УДК 519.612 (045)

Глазок О.М., канд.техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОДУКТИВНОСТІ ОБЧИСЛЕНЬ ПРИ ЧИСЕЛЬНОМУ РОЗВ'ЯЗАННІ АЕРОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ У РОЗПОДІЛЕНОМУ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Факультет комп'ютерних систем
Національного авіаційного університету

Досліджено обчислювальну ефективності процесів чисельного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності, породжених аеродинамічними задачами, у розподіленому обчислювальному середовищі. Порівняно ефективність обчислень за різних умов організації розрахунків.

Наукова задача дослідження

Багато наукових та прикладних задач, зокрема – задач аеро- та гідродинаміки, зводяться до чисельного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) великої розмірності. Внаслідок стрімкого розвитку багатоядерних та багатопроцесорних комп'ютерних платформ, комп'ютерних мереж, техніки розподілених обчислень актуальною стала задача розробки та дослідження нових ефективних методів розв'язання таких систем рівнянь у розподіленому обчислювальному середовищі з розпаралелюванням операцій.

Аналіз публікацій. Сучасний стан проблеми

Робота над розв'язанням вказаної проблеми ведеться, головним чином, у трьох напрямках. По-перше, пропонуються математичні методи, орієнтовані на чисельне розв'язання систем алгебраїчних рівнянь великої розмірності [1, 2]. Подруге, пропонуються алгоритми розв'язання, орієнтовані на реалізацію в обчислювальному середовищі, що складається з окремих, певною мірою незалежних процесорів [3]. По-третє, розробляються протоколи, програмне забезпечення та спеціалізовані апаратні рішення для підтримки таких обчислень з боку програмного середовища та інфраструктури [4-6]. Для оцінки та порівняння створених паралельних методів та рішень розроблені та використовуються ряд показників якості.

В статті [7] автор запропонував ітераційний метод отримання розв'язку СЛАР на основі застосування другого методу Ляпунова. За цим методом вдається з початкової системи рівнянь отримати диференційне рівняння щодо вектора розв'язків X, яке не містить інших невідомих величин, і може бути розв'язане шляхом чисельного інтегрування на ЕОМ. Був також запропонований можливий підхід до розпаралелювання обчислень, що робить можливим застосування методу в розподіленому середовищі.

Ціль статті

Метою даної статті є дослідження продуктивності обчислень за методом розв'язання СЛАР великої розмірності, запропонованим у [7]. Для цього необхідно: запропонувати показники якості обчислень та процесів передачі даних, що є складовими паралельних обчислень; оцінити їх значення та дослідити можливості впливу на ці показники за рахунок вибору параметрів структури обчислень в рамках методу.

Основна частина

Нехай розв'язується система n лінійних алгебраїчних рівнянь

$$AX = B \quad , \qquad (1),$$

де A – задана квадратна матриця $n \times n$ з дійсними постійними елементами, B – заданий постійний вектор з дійсними елементами розмірності n, X – вектор з дійсними компонентами (вектор розв'язків) розмірності n.

Оцінимо спочатку обчислювальну трудомісткість одного кроку ітерації для послідовного алгоритму, що застосовується до розв'язання задачі розмірності n. У відповідності до [7] припустимо, що наступне наближення вектора рішень обчислюється за формулою

$$X_{i+1} = X_i + \left(-\frac{c}{2}\Delta t\right)\times \times \frac{(AX_i - B)^T Q(AX_i - B)}{(AX_i - B)^T QAA^T Q(AX_i - B)}\times \times A^T Q(AX_i - B), \quad (2)$$

де $Xi+1$ та Xi – наступне та попереднє наближення вектора розв'язку системи рівнянь; c – постійна величина, що впливає на швидкість збіжності; Δt – крок інтегрування; A і B – головна матриця і вектор правих частин системи (1); Q – задана квадратна вагова матриця порядку n.

