УДК 519.863:519.812 (045)

Куклінський М.В., к.т.н.

ФОРМУВАННЯ НОРМАЛІЗОВАНОГО КРИТЕРІАЛЬНОГО ПРОСТОРУ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Інституту комп'ютерних інформаційних технологій Національного авіаційного університету

Розглянуті основні вимоги, які ставляться до критеріїв в багатокритеріальних задачах. Описано процес нормалізації параметрів критеріальних функцій при формуванні парето-оптимальної множини

Вступ

Як відомо складний об'єкт дослідження не може характеризуватися якоюсь однією «найважливішою» ознакою. При його описі необхідно одночасно враховувати багато неподільних один від одного властивостей. Іншими словами, для дослідження складного об'єкту сучасний системний підхід вимагає залучення всього спектру його властивостей. Крім цього складні об'єкти доводиться розглядати не ізольовано, а в чисельних суперечливих взаємодіях і, що важливо, у різних можливих умовах.

Оскільки перебуваючи у різних умовах складні об'єкти виявляють різні системні властивості, то необхідно розглядати не одну теоретичну модель цього об'єкту, а множину різних, іноді концептуально суперечливих моделей. Однак жодною із них не можна нехтувати, оскільки кожна характеризує якусь властивість досліджуваного явища і жодна не може бути прийнята як єдина, тому що не виражає повного комплексу всіх властивостей об'єкту.

Множинні властивості складного об'єкта в тих чи інших умовах кількісно оцінюються відповідними частковими критеріями. Проте, сприяючи набуванню різних властивостей відповідні умови також оцінюються різними частковими критеріями. Таким чином можна сказати, що взаємовиключні теоретичні моделі об'єкту характеризуються суперечливими частковими критеріями, кожний з який застосовується у своїх, особливих умовах. І тільки повна сукупність часткових критеріїв дає можливість адекватної оцінки функціонування цього об'єкту. Тому, для цілісного сприйняття складного об'єкту в різних умовах його роботи необхідно застосовувати багатокритеріальний підхід.

Постановка проблеми

Змістовна сутність багатьох практичних задач полягає у виборі таких умов функціонування об'єкта дослідження, які дають йому змогу проявити свої оптимальні властивості. Якщо умови, від яких залежать ці властивості, кількісно виразити деякими змінними величинами $x_1, x_2, ..., x_m$, заданими в області визначення *X*, то їх справедливо можна буде назвати аргументами оптимізації. У свою чергу, якщо самі властивості також кількісно виразити за допомогою змінних *f*, тоді їх значення будуть характеризувати якість об'єкта стосовно цих властивостей.

У загальному випадку показники $f_1, f_2, ..., f_s$ називаються критеріями якості та складають вектор $f = \{f_k\}_{k=1}^s$. Його компоненти кількісно виражають властивості об'єкта при заданій сукупності аргументів оптимізації $x = \{x_i\}_{i=1}^m \in X$, а якість рішення оцінюється за сукупністю суперечливих часткових критеріїв, що утворюють *s*-мірний вектор $f(x) = \{f_k(x)\}_{k=1}^s \subset Y, x \in X$ визначений на множині *X*. Тут множина можливих рішень $X \subset E^m$ задана та складається з векторів $x = \{x_i\}_{i=1}^m$ *m*-мірного евклідова простору, вираз $f \subset Y$ означає належність вектора *f* класу *Y* допустимих векторів ефективності, а вектор часткових критеріїв обмежений допустимою областю $f \in M$.

Окрім заданих умов на об'єкт можуть ще впливати і зовнішні фактори r. Хоч ці фактори являються незалежними, відомо, що вони можуть приймати свої значення з компактної множини R, а при розрахунках вважають, що ця множина задана, а вектор зовнішніх впливів відомий [1, 2].

Так як складні об'єкти багатофункціональні, а обмеження накладаються на багато характеристик, то задача їх дослідження за своєю природою є багатокритеріальною.

