УДК 519.233.2: 621.391.83 (045)

Заліський М.Ю.

ПОСЛІДОВНИЙ МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРУ МАСШТАБУ ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Розглянуто алгоритми послідовного оцінювання параметру масштабу щільності розподілу ймовірностей, визначено основні характеристики розроблених алгоритмів та отримані аналітичні співвідношення для їх розрахунку

Вступ

Засоби зв'язку, навігації та спостереження (ЗНС) відіграють важливу роль для забезпечення безпеки та регулярності польотів у цивільній авіації. Під час використання за призначенням цих засобів можливі порушення стабільності їх роботи внаслідок відмов апаратних та програмних частин, неправильних дій операторів, дії зовнішніх електромагнітних завад тощо.

Системи експлуатації (СЕ) засобів ЗНС виконують функції моніторингу, контролю, прийняття рішень, формування керуючих впливів та їх реалізацію на основі інформаційних сигналів про технічний стан засобів ЗНС та окремих елементів СЕ, які в свою чергу можуть мати невідповідності, які обумовлені недосконалою нормативною базою та організаційною структурою, недоліками процесної моделі тощо.

Для обробки інформаційних сигналів щодо стану засобів ЗНС та СЕ доцільно використовувати процедури, що базуються на методах теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, оцінювання та перевірки статистичних гіпотез.

Існує два підходи для аналізу вибіркових сукупностей, що базуються на фіксованому обсязі даних та на послідовному підході А. Вальда [1]. Послідовний аналіз характеризуються у середньому меншим обсягом спостережень, ніж еквівалентні їм процедури, засновані на фіксованій вибірці при однакових рівнях показників якості обробки інформаційних сигналів. Ці властивості обумовлюють актуальність застосування послідовних методів при обробці статистичної інформації.

Постановка завдання

Аналіз літератури в сфері використання послідовних процедур оцінювання в системах експлуатації засобів зв'язку, навігації та спостереження показує, що інженерним методам розрахунку їх ефективності приділена недостатня увага при наявності доволі значної теоретичної бази [1–2].

У працях [3–5] були розглянуті варіанти синтезу послідовних процедур оцінювання параметрів (розмаху та зсуву) щільностей розподілу ймовірностей (ЩРІ) на прикладі рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[0;1]$, отримані основні аналітичні співвідношення для розрахунку характеристик оцінки та тривалості спостережень, а також проведено порівняльний аналіз ефективності запропонованих та відповідних їм класичних процедур.

Наступним етапом є синтез послідовних процедур оцінювання параметру масштабу ЩРІ з оцінкою їх результативності та ефективності для визначення можливості використання деяких з них в інженерній практиці під час розробки і модернізації систем експлуатації засобів зв'язку, навігації та спостереження, а також систем менеджменту якості виробництва продукції та надання послуг.

Основна частина

Розглянемо задачу послідовного оцінювання параметру масштабу ЩРІ випадкової величини розподіленої рівномірно. При цьому досліджувана вибірка w являє собою

$$w = Kz ,$$

де z – випадкова складова (рівномірно розподілена величина в інтервалі $[0;1]$),

K – параметр масштабу (тобто складова, що пов'язана з корисним сигналом).

В якості невідомої характеристики масштабу щільності розподілу (оцінки), значення якої встановлюється, можуть бути: максимальне вибіркове значення $w_{\max}$, подвійне середнє вибіркове значення $w_{ср}$ (визначається як сума мінімального та максимального значення масштабованої ЩРІ), подвійне середнє арифметичне значення мінімального, максимального та математичного сподівання тощо.