Розглянемо елементи формули (2) з точки зору процесу розрахунку на послідовному комп'ютері. Нехай компоненти числового вектора Xi (попереднього наближення до розв'язку) відомі. Величину $-\frac{c}{2}\Delta t$ можна обчислити однократно, бо вона не змінюється протягом усіх кроків підрахунку. Решта компонентів формули містять Xi і змінюються на кожному кроці підрахунку. Неважко підрахувати, що для проведення одного кроку ітерації необхідно виконати: множення матриці на вектор – 3 рази; обчислення скалярного добутку векторів – 2 рази; додавання, віднімання векторів – 2 рази; множення вектора на скаляр – 1 раз; множення, ділення скалярів – 2 рази.

Необхідно враховувати, що суттєвий вклад в трудомісткість розрахунків вносить використання бібліотек підвищеної точності. Незалежно від походження таких бібліотек, «скалярні» арифметичні операції над довгими числами фактично будуть виконуватися їх кодом як послідовні операції над частинами чисел. Нехай співвідношення між розрядністю чисел (в двійковому представленні) і розрядністю процесора дорівнює l. Тоді додавання (чи віднімання) двох довгих чисел вимагатиме виконання процесором не менше ніж $2l$ арифметичних операцій додавання. Множення чи ділення двох довгих чисел – не менше ніж $2l2$ арифметичних операцій, з яких $l2$ операцій множення і $l2$ операцій додавання. Множення вектора розмірності n на скаляр – не менше ніж $n\cdot 2l2$ арифметичних операцій. Поелементне додавання чи віднімання двох векторів розмірності n – не менше ніж $n\cdot 2l$ арифметичних операцій. Скалярне множення двох таких векторів – не менше ніж $n\cdot 2l2 + (n-1)\cdot 2l = 2l(nl+n-1)$ арифметичних операцій. Послідовне множення матриці розміру $n\times n$ на вектор розмірності n – не менше ніж $2nl(nl+n-1)$ операцій.

Практичне значення має час виконання розрахунків, тому операції додавання і множення необхідно розрізняти, оскільки їх апаратна реалізація займає різну кількість тактів. Так, у розповсюджених процесорів сімейства $x86$ операції множення займають 4-5 тактів синхронізації.

Застосовуючи отримані оцінки до формули (1), маємо оцінку загальної кількості операцій $N1$ на один ітераційний крок:

$$N1=N1(n, l)=3\cdot 2nl(nl+n-1)+ +2\cdot 2l(nl+n-1)+2\cdot n\cdot 2l+n\cdot 2l2+2\cdot 2l2= =6n2l2+6nl(n+l-1)+4n(2n+l-1).$$

Нехай ts та tm – постійні величини, що характеризують час виконання процесором відповідно операції додавання і операції множення. Вносячи ці величини у розрахунки, отримаємо оцінку часу $T1$, витраченого на один ітераційний крок:

$$T1=T1(n,l)=3\cdot n2l2(ts + tm) + 3\cdot 2n(n-1)l\cdot ts+2\cdot n\cdot l2\cdot (ts + tm) + 2(n-1)\cdot 2l\cdot ts+ +2\cdot n\cdot 2l\cdot ts +n\cdot l2\cdot (ts + tm)+2\cdot l2\cdot (ts + tm)= =(3n2l2 + 6n2l +3nl2 +2l2+2nl-4l)\cdot ts+ +(3n2l2+4nl2+2l2)\cdot tm.$$

З отриманих виразів видно, що для $l = O(lg\ n)$ $N1 = O(n2lg2n)$ і $T1 = O(n2lg2n)$.

З метою розподілу процедури обчислення на підзадачі розіб'ємо матриці і вектори задачі на блоки і на основі цих блоків розділимо на частини ітераційний процес. Блоки можуть перекриватися або не перекриватися. При будь-яких поділах отримані вище оцінки можуть бути застосовані до окремих блоків, оскільки задачі для них розв'язуються за тим же алгоритмом. В цьому разі змінна n означатиме розмір конкретного блока.

