УДК 004.942(045)

**Кононюк А.Ю.,** к.т.н., доц.,
**Малінкін І.В .,** к.т.н., доц.,
**Малярчук В.О.,** к.т.н., доц.

# ВВЕДЕННЯ В МАТЕМАТИЧНУ ТЕОРІЮ СИСТЕМИ НАУКОВО-ВИЗНАЧУВАНИХ ПОНЯТЬ

**Інституту комп'ютерних інформаційних технологій Національного авіаційного університету**

*Проводиться аналіз побудови математичних моделей науково-визначуваних понять, системи науково-визначуваних понять та їх інтерпретація як абстрактної моделі дискретного обчислювального пристрою. На основі понятійного підходу сформовані науково-визначувані поняття, поняття в теорії системи науково-визначуваних понять та їх визначення. Використовуючи аксіоматичний підхід побудовані елементи теорії системи науково-визначуваних понять на основі сформульованих аксіом*

## *Вступ*

Швидке і широке поширення наукових понять і понятійних виразів розмиває їх межі. Наприклад, іноді говорять, що поняття інформації – чисто інтуїтивне, строго не визначене [1].

У зв'язку з цим проблема формування і уніфікації наукових понять і понятійних виразів набула провідного значення в умовах інтенсивного розвитку світової наукової спільноти. Тому пропонується створити формальну (математичну) теорію науково-визначуваних понять (ТНВП) і систему науково-визначуваних понять (СНВП) керуючись наступними науковими підходами [2, 3]: системним; інформаційним; понятійним; аксіоматичним; класифікаційним (класифікуй і пізнавай); дедуктивним; причинно-наслідковим. В побудові математичної теорії СНВП використовуючи наступні математичні засоби [4, 5, 6, 8]: теорію множин; теорію відношень; теорію поверхонь; теорію просторів; теорію матриць; теорію алгебр; теорію графів; теорію формальної логіки; теорію автоматів; теорію формальних граматик (мов).

Передбачувана теорія СНВП повинна займатися питаннями пізнання (аналізу), творення (синтезу), застосування і використання системи науково-визначуваних понять. Побудова теорії СНВП, як і будь-якій теорії, почнемо з формування базових науково-визначуваних понять і їх визначень [2, 3] .

До базових понять в теорії СНВП віднесемо наступні: система, інформація, поняття, об'єкт, процес, дія, система понять.

Перш ніж сформулювати визначення основного поняття в теорії СНВП, яким, на наш погляд, являється поняття "система", приведемо ряд відмінних ознак, що характеризують систему.

Система повинна [3]:

– реалізовувати задані цілі;
– вирішувати поставлені завдання;
– виконувати властиві їй функції;
– складатися із заданих елементів і зв'язків;
– мати структуру;
– бути організованою згідно поставлених цілей;
– виконувати управляючі функції (дії).

Виходячи з переліку приведених відмінних ознак системи сформулюємо науково-визначуване визначення поняття "система".

Система – це деяка сутність (об'єктна і/або процесна), що виконує за допомогою організованої елементно-зв'язної структури поставлені завдання, шляхом реалізації властивих їй (сутності) функцій під управлінням цілеспрямованих дій, що приводять сутність до заданої цілі.

Усі наступні визначення базових понять базуються на такому ж підході до їх формування, який був використаний при формуванні поняття ”система”.

Інформація – є властивість сутності (об’єктів, процесів, явищ), що відображують себе в загальний простір за допомогою (через) форму, організацію, ознаки, стани.

Базовим поняттям в теорії інформації є величина інформаційної ознаки [7].

Інформаційне середовище. Це поняття пов’язане з поняттям інформаційної роботи в її повному циклі. Повний інформаційний цикл включає фіксацію (народження) інформації, прийом, накопичення, зберігання, перетворення, використання, утилізацію.

Інформаційне середовище – це увесь набір умов для технологічної переробки і ефективного використання знань у вигляді інформаційного ресурсу. До інформаційного середовища відносяться апаратні засоби, програмне забезпечення, телекомунікації, рівень підготовки кадрів – фахівців і користувачів, форми стимулювання, контролю, методи і форми управління, процедури, регламенти, юридичні норми і так далі. Причому в інформаційне середовище входить не лише підсистема, що управляє, але і об’єкт. У інформаційне середовище входять всі фактори, що розглядаються як елементи єдиної системи, що діють на інформаційні процеси і інформаційні системи протягом усього життєвого циклу від проектування до використання.

