначеною – для 4-х невідомих існує тільки три рівняння (матриця 4×3). ПММ МатЛаб дозволяє одержати наближений розв'язок цієї системи методом найменших квадратів. Зокрема, можливе визначення псевдооберненої матриці $A^{(p)}$, для якої $A^{(p)}x \approx b$, на підставі якої можна визначити наближені значення x_1, x_2, x_3 , x_4.

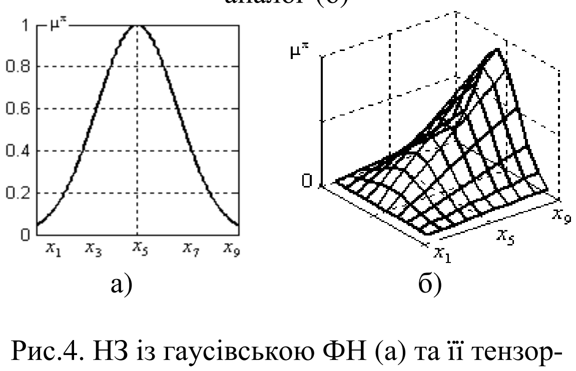
Аналогічна справа і в більш складному випадку – НЗ представлена функцією, для якої недостатньо чотирьох значень. Наприклад, ФН гаусового типу, якій для визначеності, припустимо, достатньо 9 значень: $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_9\}$, $\mu^x= =\{\mu_1^x, \mu_2^x, \ldots, \mu_9^x\}$ …

$$T^X = \begin{pmatrix} x_1\mu_1^x & x_2\mu_1^x & \ldots & x_9\mu_1^x \\ x_1\mu_2^x & x_2\mu_2^x & \ldots & x_9\mu_2^x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1\mu_4^x & x_2\mu_4^x & \ldots & x_9\mu_9^x \end{pmatrix}.$$



а) б)

Рис. 3. Трапецієвидна НЗ (а) і її тензорний аналог (б)



а) б)

Рис.4. НЗ із гаусівською ФН (а) та її тензорний аналог (б)

У цьому випадку система рівнянь має матрицю вимірністю 9×3, однак і тут засоби ПММ МатЛаб дозволяють одержати наближений розв'язок цієї системи методом найменших квадратів. Зокрема, можливе визначення псевдооберненої матриці A(p), для якої A(p) x ≈ b, на підставі якої можна визначити наближені значення x1, x2, … , x9. Зазначимо, що при цьому ФН для всіх x1, x2, … , x9 передбачається заданою.

На завершення зазначимо, що тільки у випадку НЗ із трикутною ФН можливо однозначне визначення параметрів розв'язку НЗЛП, в інших випадках, наприклад, трапецієподібна чи гауссова ФН, розв'язок виходить неоднозначним. Не виключено, що він може бути навіть не припустимим, тому необхідна додаткова перевірка на допустимість. У загальному випадку пошук оптимального (єдиного) розв'язку НЗЛП відноситься до класу некоректних задач, для розв'язання яких можуть бути застосовані методи регуляризації. За умов невизначеності така задача має обмежене прикладне значення.

Приклад. Розглянемо особливості розв'язання НЗЛП при представленні параметрів моделі тензорами. НЗЛП для тензорного представлення НЗ із трикутної ФН із урахуванням зроблених вище припущень має вигляд

$$\max \sum_{j=1}^{n} {}^{j}T^{c}\ {}^{j}T^{x}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} {}^{ij}T^{a}\ {}^{j}T^{x} \le {}^{i}T^{b},\ i=1,m,$$

$${}^{j}x_1 \ge 0,\ {}^{j}x_2 \ge 0,\ {}^{j}x_3 \ge 0$$

чи

$$\max\left(\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^{j}c_1 & {}^{j}c_2 & {}^{j}c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^{j}x_1 & {}^{j}x_2 & {}^{j}x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

при обмеженнях

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^{ij}a_1 & {}^{ij}a_2 & {}^{ij}a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^{j}x_1 & {}^{j}x_2 & {}^{j}x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \le \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^{i}b_1 & {}^{i}b_2 & {}^{i}b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок ЗЛП в такій постановці невідомий, тому розглянемо задачу в іншій інтерпретації – вирішити чітку задачу ЛП для інваріантів ТЗ і для норм. Як відомо з матричного аналізу, для матриць [A],[B] справедливе :

norm ([A]*[B]) ≤ norm [A]*norm [B]

У зв'язку зі способом формування, отримана ТЗ являє собою діаду, для якої всі інваріанти, крім першого дорівнюють 0.