В самому загальному вигляді розв'язання таких задач полягає у знаходженні такого оптимального рішення $x^* \in X$, яке при заданих умовах, зв'язках і обмеженнях оптимізує вектор ефективності $f(x)$ [3]. Проте така постановка розв'язку є настільки загальною, що використовуватися на практиці майже не може. Тому підсумовуючи вищесказане та описуючи математичну модель пошуку оптимальних рішень необхідно враховувати ряд основних умов як для критеріїв так і для параметрів об'єкту, а саме:

– параметри об'єкту $x_1, x_2, ..., x_m$, з одного боку повинні достатньо повно та достовірно характеризували об'єкт, а з другого, дозволяли знизити розмірність розв'язуваної задачі;

– необхідно врахувати можливість використання найбільш простих методів аналізу цих параметрів;

– необхідно врахувати можливість нормалізації вибраних параметрів, тобто зведення їх до єдиної розмірності або до безрозмірного вигляду;

– сукупність часткових критеріїв $f = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ за якими оцінюється якість об'єкту повинна бути функцією від вибраних параметрів;

– в свою чергу, критерій має бути чутливий до аналізованих варіантів об'єкту, зокрема до обраних параметрів $x_1, x_2, ..., x_m$;

– необхідно задати область існування параметрів для однозначного визначення їх обмежень;

– необхідно забезпечити заданий рівень якості об'єкту та ефективність виконання ним завдань;

– критерії повинні враховувати оцінку ефективності виконання покладених на об'єкт основних завдань;

– критерій повинен бути достатньо простим та наочним, мати явний фізичний сенс, щоб не виникало труднощів при фізичній інтерпретації результатів дослідження;

– обираючи критерії варто також врахувати й наявність тісного зв'язку та протиріч між ними [4].

Аналіз публікації та постановка мети

На сьогодні питанням пошуку оптимальних рішень в задачах критеріальних досліджень приділяється доволі пильна увага. Це підтверджено великою кількістю публікацій, та викликано тим, що дана тематика охоплює дуже широкий спектр задач у найрізноманітніших галузях.

Існує багато видань які класифікують та розкривають різні способи та методи, що використовуються в багатокритеріальних задачах оптимізації. Також багато публікацій присвячені розкриттю основних умов описання математичних моделей пошуку оптимальних рішень. До цієї групи можна віднести статтю [5], де описано метод формування парето-оптимальної множини варіантів побудови складного об'єкту. Проте в запропонованому підході показано, що існують такі ортогональні перетворення, які дозволяють нормалізувати параметри критеріальних функцій, але не розкрито сам процес нормалізації. Метою даної статті являється розкриття процесу нормалізації параметрів критеріальних функцій описаного в статті [5] при формуванні парето-оптимальної множини рішень.

Формування множини парето-оптимальних рішень

Відомо, що за допомогою квадратичної апроксимації критеріальних функцій, при заданих обмеженнях на параметри і двох суперечливих критеріях існує метод, який дозволяє побудувати парето-оптимальну множину рішень [5].

Для цього, кожна цільова функція задається у вигляді квадратичного полінома

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} x_i x_j \ ,$$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} x_i x_j \ ,$$

або у матричному вигляді

$$\begin{aligned} f_1(x) &= A_0 + 2A_1 x + x^T A_2 x \ , \\ f_2(x) &= A_0 + 2A_1 x + x^T A_2 x \ . \end{aligned} \qquad (1)$$

Після знаходження коефіцієнтів a_{ij} формуються матриці A_0, A_1 та A_2 для критеріальних функцій, та використовуючи правила диференціювання матричних виразів за скалярним аргументом, значення $\frac{f_1(x)}{dx}$ та $\frac{f_2(x)}{dx}$ прирівнюються до нуля, та знаходяться значення координат безумовних мінімумів критеріальних функцій. Для $f_1(x)$ це точка $A(\mathrm{opt}\, x_1^1, \mathrm{opt}\, x_2^1)$, для $f_2(x)$ – точка $B(\mathrm{opt}\, x_1^2, \mathrm{opt}\, x_2^2)$ (рис. 1).