Категорія інформаційного середовища означає нове розуміння інформаційно-управлінського процесу і самої інформації.

Поняття – замкнута послідовність знаків (символів), що несе семантичне навантаження (понятійний сенс).

Об'єкт – сутність, що має форму, характеризується відмінними властивостями (ознаками) і знаходиться в стані.

Процес – послідовність дій.

Дія – прикладена одним суб’єктом (об’єктом), що змінюється в часі за величиною і/або напрямом, сила до другого суб’єкту (об’єкту).

Вплив. Під впливом будемо розуміти цілеспрямовану (обмежену, інтервальну, зосереджену, сконцентровану) дію, що виконується в (за) заданий проміжок часу.

Процес функціонування СНВП є послідовність зміни її станів, впорядкованих за часом.

Формальний опис процесу функціонування СНВП

$$Z=\langle T, S, F, \alpha\rangle,$$

де: T – час; S – простір станів; F – траєкторія процесу ($F:T\rightarrow S$); α – відношення лінійного порядку на множині T.

Математичне моделювання функціонування СНВП здійснюється шляхом виконання впорядкованої в часі послідовності логічно взаємозв’язаних подій (дій, процедур).

Інформація в СНВП представляється лінгвістичним описом і математичними моделями науково-визначуваних понять і понятійних виразів.

Алгоритм – процедура знаходження єдиного рішення на основі наявних даних.

### *Інтерпретація системи науково-визначуваних понять*

Науково-визначувані поняття, що створюються, характеризуються безконечною множиною різноманітних ознак. Залежно від поставлених завдань перед поняттям істотними є лише окремі (необхідні) інші – несуттєві. Наприклад, при дослідженні міцності сталевого об’єкту інформація про його магнітні характеристики практично ролі не грає.

Для простоти вивчення реальний об’єкт замінюють ідеальним, виділяючи лише найважливіші ознаки для випадку, що розглядається. Такий підхід, що практикується багатьма науками, як відомо, називається абстрагуванням [2, 3]. Після виділення ідеалізованого об’єкту з певним переліком істотних ознак, будується теорія. Достовірність такої теорії залежить від того наскільки вдало прийнята ідеалізація відбиває істотні ознаки об'єкту (процесу), що вивчається. Оцінку цьому можна дати при порівнянні результатів досліджень, отриманих теоретично на основі ідеалізованої моделі і експериментально.

СНВП буде інтерпретуватися нами як абстрактна, але з функціональної точки зору досить точна (адекватна) модель дискретної системи. Вхідна буква – це вхідний сигнал (точніше, комбінація сигналів на усіх входах (портах) пристрою)); вхідне поняття – послідовність вхідних сигналів (кодів), що поступають в СНВП в дискретні моменти часу (такти) t = 1, 2, 3 ..; початкове поняття – послідовність вихідних сигналів (результатів), що видаються СНВП; стани СНВП – це комбінації станів запам'ятовуючих елементів СНВП. Така інтерпретація, на наш погляд, вірна, і саме вона повинна служити основним стимулом становлення і джерелом завдань теорії СНВП. При цьому звертаємо увагу на те, що при використанні абстрактної теорії СНВП не виникає потреби у використанні реальних пристроїв, сигналів, і навіть моментів часу. Усе, що дійсно істотно в абстрактній (тобто ще не дослідженій структурі) теорії СНВП, – це робота з наукоподібними поняттями за наявності кінцевої пам'яті.

Навіть з прикладної точки зору інтерпретація СНВП як пристрою не є універсальною. Хоча відомо, що всяке обчислення можна реалізувати як апаратно (у вигляді пристрою), так і програмно (у вигляді програми для ЕОМ). Це приводить до більш загального тлумачення СНВП як об'єктно-процесної системи (як алгоритмів з кінцевою пам'яттю, багато властивостей яких можна досліджувати безвідносно до способу їх реалізації). Так як в цій роботі йдеться про математичну теорію СНВП, будемо, взагалі-то, розглядати СНВП в основному саме з алгоритмічної точки зору. Математичну теорію СНВП будемо розглядати як частину теорії алгоритмів, центральною проблемою якої є представлення і вивчення можливостей СНВП в термінах безлічі груп впливу, станів, реакцій, з якими працюють окремі підсистеми СНВП. У зв'язку з цим виникає необхідність ввести деякі узагальнюючі поняття, які будуть поширені на усі підсистеми СНВП (наприклад: вплив, елемент впливу, група впливу, реакція і т.д.).