Якщо ввести позначення: $t_j^x, t_j^c, t_{ij}^a, t_i^b$ - сліди, $n1_j^x, n1_j^c, n1_{ij}^a, n1_i^b$ - 1 -норми, $n2_j^x, n2_j^c, n2_{ij}^a, n2_i^b$ - infinity-норми тензорів ${}^jT^x$, ${}^jT^c$, ${}^{ij}T^a$ і ${}^iT^b$ відповідно, то задача НЛП, в загальній постановці при заданих припущеннях відносно ФН, трансформується в сукупність трьох стандартних ЗЛП – для сліду і двох норм.

Нечітка ЗЛП має вид:

$$\min \tilde{c}\tilde{x},\ \tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},\ \tilde{x} \ge 0$$

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} \tilde{2} & \tilde{2} \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{3} & -\tilde{4} \\ -\tilde{2} & \tilde{1} \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} -1\tilde{0} & -\tilde{4} \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що НЗ $\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}, 1\tilde{0}$ задано у вигляді:

$$\tilde{1} = \{0.7/0\ \ 1/1\ \ 1.3/0\},\ \tilde{2} = \{1.5/0\ \ 2/1\ \ 2.5/0\},$$
$$\tilde{3} = \{2.5/0\ \ 3/1\ \ 3.5/0\},\ \tilde{4} = \{3.5/0\ \ 4/1\ \ 4.5/0\},$$
$$1\tilde{0} = \{8.5/0\ \ 10/1\ \ 11.5/0\}.$$

Відповідні ТЗ приведені нижче:

$$\tilde{1} \to T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 1.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \tilde{2} \to T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{3} \to T^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & 3 & 3.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \tilde{4} \to T^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.5 & 4 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$1\tilde{0} \to T^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8.5 & 10 & 11.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача НЛП у тензорному базисі має вигляд:

$$\min\ [((T^{(2)})(T^{(x_1)}) + (T^{(2)})(T^{(x_2)}))],$$

при обмеженнях

$$\begin{pmatrix} T^{(3)} & -T^{(4)} \\ -T^{(2)} & T^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(x_1)} \\ T^{(x_2)} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} T^{(10)} \\ T^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Підставивши у вихідну задачу значення ТЗ, одержуємо

$$\min\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

при обмеженнях

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.5 & 4 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \le\le - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8.5 & 10 & 11.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 1.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \le - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.5 & 4 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Обчислюємо інваріанти і норми для отриманих ТЗ:

- інваріанти:

$I_1(T^{(1)}) = 1$, $I_1(T^{(2)}) = 2$, $I_1(T^{(3)}) = 3$,
$I_1(T^{(4)}) = 4$, $I_1(T^{(10)}) = 10$;

- норми:

$N_1(T^{(1)}) = 1.3$, $N_1(T^{(2)}) = 2.5$, $N_1(T^{(3)}) = 3.5$, $N_1(T^{(4)}) = 4.5$, $N_1(T^{(10)}) = 11.5$;
$N_2(T^{(1)}) = 2$, $N_2(T^{(2)}) = 6$, $N_2(T^{(3)}) = 9$, $N_2(T^{(4)}) = 12$, $N_2(T^{(10)}) = 30$.

Формуємо задачі НЛП для 1-го інваріанта і для норм: задача НЛП у тензорному базисі для 1-го інваріанта відповідно має вигляд:

$$\min\ (I_1(T^{(2)})I_1(T^{(x_1)}) + I_1(T^{(2)})I_1(T^{(x_2)})),$$

при обмеженнях

$$\begin{pmatrix} I_1(T^{(3)}) & -I_1(T^{(4)}) \\ -I_1(T^{(2)}) & I_1(T^{(1)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(T^{(x_1)}) \\ I_1(T^{(x_2)}) \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} I_1(T^{(10)}) \\ I_1(T^{(4)}) \end{pmatrix}$$

Форма представлення НЗЛП для норм не відрізняється від попередньої задачі і виходить з неї шляхом заміни $I_1(T)$ на $N_1(T)$ чи $N_2(T)$.