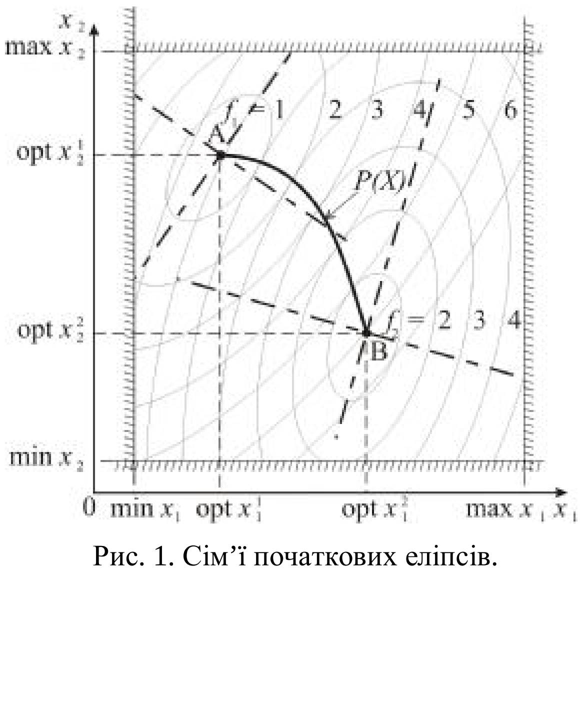

Рис. 1. Сім’ї початкових еліпсів.

Якщо ці точки належать області допустимих рішень можна говорити, що рішення, які відповідають цим точкам, є оптимальними за критеріями $f_1(x)$ та $f_2(x)$ відповідно. Якщо точки не належать області допустимих рішень, потрібно вводити істотні обмеження та проводити додаткові дослідження, які ґрунтуються на методі множників Лагранжа [2].

У першому випадку, коли критеріальні поверхні $f_1(x)$ та $f_2(x) = \mathrm{const}$ є багатовимірними еліпсоїдами, а точки *A* та *B* належать області допустимих рішень, надалі розглядатиметься саме цей випадок, можна казати, що безліч точок просторової кривої *AB*, яка є геометричним місцем точок дотику ліній другого порядку сім’ї f_1 з лініями, що належать сім’ї f_2, відповідає безлічі парето-оптимальних рішень.

Проте, для подальшого аналізу та зіставляння компонент критеріїв $f_1(x)$ та $f_2(x)$ ці компоненти повинні мати однакову розмірність, тобто бути нормалізовані.

Поворот системи координат

Для того, щоб привести початкові сім’ї ліній другого порядку f_1 та f_2 до однієї розмірності, необхідно з критерійними функціями $f_1(x)$ та $f_2(x)$ провести такі ортогональні перетворення, які б дозволили перейти в нову систему координат за допомогою заміни змінних, тобто перейти до нового базису, але в тому ж критерійному просторі.

Але це треба зробити так, щоб властивості початкових сімей ліній другого порядку f_1 та f_2 не змінювалися при переході з початкової системи координат в нову систему та навпаки.

Інакше кажучи необхідно повернути осі координат обох сімей ліній другого порядку, а також перемістити початок координат однієї з сімей. Для подальшої наочності подамо квадратичний поліном у вигляді (1) при $m = 2$,

$$f_1(x_1,x_2)=a_{11}^1x_1^2+2a_{12}^1x_1x_2+a_{22}^1x_2^2+2a_1^1x_1+2a_2^1x_2+a_{00}^1$$
$$f_2(x_1,x_2)=a_{11}^2x_1^2+2a_{12}^2x_1x_2+a_{22}^2x_2^2+2a_1^2x_1+2a_2^2x_2+a_{00}^2 \quad (2)$$

тут верхні індекси при коефіцієнтах a_{ij} відповідають номеру критерію, та повернемо систему координат проти годинникової стрілки на кут f. Тоді базисні вектори e_1, e_2 перейдуть у нові базисні вектори, відповідно

$$\tilde{e}_1=\cos f e_1+\sin f e_2,$$
$$\tilde{e}_2=-\sin f e_1+\cos f e_2.$$

Старі координати x_1, x_2 будуть виражатися через нові координати $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2$ так:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\tilde{x}_1\tilde{e}_1+\tilde{x}_2\tilde{e}_2=\begin{bmatrix}\cos f & -\sin f\\ \sin f & \cos f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}.$$

