

Буйвол В.М., д-р фіз.-мат. наук,
Фоміна Н.Б.,
Наконечна В.В.

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЗАДАЧАХ ГІДРОДИНАМІКИ

Викладено результати дослідження можливостей нових пакетів прикладної математики до рішення задач гідродинаміки течій з вільними поверхнями. Показана ефективність пакету Maple в задачах про стискання сферичних порожнин у рідині при наявності полів гідродинамічного тиску, сили тяжіння, поверхневого натягу та в'язкості. Виявлені особливості процесу стискання в цих полях

Вступ

Динаміка порожнин малого діаметра притягувала і продовжує притягувати увагу дослідників їх поведінки в різних умовах руху, оскільки їх поява супроводжує багато процесів в хімії, екології, геофізиці тощо. Досить сказати, що поява таких порожнин на лопатях гідротурбін, гвинтів корабельних двигунів часто приводила до виходу їх з ладу. Тому цій темі присвячено велику кількість досліджень, що можна бачити з оглядів [1–3], а складність математичного апарату, що при цьому використовується, і неможливість отримати точні рішення [4, 5] привели великої кількості наближених методів. Проте широке розповсюдження нових інформаційних технологій і комп'ютеризація досліджень дозволяють у наш час застосувати до рішення подібних задач достатньо прості обчислювальні методи на базі уже існуючих пакетів програм прикладної математики. Саме це і є метою статті.

Постановка задачі

Як відомо, задача про рух порожнини в рідині зводиться до інтегрування рівнянь Нав'є-Стокса [6]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (1)$$

Тут використані загальноприйняті позначення: \vec{v} - вектор швидкості, \vec{F} - вектор зовнішніх (масових) сил, p -- гідродинамічний тиск, ρ -- густина, ν -- кінематичний коефіцієнт в'язкості, ∇ - оператор Гамільтона. Будемо вважати, що

рідина нестислива ($\text{div} \vec{v} = 0$), а зовнішні сили мають потенціал: $\vec{F} = -\nabla U$. Тоді рівняння Нав'є-Стокса (1) приймають вигляд

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) - \nu \text{rot} \text{rot} \vec{v}.$$

Якщо рух безвихровий, рівняння Нав'є-Стокса спрощуються ще більше

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right). \quad (2)$$

З рівняння (2) випливає, що диференціальні рівняння безвихрового руху в'язкої нестисливої рідини не містить характеристик сил тертя. І хоч в'язкість уже не входить в рівняння (2), в'язкі напруження не зникають, оскільки нулю дорівнює лише рівнодійна в'язких сил. Отже, в таких течіях ефект в'язкості проявляється лише в пристінній (примежовій) області течії.

Розв'язок задачі

В подальшому будемо розглядати течії, що мають переважно радіальний характер або ж мають інші форми симетрії. В таких течіях умова нерозривності ($\text{div}(\vec{v}) = 0$) течії виражається рівнянням Лапласа, розв'язок якого при відповідних умовах на межі порожнини, всередині її та зовні потрібно знайти.

Розглядатимемо рівняння Лапласа в сферичних координатах r, ϑ, ψ , яке при осесиметричній течії має вигляд

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0. \quad (3)$$

Проінтегрувавши це рівняння, отримаємо вираз для потенціалу швидкостей сферично симетричного розширення

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C}{r^2}, \quad \varphi = -\frac{C}{r},$$

Нехай в деякий час в рідині утворилася сферична порожнина, яку назвемо бульбашкою. На межі бульбашки, тобто при $r = R$, швидкість течії має дорівнювати швидкості стискання стінок бульбашки, тобто $v_r(R) = \dot{R}$. З цієї умови, скориставшись виразом для радіальної швидкості $v_r = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{C}{r^2}$, можна визначити сталу інтегрування C , радіальну швидкість і потенціал:

$$\dot{R} = \frac{C}{R^2} \Rightarrow C = \dot{R}R^2 \Rightarrow v_r = \frac{\dot{R}R^2}{r^2}, \varphi = -\frac{\dot{R}R^2}{r}. \quad (4)$$