Для оцінки ефективності досліджуваних модифікацій паралельного алгоритму має сенс використовувати наступні показники:

1. Прискорення (*speedup*), що для скінчених детермінованих розрахунків визначається як відношення часу послідовного розв'язання задачі на скалярній ЕОМ до часу виконання паралельного алгоритму. Однак процес обчислень за алгоритмом, що розглядається, є ітераційним, тобто нескінченним з математичної точки зору, а швидкість збіжності процесу залежить від параметрів його організації. Тому прискорення необхідно буде визначати на основі відношення швидкості збіжності процесу в двох випадках. Швидкість збіжності, в свою чергу, може бути визначена як відношення між коефіцієнтом зменшення норми нев'язки отриманого наближення, усередненим протягом певної кількості ітераційних кроків, і кількості або часу операцій, які можна оцінити, як вказано вище.

2. Ефективність використання процесорів паралельним алгоритмом характеризує середню частку часу виконання алгоритму, протягом якої процесори реально працюють (не простоюють в стані очікування). Оскільки ітераційний процес включає одну і ту ж послідовність дій, повторюваних на кожній ітерації, то можна розглядати часові витрати на одну ітерацію.

3. Вартість обчислень, яку в детермінованому випадку можна визначити як величину, пропорційну до добутку часу обчислення на кількість задіяних процесорів. Для порівняння ж ітераційних процесів з різними швидкостями сходимості доведеться оперувати з питомою вартістю обчислень, віднесеною до коефіцієнта покращення нев'язки протягом певного періоду. Практично може бути зручною вартісна ефективність – величина, зворотня до вартості, яка відображає прогрес у наближенні до рішення, якого вдалося досягти ціною одиниці витрат за тим чи іншим методом.

На рис. 1 наведено результати одного з чисельних експериментів з розв'язання СЛАР. Порівнюються процеси розв'язання системи з виділенням різної кількості блоків – від 3 до 10. З графіків видно, що на початковому етапі найбільш ефективним є обчислення при найбільшій кількості блоків. Але надалі при кожному з використаних розбиттів на блоки процес уточнення уповільнюється, в той час як «лідером» за ефективністю стає розбиття з меншою кількістю блоків. Отже, при досягненні такого моменту доцільно перейти до наступного менш дрібного розбиття.

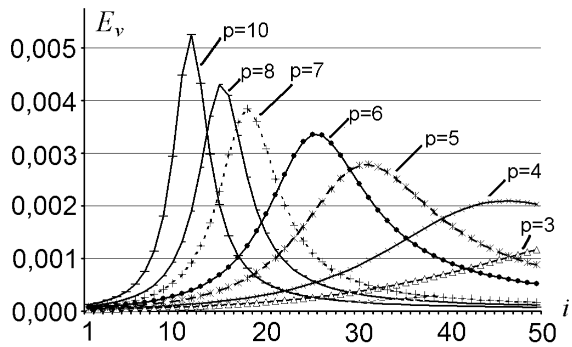

Рис. 1. Порівняння вартісних ефективностей процесів розв'язання СЛАР (на одну арифметичну операцію) з використанням різних кількостей блоків (від p=3 до p=10). По осі абсцис відкладено кількість ітерацій *i*

На рис. 2 і 3 подано результати розв'язання СЛАР з використанням двох блоків, що перекриваються. Розміри блоків, і, відповідно, ступінь перекриття, змінювались від 50% розміру системи (немає перекриття) до 96%. (Граничний випадок – 100% перекриття – відповідає розв'язанню системи без використання розбиття). Якщо розглядати дані відносно виконаних ітерацій (рис. 2), то найбільш ефективними видаються більші блоки. Але, з іншого боку, вони вимагають і найбільшої кількості операцій, тому з погляду питомої ефективності, віднесеної на кількість операцій, найвигіднішими виявляються блоки без перекриття чи з меншим перекриттям (рис.3).