У нових координатах квадратична частина (1) $f_2(x_1,x_2)$ набуває вигляду:

$$f_2=[\tilde{x}_1\quad \tilde{x}_2]\left(\begin{bmatrix}\cos f & \sin f\\ -\sin f & \cos f\end{bmatrix}\times\right.$$
$$\left.\times\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos f & -\sin f\\ \sin f & \cos f\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}$$

Матриця в дужках є добутком трьох матриць вигляду $\tilde{A}=Q^TAQ$, причому A – симетрична матриця. Звідси

$$\tilde{A}^T=\left(Q^TAQ\right)^T=Q^TA^T\left(Q^T\right)^T=Q^TAQ=\tilde{A}.$$

Отже $\tilde{A}=[\tilde{a}_{ij}],\ 1\le i,j\le 2$, залишається симетричною матрицею.

Спробуємо вибрати кут f так, щоб матриця $\tilde{A}$ набула діагонального вигляду:

$$\begin{bmatrix}\cos f & \sin f\\ -\sin f & \cos f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos f & -\sin f\\ \sin f & \cos f\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}l_1 & 0\\ 0 & l_2\end{bmatrix}$$

Отже необхідно прирівняти до нуля елемент

$$\tilde{a}_{12}=\tilde{a}_{21}=$$
$$=\left(\cos^2 f-\sin^2 f\right)a_{12}-\sin f\cos f\left(a_{11}-a_{22}\right)=$$
$$=\cos(2f)a_{12}-\sin(2f)\frac{a_{11}-a_{22}}{2}=0$$

Якщо $a_{12}=0$, то можна взяти $f=0$. Якщо $a_{12}\neq 0$, то потрібно розв'язати рівняння

$$\mathrm{ctg}(2f)=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}.$$

Очевидно, що розв'язок цього рівняння існує. Тому завжди знайдеться таке f, при якому $\tilde{A}$ набуває діагональний вигляд. Крім того, при будь-якому виборі f дістаємо

$$l_1=\cos^2 f a_{11}+2\cos f\sin f a_{12}+\sin^2 f a_{22},$$
$$l_2=\sin^2 f a_{11}-2\cos f\sin f a_{12}+\cos^2 f a_{22}.$$

Звідси $l_1+l_2=a_{11}+a_{22}$. Водночас, використовуючи рівність

$$\begin{bmatrix}\cos f & \sin f\\ -\sin f & \cos f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos f & -\sin f\\ \sin f & \cos f\end{bmatrix}=$$

$=\begin{bmatrix}l_1 & 0\\ 0 & l_2\end{bmatrix}$, а також те, що визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників, знаходимо $l_1l_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. Отже, l_1 та l_2 корені квадратного рівняння

$$l^2-\left(a_{11}+a_{22}\right)l+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)=0$$

Зауважимо, що ліва частина цього рівняння є точно $\det\begin{bmatrix}a_{11}-l & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-l\end{bmatrix}$. Цей многочлен від l є нічим іншим, як характеристичним многочленом матриці $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}$, отже, l_1 та l_2 є власними значеннями цієї матриці.

Як бачимо за допомогою повороту початкової системи координат на деякий кут f рівняння $f(x_1,x_2)=0$ перетвориться в нових координатах до вигляду

$$l_1\tilde{x}_1^2+l_2\tilde{x}_2^2+2b_{13}\tilde{x}_1+2b_{23}\tilde{x}_2+b_{33}=0$$

де $\begin{bmatrix} b_{13} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos f & -\sin f \\ \sin f & \cos f \end{bmatrix}$, $b_{33} = a_{33}$, l_1 и l_2 – власні значення матриці A_2 квадратичного полінома (1).

Переміщення системи координат

Природно припустити, що квадратична частина f_2 в повернутій системі координат не є тотожним нулем. Отже l_1 та l_2 не дорівнюють нулю одночасно.