Аналітичні вирази для визначення параметру масштабу K для перелічених варіантів оцінок можна записати наступним чином:

1) для максимального вибіркового значення

$$K = w_{\max};$$

2) для подвійного середнього вибіркового значення

$$K = 2w_{ср} = 2\frac{w_{\min} + w_{\max}}{2} = w_{\min} + w_{\max};$$

3) для подвійного середнього арифметичного значення мінімального, максимального та математичного сподівання

$$K = \frac{2(w_{\min} + w_{\max} + w_{ср})}{3};$$

4) для півсуми медіани w_0 та математичного сподівання вибірки $w_{ср}$

$$K = \frac{w_0 + w_{ср}}{2}.$$

В якості правила зупину приймемо правило типу «вікна», розглянуте у праці [4]. При цьому експеримент буде продовжуватися, якщо на i-ому кроці максимальне значення випадкової складової вибірки $z_{\max}$ не буде перевищувати наперед заданого граничного значення $z_{гр}$, а мінімальне значення випадкової складової вибірки $z_{\min}$ буде перевищувати $1 - z_{гр}$. Тобто процес буде перебувати в області продовження експерименту під час виконання наступної умови $z_{\max} < z_{гр} \bigcup z_{\min} > 1 - z_{гр}$, і в області зупину, якщо $z_{\max} \geq z_{гр} \bigcap z_{\min} \leq 1 - z_{гр}$.

Розглянемо випадок, коли оцінкою є $w_{\max}$.

Розглянемо основні характеристики оцінки. Для оцінки ЩРІ максимального значення вибірки $w_{\max}$ у випадку моделювання за класичною схемою можна побудувати гістограму частот (рис. 1), яка є статистичним аналогом цієї щільності, та порівняти її з аналітичною формулою. Зазначимо, що дані гістограми отримана при обсязі вибірки $N = 200$.

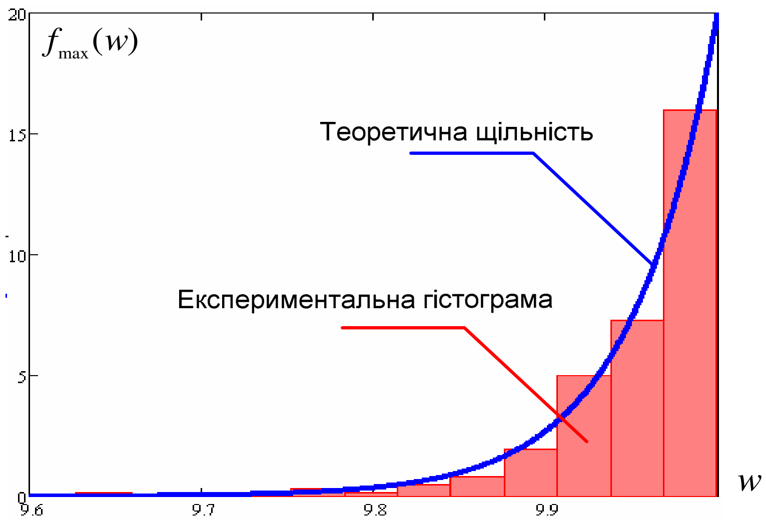

Рис. 1. Гістограма (експериментальна) та ЩРІ (аналітична) максимального значення вибірки

Використовуючи методи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів, можна отримати аналітичні співвідношення для ЩРІ максимального значення рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[0;K]$ при її заданому обсязі N.

$$f_{\max}(w) = \frac{Nw^{N-1}}{K^N}, \quad w \le K.$$

Аналітичні співвідношення для математичного сподівання та дисперсії оцінки:

$$m_1(w_{\max}) = \frac{NK}{N+1}, \tag{1}$$

$$\mu_2(w_{\max}) = \frac{NK^2}{(N+1)^2(N+2)}. \tag{2}$$

З виразів (1), (2) видно, що при збільшенні об'єму вибірки математичне сподівання оцінки $m_1(w_{\max})$ прямує до реального значення оцінки, а дисперсія $\mu_2(w_{\max})$ – до нуля. Тобто дана оцінка є обґрунтованою.