Стискання порожнини

Рівняння (2) при потенціальній течії ($\vec{v} = \nabla\varphi$) перетворюється в інтеграл Лагранжа-Коші

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{p}{\rho} = f(t), \quad (5)$$

Тут тиск p у порожнині розглядається, як узагальнений тиск [7], який складається з тисків за рахунок поля сил тяжіння p_g , поверхневого натягу p_τ та в'язкості p_μ . Дійсно, головні нормальні до площадок напруження p_1, p_2, p_3 пов'язані з головними нормальними швидкостями деформацій $\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}, \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}, \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}$ співвідношеннями

$$p_1 = p - 2\mu\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} + \frac{2}{3}\mu\frac{\partial e}{\partial t},$$

$$p_2 = p - 2\mu\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t} + \frac{2}{3}\mu\frac{\partial e}{\partial t}$$

$$p_3 = p - 2\mu\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t} + \frac{2}{3}\mu\frac{\partial e}{\partial t},$$

у яких $p = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$ – середній тиск, а $e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – збільшення об'єму. При сферично симетричній течії

радіальний напрям збігається з головною віссю і тому швидкість деформації можна визначити формулою

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{2}{R}\frac{dR}{dt}.$$

На межі порожнини тиск p , що діє на неї з боку рідини, дорівнює P і тоді складова головного тиску p_1 повинна дорівнювати тиску p_i газу чи пару, що є в порожнині. Тоді з урахуванням поверхневого натягу

$$p = p_i - \frac{2\tau}{R} - 4\mu\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Якщо рідина нестислива, то $\frac{\partial e}{\partial t} = 0$.

Отже, в'язкість входить у граничні (межові) умови, а тиск на поверхню порожнини можна обчислити за формулою

$$p = p_i + p_\tau + p_g + p_\mu,$$

де

$$p_g = \rho g Z, \quad p_\tau = -\frac{2\tau}{R}, \quad p_\mu = -4\mu\frac{\dot{R}}{R}$$

тобто $p = p_i + \rho g Z - \frac{2\tau}{R} - 4\mu\frac{\dot{R}}{R}$, а p_i – тиск у порожнині.

Використаємо в рівнянні (5) вираз (4) для потенціалу. Тоді інтеграл Лагранжа-Коші перетворюється в таке рівняння

$$-\frac{\dot{R}R^2 + 2R\dot{R}^2}{r} + \frac{1}{2}\frac{\dot{R}^2 R^4}{r^4} + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (6)$$

Рівняння (6) описує тиск в рідині в довільній її точці з радіальною координатою r поза бульбашкою радіуса R . Якщо вибрати точку досить далеко від бульбашки, то в цій точці (при $r \rightarrow \infty$) тиск дорівнює тиску p_∞ , а решта членів зникає. Записавши інтеграл Лагранжа-Коші (6) для цієї далекої точки, знаходимо значення функції $f(t) = \frac{p_\infty}{\rho}$. Отже, поклавши в

рівнянні (2) $r = R$, тобто вимагаючи, щоб воно виконувалося на межах бульбашки, приходимо до рівняння для радіуса бульбашки

$$-\ddot{R}R - 2\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho}$$

Або інакше

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_i - p_\infty}{\rho} + \frac{V_0^2(h + R \cos \vartheta)}{d_0 Fr^2} - \frac{2V_0^2 d_0}{R We} - 4 \frac{\dot{R} V_0 d_0}{R Re},$$

яке можна назвати узагальненого рівнянням *Релея*. тут h – зміщення центру порожнини, як твердого тіла, вверх під дією сили Архімеда, а $h + R \cos \vartheta$ – зміщення довільної точки поверхні порожнини.