Тоді виділимо в квадратичній частині повні квадрати

$$l_1 \tilde{x}_1^2 + 2b_{13}\tilde{x}_1 =$$
$$= l_1\left(\tilde{x}_1^2 + 2\frac{b_{13}}{l_1}\tilde{x}_1 + \frac{b_{13}^2}{l_1^2}\right) - \frac{b_{13}^2}{l_1^2} =$$
$$= l_1\left(\tilde{x}_1 + \frac{b_{13}}{l_1}\right)^2 - \frac{b_{13}^2}{l_1^2},$$

$$l_2 \tilde{x}_2^2 + 2b_{23}\tilde{x}_2 =$$
$$= l_2\left(\tilde{x}_2^2 + 2\frac{b_{23}}{l_2}\tilde{x}_2 + \frac{b_{23}^2}{l_2^2}\right) - \frac{b_{23}^2}{l_2^2} =$$
$$= l_2\left(\tilde{x}_2 + \frac{b_{23}}{l_2}\right)^2 - \frac{b_{23}^2}{l_2^2}.$$

Перемістимо декартову систему координат $\tilde{x}_1$ та $\tilde{x}_2$, помістивши її початок у точку

$$O' = \left(-\frac{b_{13}}{l_1}, \quad -\frac{b_{23}}{l_2}\right).$$

Тоді нові координати z_1 та z_2 будуть виражаються через $\tilde{x}_1$ та $\tilde{x}_2$ наступним чином:

$$z_1 = \tilde{x}_1 + \frac{b_{13}}{l_1}, \quad z_2 = \tilde{x}_2 + \frac{b_{23}}{l_2}.$$

У нових координатах рівняння $f(x_1, x_2) = 0$ втрачає лінійну частину та набуває вигляду

$$l_1 z_1^2 + l_2 z_2^2 + k = 0,$$

де $k = b_{33} - \dfrac{b_{13}^2}{l_1^2} - \dfrac{b_{23}^2}{l_2^2}$.

Отже, за допомогою повороту та переміщення початкової системи координат рівняння $f(x_1, x_2) = 0$ приводиться в нових координатах до вигляду $l_1 z_1^2 + l_2 z_2^2 + k = 0$. Причому якщо рівняння $f(x_1, x_2) = 0$ в якій-небудь декартовій системі координат має цей вигляд, то в жодній іншій декартовій системі воно не може мати іншого вигляду.

Нормалізація критеріїв

Повертаючись до питання нормалізації, слід зазначити, що новий базис можливо побудувати, привівши квадратичну форму (1) до канонічного вигляду. Як відомо, будь-яка дійсна симетрична матриця ортогонально подібна до дійсної діагональної матриці [6]

$$\Lambda = T^T A T, \qquad T^T = T^{-1}$$

де A – матриця коефіцієнтів a_{ij}, Λ – діагональна матриця власних значень матриці A, T – матриця переходу або транспонування від одного базису до іншого.

У нових змінних квадратична форма (1) виявляється алгебраїчною сумою

$$f = l_1 z_1^2 + l_2 z_2^2 + \ldots + l_m z_m^2$$

У загальному випадку від T можна вимагати лише невиродженості. Пошук відповідної заміни змінних для заданої квадратичної форми називається приведенням до канонічного вигляду. Якщо T – ортогональна матриця, то говорять про приведення (1) до головних осей, а перехід здійснюється за допомогою виразів

$z = Tx$, і відповідно $x = T^{-1}z$.

Але в нашому випадку ми маємо відразу дві квадратичні форми $f_1(x)$ та $f_2(x)$, які являють собою криві другого порядку на площині. Розумно буде намагатися спростити їх рівняння в спільній для обох системі координат. У загальному випадку ця система координат буде афінною. Слід зауважити, що точки в афінному просторі є рівноправними, їх не можна складати одну з одною. В афінному просторі також немає поняття нульової точки, або початку відліку.

Припустимо, що одна з кривих є еліпсом. Тоді перейдемо до такої декартової системи, у якій для неї виходить рівняння $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$. Рівняння другої кривої в цій системі може мати найзагальніший вигляд. Змінивши масштаби по осях, перейдемо до афінної системи, у якій рівнянням еліпса буде рівняння кола $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = 1$. Рівняння другої кривої в новій (афінній) системі все ще має загальний вигляд. Але за допомогою повороту для його квадратичної частини можна отримати форму $l_1 z_1^2 + l_2 z_2^2$. При цьому поворот системи координат не може змінити форми першого рівняння.