ЗЛП для першого інваріанта, геометрична інтерпретація якої наведена на рис.5, має вигляд:

$$\min cx,$$
$$x \in X : Ax \le b,\ x \ge 0,$$
$$c = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

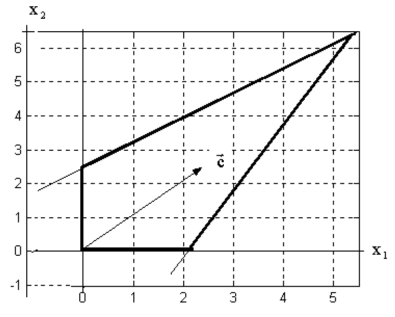


Рис.5. Чітка ЗЛП для 1-го інваріанта

Розв'язком задачі є вектор: $x^* = (5.2 \quad 6.4)$.Аналогічно виконуємо розв'язання чітких ЗЛП для норм ТЗ - N_1 і N_2 :

$$N_1 \Rightarrow c=(2.5 \quad 2.5),\ A=\begin{pmatrix} 3.5 & -4.5 \\ -2.5 & 1.3 \end{pmatrix},\ b=(-11.5 \quad -4.5),$$

$$N_2 \Rightarrow c=(6.0 \quad 6.0),\ A=\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 2 \end{pmatrix},\ b=(-30 \quad -12).$$

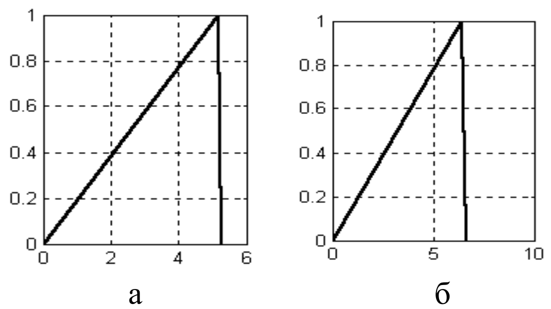


Рис.6. Значення змінних $\tilde{x}_1$ (а) і $\tilde{x}_2$ (б) розв'язок вихідної НЗЛП

Таким чином, задача нечіткого лінійного програмування при представленні нечітких змінних тензорами може бути зведена до системи чітких задач лінійного програмування – для першого інваріанта і норм ТЗ – з наступним формуванням розв'язку вихідної задачі на підставі системи правил.

Окремо зазначимо, що запропонований алгоритм дозволяє представити розв′язок нечіткої ЗЛП у тензорному базисі як розв′язок лише трьох чітких ЗЛП (для трикутної, трапецієподібної, гауссової і т.ін ФН) незалежно від кількості α-рівнів, на яких представлена нечітка змінна. Це пояснюється тим, що діадний тензор Т(x, μ_x), отриманий шляхом реалізації кронекерівського добутку

$$T(x,\ \mu_x)=\mathrm{kron}(x,\ (\mu_x)^T), \qquad (59)$$

де x={x$_j$}, $\mu_x=\{\mu_x^{(j)}\}$, j=1,2,…, T – символ транспонування, має лише один інваріант (1-й), який є відмінним від нуля.

Висновки

Прийняття рішень в умовах невизначеності, засноване на розв‘язанні задач математичного (лінійного) програмування з нечіткими змінними, повинне враховувати, що наближена постановка задачі практично виключає доцільність застосування точних методів для розв'язання вихідної задачі.

Одним із розповсюджених способів розв'язку задач нечіткого лінійного програмування є спосіб представлення вихідної (нечіткої) задачі у вигляді сукупності чітких задач. Представлення нечіткої змінної у вигляді тензора дозволяє формулювати задачу нечіткого лінійного програмування в матричному вигляді, де всі параметри (коефіцієнти лінійної форми, матриці обмежень і правої частини) є матрицями.

Для задачі формування портфелю цінних паперів доцільно розглянути параметри даної задачі -прибутковість портфелю і ризик - як тензор-змінні. За такого підходу є можливість перейти до чіткої постановки задачі навіть при неповній визначеності вхідних параметрів.