Зупинимося на одному з базових понять «система науково-визначуваних понять» і будемо її інтерпретувати як пристрій, в який здійснюється введення, зберігання і перетворення інформації про поняття (об'єктних і/або процесних) будь-якої природи по заданому процесу (алгоритму), і що працює з частковою участю людини.

Під технологічним процесом будемо розуміти послідовність цілеспрямованих дій (або, технологічний процес – послідовна зміна станів об'єкту, що відбувається під операційними і управляючими діями).

В усіх процесах здійснюються тільки і тільки переміщення одних об'єктів відносно інших об'єктів.

Навіть такі короткочасні процеси, як удару, різання, вирубування, виконують тільки і тільки функції переміщення одних об'єктів (в даному випадку мікрооб'єктів) відносно інших.

У літературних джерелах [2, 3, 8] використовується поняття абстрактний пристрій. Слід зазначити, що в природі таких пристроїв не існує. Для того, щоб переконатися в цьому, звернемося до поняття «абстрагування».

Абстрагування (від латин. abstractio, що означає відволікання) – це уявне відділення найбільш суттєвих, найбільш характерних ознак предмета від самого предмета і перетворення їх в об'єкт самостійного розгляду.

Результат абстрагування прийнято називати абстракцією.

Без абстракції неможливі ні психічні акти, ні процеси комунікації і пізнання (у сенсі розуміння знання). В процесі пізнання люди оперують з абстрактними поняттями так, немов вони існують незалежно від матеріальних носіїв, від яких ці поняття відокремлені. Тому можна говорити про абстрактне поняття, як про модель цього поняття. Існують такі абстрактні моделі понять, як фізичні, аналогові, імітаційні, схематичні, математичні та ін.

У введенні в математичну теорію СНВП ми матимемо справу з такими абстрактними моделями СНВП, як математичні моделі науко-визначуваних понять і систем науко-визначуваних понять.

Математична модель СНВП (ММ СНВП) має бути простіше реальної СНВП в усіх аспектах, за винятком тих, які визначають вибране відношення еквівалентності між реальною СНВП і її моделлю. Обмеженість цього методу полягає в тому, що модель виражає тільки певний аспект СНВП-оригінала, а перевагу – на основі її дослідження можна отримати нові відомості про поведінку СНВП-оригінала і тим самим підготувати передумови для всебічного теоретичного розуміння і пояснення властивостей СНВП, що досліджується.

Визначення ММ СНВП може бути побудовано на основі використання різного математичного апарату [4, 5, 6, 7], оскільки залежно від виду процесів, що вивчаються, в СНВП той або інший математичний апарат може забезпечити найбільш адекватний опис. Тому в даному випадку ми будемо формувати визначення ММ СНВП, використовуючи теорію формальних мов, теорію множин, математичну логіку, теорію графів та ін.

Визначення 1. Сформулюємо визначення ММ СНВП, що використовує лінгво-математичне формулювання. Введемо передусім деякі допоміжні поняття. Почнемо з поняття висловлювання $F$ на деякій мові $L$. Такою мовою може бути будь-яка природна мова, наприклад, російська, деяка машинна мова або будь-яка формальна рекурсивна мова. Висловлюванням $F$ на мові $L$ називається *речення*, побудоване по правилам граматики цієї мови, але таке, що істинність цього речення не витікає з самого його змісту. Інакше, передбачається, що висловлювання містить деякі вільні змінні і, отже, може виявитися істинним для деяких значень цих змінних. Припустимо тепер, що є деяка множина $K$ таких висловлювань. Якщо деяка множина цих висловлювань приймається істинною, то вона (ця множина) визначає теорію $T$ відносно $K$. А саме, теорія припускає, що тільки висловлювання з підмножини $M$ завжди істинні, а істинність інших залишається невизначеною.

Припустимо тепер, що висловлювання з $M$ такі, що вільні змінні в них утворюють формальні об’єкти, під якими розуміється абстрактне представлення об’єкту, що відбиває деякі його реальні властивості. Такі висловлювання будемо називати вірними. Оскільки в підмножині $M$ вільні змінні представляють собою формальні об’єктами, то, як наслідок, висловлювання з $M$ адекватно відбивають деякі властивості реальною СНВП. Виходячи з вище сказаного математичною моделлю СНВП будемо називати безліч правильних висловлювань.