Отже, нехай у нас є дві дійсні симетричні матриці A_2^1 та A_2^2, це матриці коефіцієнтів a_{ij} квадратичних частин форм $f_1(x)$ та $f_2(x)$ відповідно, і при цьому A_2^1 позитивно визначена. У загальному випадку позитивність матриць можна перевірити за допомогою критерію Сильвестра.

Тоді існує дійсна невироджена матриця *T* така, що матриці $T^T A_2^1 T$ та $T^T A_2^2 T$ обидві діагональні. Тобто за допомогою матриці транспонування *T* форми $f_1(x)$ та $f_2(x)$ можуть бути одночасно приведені до канонічного вигляду.

Справді, оскільки через позитивну визначеність усі власні значення матриці A_2^1, $l_i > 0$ для усіх *i*. Тоді A_2^1 ортогонально подібна або конгруентна до діагональної матриці Λ

$$\Lambda = \begin{bmatrix} l_1 & \\ & l_2 \end{bmatrix} = Q^T A_2^1 Q, \quad Q^T = Q^{-1}$$

де Q - матриця власних векторів матриці A_2^1.

Далі зауважимо, що A_2^1 також конгруентна одиничній матриці *I*

$$I = \Lambda^{-1/2} Q^T A_2^1 Q \Lambda^{-1/2} = \left(Q\Lambda^{-1/2}\right)^T A_2^1 \left(Q\Lambda^{-1/2}\right).$$

Нехай те ж перетворення конгруентності в застосуванні до A_2^2 дає матрицю

$$C = \left(Q\Lambda^{-1/2}\right)^T A_2^2 \left(Q\Lambda^{-1/2}\right).$$

Легко перевірити, що *C* залишається дійсною симетричною матрицею. Отже, за допомогою ортогональної матриці *V*, яка є матрицею власних векторів матриці *C*, отримуємо діагональну матрицю $D = V^T C V$. У даному випадку *D* буде діагональною матрицею власних значень матриці *C*

$$D = \begin{bmatrix} l_1^c & \\ & l_2^c \end{bmatrix}.$$

Водночас, $V^T I V = I$. Остаточно $I = T^T A_2^1 T$, $D = T^T A_2^2 T$, де $T = Q\Lambda^{-1/2} V$.

Отже, для того, щоб нормалізувати критерії $f_1(x)$ та $f_2(x)$, тобто привести їх до канонічного вигляду, потрібно:

– виділити хоча б одну позитивно визначену квадратичну частину цих критеріїв, наприклад, нехай у нашому випадку позитивно визначеною буде квадратична частина першого критерію, тобто A_2^1;

– знайти власні значення та власні вектори позитивно визначеної матриці A_2^1 та скласти матриці Λ і *Q*;

– за допомогою квадратичної частини другого критерію A_2^2 та матриць Λ і *Q* обчислити матрицю *C;*

– знайти власні значення та власні вектори матриці *C* і скласти матриці *D* та *V*;

– за допомогою матриць Λ, *Q* та *V* обчислити матрицю транспонування *T*, саме з її допомогою і буде здійснюватиметься перехід до нового базису.

Після діагоналізації критеріальні функції (2) , матимуть такий вигляд

$$f_1(z_1, z_2) = (z_1 - z_{01})^2 + (z_2 - z_{02})^2 + k_1$$

$$f_2(z_1, z_2) = l_1 z_1^2 + l_2 z_2^2 + k_2$$

або в загальному вигляді

$$f_1(z_1, z_2, \ldots, z_m) = (z_1 - z_{01})^2 + (z_2 - z_{02})^2 + \ldots + (z_m - z_{0m})^2 + k_1$$

$$f_2(z_1, z_2, \ldots, z_m) = l_1 z_1^2 + l_2 z_2^2 + \ldots + l_m z_m^2 + k_2$$

Перехід від старої системи координат до нової та навпаки здійснюється за допомогою виразів $z = Tx$ та $x = T^{-1}z$.