Введемо відносні величини, взявши за основу "швидкість" $V_0 = \sqrt{\frac{p_\infty - p_i}{\rho}}$ і

початковий радіус $R_0 = \frac{d_0}{2}$. Оскільки

$$\frac{d}{dt} = \frac{V_0}{R_0} \frac{d}{d\bar{t}} \quad \text{і} \quad \frac{dR}{dt} = \frac{V_0}{R_0} \frac{dR}{d\bar{t}} = V_0 \frac{d\bar{R}}{d\bar{t}},$$

то рівняння набуває вигляду

$$R(t)\ddot{R}(t) + \frac{3}{2}(\dot{R}(t))^2 - \frac{h + R \cos \vartheta}{2Fr^2} + \frac{4}{R(t)We} + \frac{8}{R(t)Re} \dot{R}(t) + 1 = 0. \quad (7)$$

В рівнянні (7) просто опущені верхні риси, тобто тут R є не що інше, як \bar{R} і т. ін., а $Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gd_0}}$, $We = \frac{\rho V_0^2 d_0}{\tau}$,

$Re = \frac{\rho V_0 d_0}{\mu}$ – числа Фруда, Вебера і

Рейнольдса відповідно по діаметру початкової порожнини за умови, що. Зауважимо також, що це рівняння описує процес стиску порожнини, оскільки $p_\infty > p_i$. Процес розширення описуватиме це ж саме рівняння, але останнім доданком його має бути (-1) замість (+1).

Наявність у цьому рівнянні $\cos \vartheta$ говорить про те, що дія поля сили тяжіння приводить до несиметричного стиску чи розширення порожнини. Проте на початкових стадіях процесу величину швидкості $u = \dot{h}$ підйому центра порожнини мо-

жна наближено розрахувати за формулою [8]

$$u = \frac{1}{Fr^2 R_0^3} \int_0^t R_0^3(t) dt,$$

де $R_0 = \sqrt{1 - 1,16t^2}$ при стиску і

$$R_0 = \begin{cases} \sqrt{0,84t^2 + 0,11t + 1}, & 0 \leq t \leq 3, \\ 0,82t + 0,4, & t > 3 \end{cases} \quad \text{при ро-}$$

зширенні.

Можна вважати, що на початкових стадіях процесу швидкість пропорційна часу, тоді $h = \frac{t^2}{2Fr^2}$, а саме рівняння буде таким

$$R(t)\ddot{R}(t) + \frac{3}{2}(\dot{R}(t))^2 + \frac{4}{R(t)We} + \frac{8}{R(t)Re} \dot{R}(t) = -1 + \frac{t^2}{4Fr^2}.$$

Подібне рівняння (без урахування поля сили тяжіння) вперше розглядав Поріцький, пізніше Шу, Забабахін [2] та ін.. Розв'язувалося воно чисельними і надто складними методами. Нині воно може бути розв'язане за допомогою пакетів прикладних програм таких, як *Matlab* [7] або *Maple* [8].

Ось як виглядає програма розв'язку цього рівняння, наприклад, у програмі *Maple*. Процедура розв'язку починається з запису самого диференціального рівняння з початковими умовами. Підставивши відповідні значення параметрів Fr , We , Re та вибравши відповідні початкові умови (наприклад,

$$Fr = 10^6, We = 10^6, R(0) = 1, R'(0) = 0),$$

задачі Коші присвоюємо ім'я

$$U := \left\{ R(t) \cdot \text{diff}(r(t), t, t) + \frac{3}{2} \cdot (\text{diff}(R(t), t))^2 - \frac{t^2}{(2 \cdot 10^6)^2} + \frac{8}{14 \cdot R(t)} \cdot \text{diff}(R(t), t) + \frac{4}{10^6 \cdot R(t)} = -1, R(0) = 1, D(R)(0) = 0 \right\}.$$

Далі використовується функція *dsolve()*, яка забезпечує чисельний розв'язок цього нелінійного диференціального рівняння з виводом значень функ-

ції та її першої похідної $R(x), R'(x)$ в заданих точках, наприклад:

```
V := dsolve(U, numeric, output = array([[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1, 1.2, 1.4]]));
```

При бажанні отримати рисунок записується нова процедура чисельного розв'язку

```
> V := dsolve(U, numeric);
V := proc(x_rkf45) ... end proc
```

після якої використання пакету *plots* і функції *odeplot()* у відповідному форматі *withplots:odeplot(M, [[x, R(x)], [x, diff(R(x), x)], x=0.10]*; приводить до появи графіків шуканої функції та її похідної.