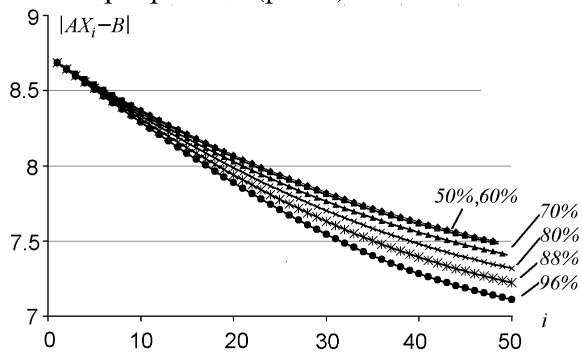

Рис. 2. Порівняння швидкостей сходимості процесів розв'язання СЛАР з використанням двох блоків, що перекриваються. По осі абсцис відкладено кількість ітерацій *i*

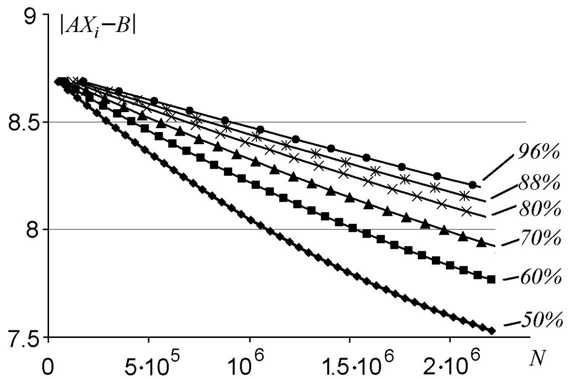

Рис. 3. Порівняння швидкостей сходимості процесів розв'язання СЛАР з використанням двох блоків, що перекриваються. По осі абсцис відкладено кількість арифметичних операцій *N*

Висновки

В статті розглянуто питання оцінки обчислювальної ефективності методу чисельного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності на основі другого методу Ляпунова в розподіленому обчислювальному середовищі. На основі даних чисельного експерименту запропоновано послідовність параметрів алгоритму, що дозволить підвищити ефективність розрахунків.

Напрямки, за якими необхідні подальші дослідження: оцінити виграш в ефективності за умови розпаралелювання матричних операцій; обґрунтувати мотиви раціонального вибору розрядності l в залежності від розмірності задачі n та параметрів організації розрахунків

Список літератури

1. *P. Benner*. Solving large-scale control problems //IEEE Control Systems Magazine. – 2004. – № 14(1). – P. 44–59.

2. *Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: КомКнига, 2007. – 320 с.

3. *P. Pattnaik, K. Ekanadham, J. Jann.* Autonomic computing and Grid //Grid Computing: Making The Global Infrastructure a Reality. – Wiley, 2003. – P. 351–362.

4. *Б. Н. Четверушкин, Е. В. Шильников.* Вычислительный и программный инструментарий для моделирования трехмерных течений вязкого газа на многопроцессорных системах //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – № 48, т. 2. – С. 309–320.

5. *K. Li.* Fast and scalable parallel matrix computations with reconfigurable pipelined optical buses //Parallel Algorithms and Applications. – Morgan-Kaufmann, 2004. – Vol. 19, No. 4. – P. 195–209.

6. *C. Hoge, D. Keith, A. Malony*. Client-side task support in Matlab for concurrent distributed execution //Distributed and Parallel Systems. From Cluster to Grid Computing. – Springer, 2007. – P. 113–122.

7. *Глазок О.М.* Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь для синтезу закону керування літальним апаратом з урахуванням нестаціонарності аеродинамічних характеристик //Проблеми інформатизації та управління. – 2009. – №4(28). – С. 36–39.

Подано до редакції 13.09.2010