Отже, за допомогою зміни масштабу по осях, повороту та переміщення системи координат стара сім'я еліпсів (рис. 1) може бути трансформована в сім'ю кіл з центром у точці $(z_{01},\ \ z_{02})$ та сім'ю деформованих еліпсів (рис. 2).

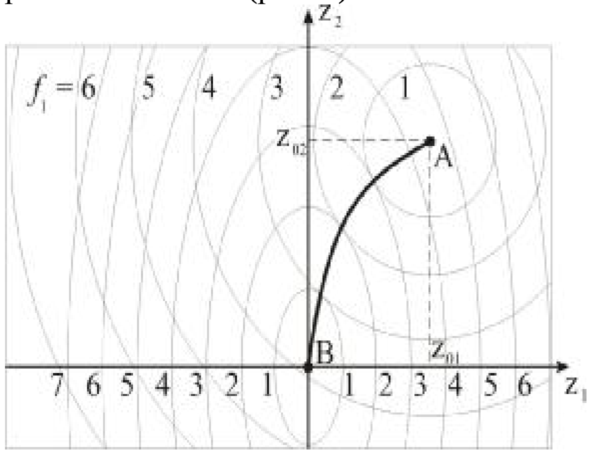

Рис. 2. Сім'ї деформованих еліпсів.

Пошук парето-оптимальних рішень

У змістових термінах ідея розв'язання задачі пошуку парето-оптимальних рішень полягає у визначенні рівняння кривої *AB* в багатовимірному просторі досліджуваних параметрів. Вище зауважувалося, що лінія Парето, або крива *AB*, проходить через точки дотику ізоквант. Причому при переході в нову систему координат ця її властивість не змінюється, вона, як і раніше, залишається геометричним місцем точок дотику ліній другого порядку нової сім'ї f_1 з лініями сім'ї f_2 (рис. 2).

Отже, у цих точках дотична та нормаль до ізоквант сім'ї f_1 збігаються з дотичною та нормаллю до ізоквант сім'ї f_2, що дозволяє сформувати систему рівнянь типу

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 - x_1^O}{\left.\dfrac{df_1}{dx_1}\right|_{M_O}} = \dfrac{x_2 - x_2^O}{\left.\dfrac{df_1}{dx_2}\right|_{M_O}} \\[2ex] \dfrac{x_1 - x_1^O}{\left.\dfrac{df_2}{dx_1}\right|_{M_O}} = \dfrac{x_2 - x_2^O}{\left.\dfrac{df_2}{dx_2}\right|_{M_O}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 - x_1^O}{x_2 - x_2^O} = \dfrac{\left.\dfrac{df_1}{dx_1}\right|_{M_O}}{\left.\dfrac{df_1}{dx_2}\right|_{M_O}} \\[2ex] \dfrac{x_1 - x_1^O}{x_2 - x_2^O} = \dfrac{\left.\dfrac{df_2}{dx_1}\right|_{M_O}}{\left.\dfrac{df_2}{dx_2}\right|_{M_O}} \end{array}\right\}$$

де M_O – точка дотику, x_1^O, x_2^O - координати точки дотику.

Для того, щоб точка дотику була парето-оптимальною треба, щоб вона належала кривій *AB*, тобто $M_O\left(x_1^O, x_2^O\right) \in AB$.

При переході в нову систему координат значення $M_O\left(x_1^O, x_2^O\right)$ буде однаковим, як для сім'ї f_1, так і для f_2, у зв'язку з чим в новій системі координат початкова система рівнянь набуде такого вигляду:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{df_1}{dz_1} = 2\left(z_1 - z_{01}\right) \\[2ex] \dfrac{df_2}{dz_1} = 2\,l_1 z_1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{df_1}{dz_2} = 2\left(z_2 - z_{02}\right) \\[2ex] \dfrac{df_2}{dz_2} = 2\,l_2 z_2 \end{array}\right\}$$