Оскільки прийняте правило зупину використовується для рівномірно розподіленої величини на інтервалі $[0;1]$, то характерною особливістю даної послідовної процедури оцінювання є необхідність виконання певних операцій над досліджуваною статистикою. Така сукупність операцій являє собою правило перетворення вихідної статистику в рівномірно розподілену величину на інтервалі $[0;1]$. У даному випадку можливі наступні функціональні перетворення:

$$z_i = \frac{w_i}{\max(\vec{w}_i)}, \tag{3}$$

$$z_i = \frac{w_i - \min(\vec{w}_i)}{\max(\vec{w}_i) - \min(\vec{w}_i)}, \tag{4}$$

$$z_i = \frac{\max(\vec{w}_i) - w_i}{\max(\vec{w}_i) - \min(\vec{w}_i)}, \tag{5}$$

де $\min(\vec{w}_i)$ та $\max(\vec{w}_i)$ – мінімальне та максимальне значення накопиченої на i-му кроці вибірки $\vec{w}_i$ послідовної процедури.

Крім того, слід зазначити, що під час виконання даної процедури на кожному i-му кроці експерименту для функціонального перетворення (3) отримують вибірку $\vec{z}_{i-1}$ (обсягом $i-1$), а для перетворень (4), (5) – вибірку $\vec{z}_{i-2}$ (обсягом $i-2$). Це пояснюється тим, що значення $w_i = \max(\vec{w}_i)$ для випадку (3), а для (4), (5) і $w_i = \min(\vec{w}_i)$, під час перетворення статистики відкидаються через те, що вони утворюють у $\vec{z}_i$ нульові та одиничні відліки, що унеможливлює правильність функціонування правила зупину, яке використовується. Дані значення необхідні лише для функціональних перетворень.

Тому при синтезі та аналізі послідовних процедур оцінювання параметру масштабу виникає можливість використання навчальної вибірки з оптимізацією вибору її обсягу n_0.

Аналітичні співвідношення для параметрів розробленої послідовної процедури за тривалістю (ЩРІ, математичне сподівання та дисперсія тривалості спостережень) повністю збігаються з аналогічними параметрами процедури, розглянутої у праці [3].

При аналізі запропонованих послідовних алгоритмів можна побудувати щільність розподілу $f_{\Pi}(w_{\max})$ максимального вибіркового значення для послідовного алгоритму (рис. 2).

Аналітичний вираз для ЩРІ оцінки:

$$f_{\Pi}(w_{\max}) = \frac{\sum_n \left(\frac{n}{K^n} (w_{\max})^{n-1} \right)}{\sum_n (1 - (z_{\text{гр}})^n)}.$$

Для перевірки ефективності запропонованого послідовного алгоритму оцінювання порівняємо отримані значення дисперсій оцінки при їх однакових математичних сподіваннях (рис. 3). Як видно з графіку, послідовний алгоритм дає виграш за дисперсією (приблизно у півтори рази) у порівняння з відповідним йому класичним алгоритмом.