Розв'язок задачі

Дослідження показують, що режим стиску суттєвим чином залежить від параметрів Fr, We, Re . Якщо, наприклад, виключити вплив сили тяжіння і поверхневого натягу ($Fr = 10^6, We = 10^6$), то при трьох значеннях чисел Рейнольдса маємо таку картину

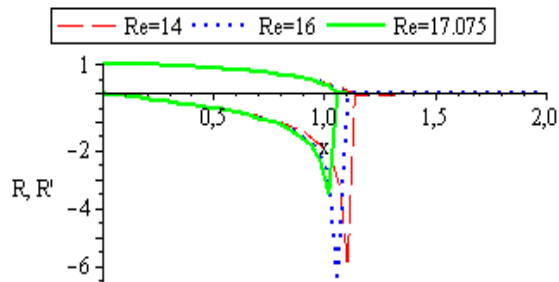


Рис.2. Вплив в'язкості при We=10

Таблиця 1. Значення часу стисання

Re	18	20	40	80	100
t	1,0470	1,0298	0,965	0,938	0,934
Re	200	400	600	800	1000
t	0,924	0,919	0,91778	0,9170	0,916

Це також добре видно і з графіків на рис. 2, на якому представлені результати розрахунків при числі Вебера $We=10$.

Зменшення числа Рейнольдса вдвоє (що означає збільшення впливу в'язкості) майже на чверть (23%) збільшує час стисання.

Як відомо [2], час повного стисання порожнини без урахування поля сили тяжіння, поверхневого натягу та в'язкості можна розрахувати через бета- і гама-функції. Інтеграл, який виражає зв'язок між часом стиску і радіусом порожнини, можна обчислити чисельно. Точне його значення виражається тільки у випадку повного часу стиснення і то у вигляді бета-функції. Тепер, користуючись згаданими пакетами прикладних програм це можна зробити досить просто. Maple інтеграл, що виражає залежність відносного радіусу від безрозмірного часу, можна обчислити за такими формулами:

$$\begin{aligned}
 > t(x) := - \int_1^x \text{sqrt}\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{z^3}{(1-z^3)}\right)^{\frac{1}{2}} dz; \\
 t := x \rightarrow - \left(\int_1^x \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{z^3}{1-z^3}} dz \right) \\
 > t(0.000001); \\
 0.914681356.
 \end{aligned}$$

З графіків рис.1 видно, що є критичне значення числа Рейнольдса, і його наближене значення $Re \cong 17,1894$. При всіх $Re \geq 17,1894$ похідна має розрив, який при $Re \rightarrow \infty$ наближається до $t \cong 0,91468$, що, як ми знаємо, є часом повного стисання сферичної порожнини без урахування сил поверхневого натягу, тяжіння і в'язкості. Тобто, при цих значеннях числа Рейнольдса час повного стиску порожнини цілком скінченний. Як саме залежить час повного стисання порожнини від числа Рейнольдса, показує таблиця №1, з якої видно, що наявність в'язкості збільшує час стисання.

При всіх $Re < 17,1894$ похідна $\dot{R}(t)$ уже не має розриву (наприклад, при $Re = 17,1892$ розриву вже немає, але це настільки близько до розриву, що навіть при 500000 точок метод Рунге-Кутти далі