Отже, знаючи одну координату точки, вже з нової системи рівнянь, можна визначити значення іншої точки за формулою

$$z_2 = \frac{z_{02}}{1 - \dfrac{l_2}{l_1}\left(1 - \dfrac{z_{01}}{z_1}\right)}.$$

Можна показати, що в багатовимірному випадку координати точок, що належать лінії Парето, можна визначити за аналогічною формулою

$$z_m = \frac{z_{0m}}{1 - \dfrac{l_m}{l_1}\left(1 - \dfrac{z_{01}}{z_1}\right)}$$

де z_{0m} – m-та координата центру сім'ї f_1 у новій системі координат; l_m – власне значення квадратичної форми f_1.

Отже, знаючи координати центру сім'ї f_1 – $\left(z_{01}, z_{02}, \ldots z_{0m}\right)$, власні значення квадратичної форми f_1 – $\left(l_1, l_2, \ldots, l_m\right)$ та змінюючи значення координати z_1 в діапазоні $[0, z_{01}]$, можна обчислити інші координати точок, що належать лінії Парето. Застосування зворотних перетворень системи координат дозволяє отримати парето-оптимальні рішення у початковій системі координат.

Висновок

Запропонований метод дозволяє отримати з парето-оптимальної області критеріїв за значенням одного будь-якого заданого параметру – увесь набір параметрів складного об’єкту, а також значення критеріальних функцій у багатовимірному критеріальному просторі.

Окрім цього застосувавши до запропонованого методу підходи описані в [7] можна знайти єдиний оптимальний варіант рішення. Відтак, необхідно пам’ятати, що принципова складність завдань вибору при багатьох критеріях полягає в неможливості апріорного визначення того, що називати найкращим варіантом рішенням. Тому при прийнятті рішень дослідники повинні не тільки покладатися на свої досвід та інтуїцію, а й звертатися до добре розробленим в даний час математичним моделям підтримки прийняття рішень, що дозволяють коректно вибирати найбільш кращі альтернативи з наявних [8, 9]. Адже, від того, наскільки грамотно, кваліфіковано здійснюється підтримка прийняття рішень, залежить успішність подальшого розвитку всього дослідження, проектування і розробки в цілому.

Список літератури

1. Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем / А.Н. Воронин. – К. : Наукова думка, 1992. – 160 с.

2. Воронин А. Н. Векторная оптимизация динамических систем / [Воронин А. Н., Зиатдинов Ю. К., Козлов А. И., Чабанюк В. С.]. – К. : Техника, 1999. – 284 с.

3. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / [В. В. Подиновский, В. Д. Ногин]. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 256 с.

4. Куклінський М. В. Використання багатокритеріального синтезу при формуванні обліку складних систем / М. В. Куклінський, Ю. К. Зіатдінов, А. С. Климова // Інформаційно-діагностичні системи : Матеріали VI міжнародної науково-технічної конференції [«Авіа-2004»]. – 2004. – Т. 1. – С. 15.39–15.42.

5. Куклинский М. В. Формирование парето-оптимального множества вариантов построения сложной технической системы / М.Куклинский // Науково-виробничий збірник «Наукові записки УНДІЗ». – 2013. – №3 (27). С. 59–63.

6. Чемоданов Б. К. Математические основы теории автоматического регулирования : учебное пособие для втузов / [Б. К. Чемоданов, В. А. Иванов, В. С. Медведев и др.] ; под ред. Б. К. Чемоданова. – [Т. 1. 2-е изд.]. - М. : Высшая школа, 1977. – 366 с.

7. Куклінський М. В. Проблеми звуження парето-оптимальної множини варіантів побудови авіаційно-космічної системи / М.Куклінський // Збірник наукових праць «Проблеми інформатизації та управління». – 2013. – № 2 (42). С. 56–60.

8. Блюмин С. Л. Модели и методы принятия решения в условиях неопределенности / [С. Л. Блюмин, И. А. Шуйкова]. – Липецк : ЛЭГИ, 2001. – 138 с.

9. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде : количественный подход / В. Д. Ногин. – [2-е изд.]. – М. : Физматлит, 2005. – 144 с.

Статтю подано до редакції 16.12.2013