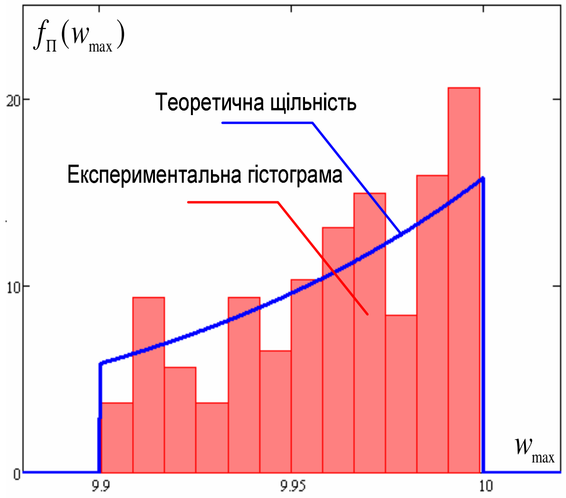

Рис. 2. Гістограма (експериментальна) та ЩРІ (аналітична) оцінки

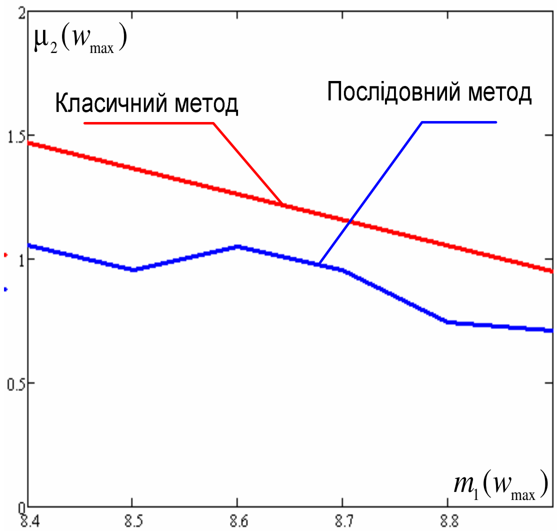

Рис. 3. Порівняння дисперсій оцінки w_{max} (класичного та послідовного методу) при однакових середніх значеннях оцінки

Розглянемо альтернативний варіант оцінювання параметру масштабу. При цьому може буде використана процедура оцінювання через багатоальтернативну перевірку гіпотез.

Будемо вважати, що на основі обсягу навчання n_0 встановлюється попереднє значення параметру масштабу (позначимо його $K_{m+1/2}$). На основі цього значення формується сітка із m дискретних відліків параметру масштабу $\vec{K} = \{K_1, K_2, ..., K_m\}$ з певним кроком дискретизації $\theta = K_{i+1} - K_i$. Оскільки значення $K_{m+1/2}$ має знаходитись посередині сітки, то число відліків m доречно обирати непарним.

Алгоритм формування оцінки наступний: якщо до кроку усічення $k = N$ значення оцінки не змінюється (тобто $K^* = K_{m+1/2} = \max(\vec{w}_k)$), то дане значення приймається як реальне; якщо ж на i-му кроці ($n_0 < i < k$) експерименту оцінка змінюється, то в якості оцінки приймається мінімальне значення сітки, що перевищує максимальне вибіркове, тобто $K^* = K_j = \min(\vec{K} \geq \max(\vec{w}_k))$.

Така процедура оцінювання має виграш приблизно в півтори рази порівняно з класичним методом.

В окремих випадках оцінювання можна вважати, що сітка $\vec{K} = \{K_1, K_2, ..., K_m\}$ апріорно відома. За допомогою навчання n_0 встановлюється початкове значення оцінки $K^* = K_j$. Дане значення приймається як гіпотеза, що перевіряється з одною (для крайніх значень) або з двома сусідніми альтернативами. Як і в попередньому випадку гіпотеза приймається на кроці усічення $k = N$, якщо до цього не прийнята жодна з альтернатив.

Для перевірки ефективності запропонованого послідовного алгоритму оцінювання порівняємо отримані значення дисперсій оцінки при їх однакових математичних сподіваннях для різних θ (рис. 4).