$t = 1,102$ не може рахувати). Лише починаючи з $Re \leq 16$ функція $\dot{R}(t)$ при зростанні часу спершу спадає до певної від'ємної величини, а потім зростає, необмежено наближаючись до нуля. При цьому для кожного значення $Re < 17,1894$ існує своє значення часу $t_k > 0,91468$, при якому програма вже не може вирахувати шукані величини із-за слабкої збіжності процесу. Так для $Re = 10$ це значення $t_k \cong 5,387$, а для $Re = 14$ воно дорівнює $t_k \cong 3,673$. Це означає, що час повного стиску теоретично розтягується до нескінченності, оскільки ці критичні значення часу збільшуються при збільшенні точок методу, а, крім того, він залежить від довжини інтервалу, на якому відшукується рішення. Так для $Re = 14$ при довжині інтервалу $(0 \div 20)$ $t_k = 3,673$, а на інтервалі $(0 \div 10)$ $t_k = 3,469$. Як саме розподіляються критичні значення часу стисання порожнини при різних значеннях чисел Рейнольдса показує таблиця №2.

Таблиця 2. Критичні значення часу

Re	2	3	4	5	6
t_k	22,448	16,326	12,755	10,714	9,184
Re	7	8	9	10	11
t_k	7,653	7,142	6,122	5,387	5,102
Re	12	13	14	15	16
t_k	4,592	4,082	3,673	3,061	2,449

А наочно можна бачити цей процес стисання на рис. 3.

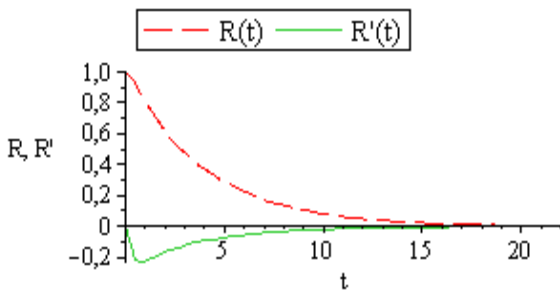


Рис.3. Стисання порожнини при $Re=2$

Цікаво простежити, як впливає сила поверхневого натягу на стисання порожнини. За своєю суттю поверхневий натяг має прискорювати процес стисання.

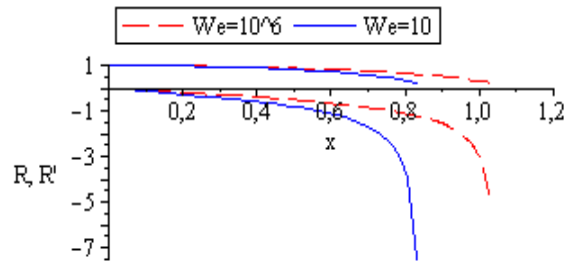


Рис.4. Вплив поверхневого натягу при $Re=18$

На рис.4 показані залежності радіуса $R(t)$ порожнини та швидкості стисання $\dot{R}(t)$ від часу стисання при числі кавітації $Re = 18$ і двох різних значеннях числа Вебера. Видно, що сила поверхневого натягу, як це і має бути за характером впливу цієї сили, прискорює процес стисання особливо на завершальній його стадії, коли радіус порожнини стає малим, а кривизна великою. Проте величина цього впливу суттєвим чином залежить від числа Вебера, і тільки в діапазоні $We < 100$ вплив стає помітним.

При сильному впливі сил поверхневого натягу та в'язкості вплив сили тяжіння незначний. Проте, коли дія цих сил незначна, то значною стає дія поля сили тяжіння, що добре видно з рис.5.

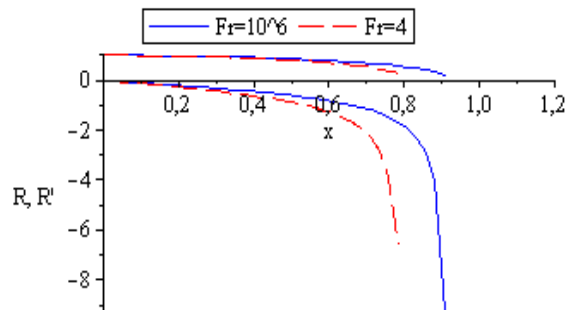


Рис.5. Вплив сили тяжіння при $Re=We=10^6$

Його дія стає помітною уже на половині часу стисання. Так при $Fr = 4$ значно скорочується час повного стисання, тобто наявність поля сили тяжіння сприяє процесу стисання.