Запропоновано спосіб розв'язання задачі лінійного програмування з матричною формою представлення параметрів моделі, який полягає в тому, що формується комплекс чітких задач лінійного програмування – для 1-го інваріанта і норм, чіткі розв’язки яких використовуються для побудови нечітких рішень вихідної задачі на підставі спеціальних правил, сформульованих із урахуванням типу функції належності вихідної нечіткої задачі.

Список літератури

1. *Markowitz H.* Portfolio Selection // Journal of Finance, vol.VII, №1, March 1952.-Режим доступу: http://cowles.econ. yale. edu/P /cp/ p00b/ p0060.pdf.

2. *Недосекин А. О.* Оптимизация фондового портфеля: новый век - новые

идеи. Режим доступу: http://sedok.narod.ru/s_files/PF_Article_4.zip.

3. *Inuiguchi M., Ram J.* Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem// M.Inuiguchi, J.Ram, Fuzzy Sets and Systems 111 (2000). P. 3–28.
4. *Inuiguchi M., Sakawa M., Kume Y.* The usefulness of possibilistic programming in production planning problems, Int. J. Prod. Economics 33 (1994). – P. 45–52.
5. *Bellman R.E.* Decision-making in a fuzzy environment/ R.E.Bellman, L.A.Zadeh, Management Sci. 17 (1970). – P. 141–164.
6. *Tanaka H., Okuda T., Asai K.* On fuzzy mathematical programming,// H.Tanaka, T.Okuda, K.J.Asai, Cybernet. 3 (1974). – P. 37–46.
7. *Zimmermann H.-J.* Description and optimization of fuzzy systems, Int. J// H.J Zimmermann, General Systems 2 (1976). – P. 209–215.
8. *Zimmermann H.-J.* Fuzzy programming and linear programming with several objective functions,// H.J Zimmermann, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978). – P. 45–55.
9. *Dubois D.* Linear programming with fuzzy data, in: J.C. Bezdek (Ed.) P., Analysis of Fuzzy Information, vol. III: Applications in Engineering and Science,// D.Dubois, CRC Press, Boca Raton, FL, 1987. – P. 241–263.
10. *Dubois D.* Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory, Inform.//D.Dubois, H. Prade, Sci. 30 (1983). – P. 183–224.
11. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility,// L.A. Zadeh, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978). – P. 3–28.
12. *Dubois D.* Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty// D.Dubois, H.Prade, Plenum Press, New York, 1988.
13. *Negoita C.V.* On considering imprecision in dynamic linear programming, Economic Comput. Economic Cybernet// C.V.Negoita, S.Minoiu, E.Stan, Stud. Res. 3 (1976). – P. 83–95.
14. *Orlovsky S.A.* On formalization of a general fuzzy mathematical programming problem // S.A. Orlovsky, Fuzzy Sets and Systems 3 (1980). – P. 311- 321.
15. *Orlovsky S.A.* Decision-making with a fuzzy preference relation // S.A. Orlovsky, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978). – P. 155–167.
16. *Fuller R.* Fuzzy reasoning for solving fuzzy mathematical programming problems // R.Fuller, H. -J. Zimmermann Fuzzy Sets and Systems 60(1993). – P. 121-133.
17. *Allahviranloo T.* Solving Fully Fuzzy Linear Programming Problem by the Ranking Function. // T.Allahviranloo, F.F.Lotfi,. M.Kh. Kiasary, N.A.Kiani and L.Alizadeh.,Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, 2008, no. 1. – P. 19 – 32.
18. . *Gasimov R. N.* Solving Fuzzy Linear Programming Problems with Linear Membership Functions.//R.N. Gasimov, K. Yenilimez Turk J Math. 26 (2002). – P. 375–396.
19. *Shaocheng, T.* Interval number and Fuzzy number linear programming // T.Shaocheng, Fuzzy Sets and Systems 66 (1994). – P. 301-306.
20. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю.* Мягкие вычисления на основе тензорных моделей неопределенности. Часть 1 – тензор-переменная в системе нечетких множеств. // Электронное моделирование ИПМЭ НАН Украины, № 1, т.30, – С. 43 – 58.
21. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю.* Мягкие вычисления на основе тензорных моделей неопре-деленности. Часть 2-нечеткая математика в тензорном базисе. //Ю.Н. Минаев, О.Ю. Филимонова., Электронное моделирование ИПМЭ НАН Украины, № 2, т.30, . – с 29. -54.

Подано до редакції 01.10.2010 р.