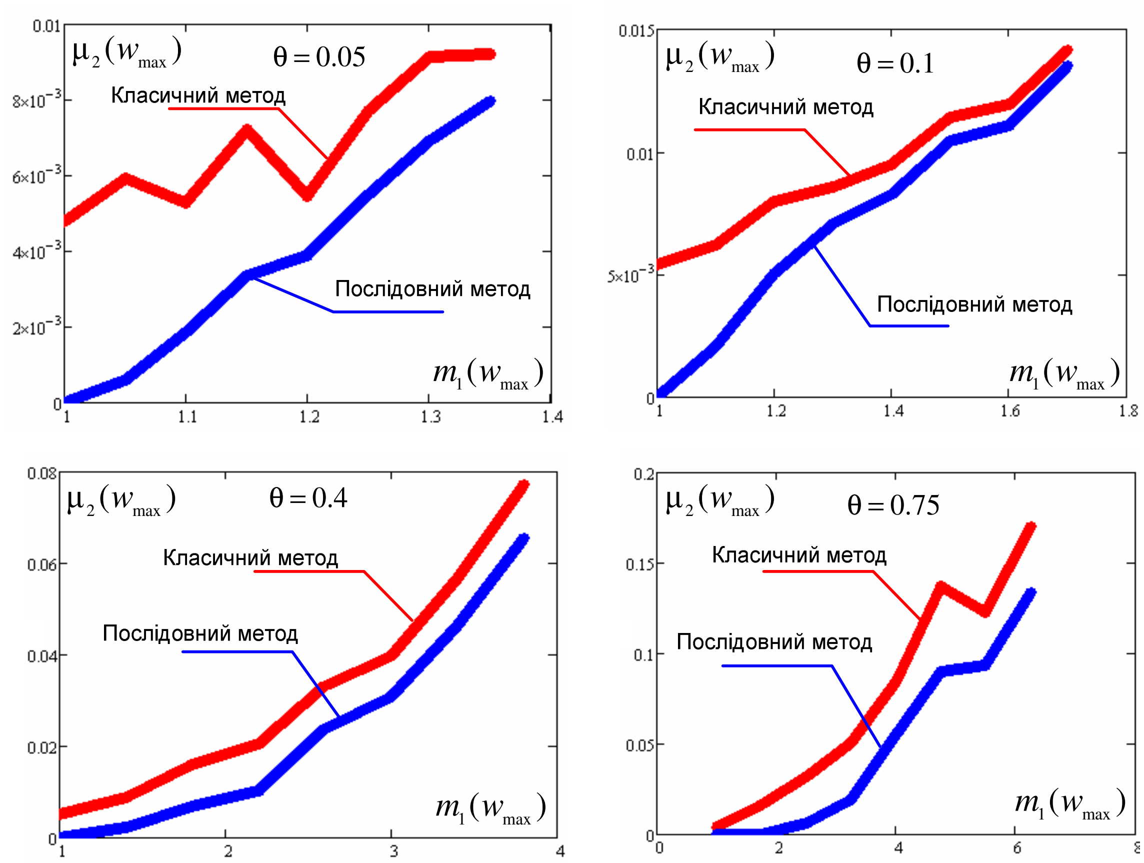

Рис. 4. Порівняння дисперсій оцінки (класичного та послідовного методу) при однакових середніх значеннях оцінки

Як видно з графіків виграш послідовного алгоритму у порівнянні з класичним за дисперсією значною мірою визначається кроком дискретизації θ (при меншому значенні θ отримуємо більший виграш за дисперсією оцінки).

Висновки

Отримані результати показують, що послідовний алгоритм оцінювання параметру масштабу щільності розподілу ймовірностей при однакових обсягах тривалості спостережень відносно класичної процедури оцінювання має менші чисельні значення дисперсій оцінок, або менші тривалості спостережень при однакових рівнях дисперсій оцінок. Результати досліджень можуть бути використані в системах експлуатації засобів зв'язку, навігації та спостереження, системах менеджменту якості виробництва продукції та надання послуг тощо.

Список літератури

1. *Вальд А.* Последовательный анализ. – М.: Физматиздат, 1960. – 328 с.

2. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. – М.: Наука, 1974. – 496 с.

3. *Заліський М.Ю., Соломенцев О.В.* Метод послідовного оцінювання параметрів статистичних розподілів // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – К.: НАУ, 2008. – № 2 (24). – С. 80–85.

4. *Заліський М.Ю., Соломенцев О.В.* Про один метод послідовного оцінювання // Електроніка та системи управління: Зб. наук. пр. – К.: НАУ, 2009. – № 1. – С. 26–32.

5. *Заліський М.Ю., Соломенцев О.В.* Послідовний метод оцінювання параметру зсуву щільності розподілу ймовірностей // Електроніка та системи управління: Зб. наук. пр. – К.: НАУ, 2009. – № 2. – С. 75–80.

Подано до редакції 29.09.2010