В пакеті *Matlab* ця ж задача розв'язується так. Записується *m-files*:

```

%y*y''+1.5*(y')^2-
h/2Fr^2+(8/(y*Re))*y'+4/(We*y)=-1
%Записуємо рівняння відносно другої
%похідної
%y''=-1.5*((y')^2)/y+h/2Fr^2-
%(8/(y^2*Re))*y'-4/(We*y^2)+1/y
    
```

```

%Перетворюємо рівня до нормаль-
ної сис
%теми рівнянь першого порядку
%y=y1
%y1'=y2
%y2'=-1.5*((y')^2)/y+h/2Fr^2-
%(8/(Re*y^2))*y'-4/(We*y^2)+1/y
% Наближено вважаємо
h=x^2/(2Fr^2)
% Тепер записуємо m-файл
function F=rogic_n(x,y)
Re=18;
We=10^6;
Fr=10^6;
F=[y(2);-
1.5*((y(2)).^2)./y(1)+x.^2./((2*Fr^2).^2*y(1
))-8*y(2)./(Re*y(1).^2)-1./y(1)];
% Для рішення рівняння тепер з ко-
мандного рядка треба запустити
% команду-солвер:
%[x,y]=ode45('rogic_n',[0 6],[1 0]);
%plot(x,y);
%Тут [0 6] - матриця, що визначає
%відрізок, на якому існує розв'язок
% [1 0] - матриця початкових умов
%plot(x,y); - команда рисування
графіка
Знаком % позначаються коментарі,
які програма пропускає.

```

Висновки

Програма, як бачимо, дуже проста. Проте *Matlab* в таких задачах не дуже зручний в тому сенсі, що при наявності критичних значень часу при тих чи інших значеннях числа Рейнольда програма дуже довго працює (а то і зовсім не виходить на результат), якщо інтервал часу включає цю критичну точку. Якби завчасно можна було визначити цю критичну точку, то інтервал розв'язку можна було б задати до цієї точки і тоді *Matlab* прекрасно справився б з задачею. *Maple* ж в такому випадку просто не обчислює шуканих величин біля цих точок, але видає їх значення.

Список літератури

1. Воронин В.В., Мачехина Т.Н. Современное состояние исследований ка-

витационных течений. Обзоры, .М.:ОНТИ ЦАГИ,1985.- N 651. – 146 с.

2. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. –М. : Мир, 1976. – 688 с.

3. Brennen C.E. Fission of collapsing cavitation bubbles. J. Fluid Mech. 2002, v.472. – P.153–166.

4. Plesset M.S., Prosperitti A. Bubble dynamics and cavitation. Ann. Rev. Fluid mech.–1977. – N9. – P. 145–185

5. Tunc Mutlu, Delate Can F. Energy dissipation due to fission of cavitating bubbles. Fift internat. sympos. on cavitating. Osaka, Japan, November 1-4. – 2003.

6. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: – Л. : ГИТТЛ, 1947. – 928 с.

7. Буйвол В.М. Концепція гіпотетичних течій, Вісник НАУ, №1, 2004, С. 176–179

8. Буйвол В.Н. Движение и деформация газонаполненных полостей в жидкости. –Сб. Прикл. гидромеханика. –Киев : Наук. думка, 1989. – С. 5 –10.

9. Курбатова Е.А. Самоучитель Matlab 7. –Диалектика, Москва-Санкт-Петербург-Киев, 2006. – 250 с.

10. Сдвижков О.А. Математика на компьютере: Maple 8. М.: Солон-Пресс, 2003. – 172 с.

11. Буйвол В.М., В.В. Наконечна, Н.Б. Фоміна, Інформаційні технології в задачах гідродинаміки. Зб. наук. праць «Проблеми автоматизації та управління», №3(21), 2007.– С. 14–19.

Подано до редакції 25.10.2010