Визначення 2. Нехай тепер формальні об’єкти визначаються явним чином, а не за допомогою концептуальних класів висловлювань, як це було у визначенні 1, оскільки доводилося формулювати за допомогою мови $L$ властивості, які визначають чисто інтуїтивним (змістовним) шляхом сукупність реальних об'єктів і понять в СНВП.

Почнемо з розгляду сімейства множин $X_1,.., X_j,.., X_n$ (j=1, 2, .., n). Нехай кожна з цих множин визначає деякий формальний об’єкт. А саме, формальний об’єкт, відповідний множені $X_j$, може прийняти вигляд будь-якого елементу з цієї множини. Елементи безлічі $X_j$, можна називати значеннями об’єкта в множині.

Утворимо тепер прямий добуток X сімейства множині $X_j$:

$$X = X_1 \times X_2 \times .. \times X_j \times .. X_n,$$

тобто множина $X$ впорядкованих кінцевих послідовностей $\{(x_1,.., x_j, .., x_n)\}$, де $x_j \in X_j$. Оскільки формальний об’єкт відбиває властивості деякого реального об'єкту, то можна припустити, що деякі з впорядкованих кінцевих послідовностей адекватно відбивають властивості реальною СНВП.

Математичною моделлю СНВП будемо називати деяку власну підмножину $X_S$, $X_S \subset X$. В дійсності деяка власна підмножина прямого добутку множин $X$ визначає відношення між формальними об'єктами $X_1,..,X_j,..,X_n$ (j=1, 2, .., n). Тоді ММ СНВП можна назвати деяке відношення R, визначене на декартовому добутку $X$, тобто ММ СНВП визначається завданням множини $X = X_1 \times X_2 \times .. \times X_j \times .. X_n$, і деякої множини відношень R={$R_1$, .., $R_n$}. Саме множина відношень R дозволяє виділити деяку підмножину $X_S \subset X$.

Визначення 3. Нехай елементами множини $X_j$, будуть деякі функції часу, тобто $x_j(t) \in X_t(t)$. Тоді будемо припускати, що ММ СНВП відображає деякі динамічні процеси, що протікають в реальній системі. Дійсно, наприклад, для лінійної динамічної СНВП можна записати [3]

$$x_2(t) = \int_0^t k(t) x_1(t-t) dt,$$

де $x_2(t)$ – реалізація вихідного процесу, або реакція СНВП, $x_1(t)$ – вхідний процес, або вхідна дія, $k(\tau)$ – імпульсна (тактова) перехідна функція СНВП. У загальному випадку $x_1(t)$ може бути елементом множини $X_1(t)$ і, отже, враховуючи інтегральне перетворення, матимемо $x_2(t) \in X_2(t)$. Тоді можна записати що

$$X_2(t) R\, X_1(t)\ (t \in T).$$

У цьому виразі R – відношення, яке є деякою множиною, оскільки параметри імпульсної (тактовою) перехідної функції $k(\tau)$ можуть представляти собою набори дискретних значень чи бути функціями часу.

У цих міркуваннях ми прийшли до поняття математичної моделі динамічної СНВП, яку тепер можна визначити наступними аксіомами:

1. Для СНВП визначені простір станів К і множина Т моментів часу, в яких визначена поведінка СНВП. Тут К – деякий топологічний простір, а Т – впорядкований топологічний простір, що є підпростором простору дійсних чисел.

2. Для СНВП визначено деякий топологічний простір Q функцій часу, визначених на Т і званих допустимими вхідними сигналами СНВП (діями на СНВП).

3. Для довільного початкового моменту часу $t_0$ з Т, довільного початкового стану об'єкту (процесу) $x_0$ з К і довільного вхідного сигналу (впливу) $V$ з Ω, визначеного для $t \geq t_0$, усі майбутні стани СНВП визначаються видом функції переведення (переходу) φ: Ω×Т×Т×К→К, що символічно можна записати так:

$$j_V(t; t_0, x_0) = x_t.$$

Ця функція визначена тільки для $t \geq t_0$. Більше того, для любих $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ з Т, любих $x_0$ з К і любих фіксованих $V$ з Ω, визначених на $[t_0, t] \cap T$, справедливі співвідношення

$$j_V(t; t_0, x_0) = x_0,$$

$$j_V(t_2; t_0, x_0) = j_V(t_2; j_V(t_1; t_0, x_0)).$$

Крім цього, СНВП повинна бути фізично можлива, тобто якщо $V, n \in \Omega$ і $V = n$ на $[t_0, t] \cap T$, то необхідно, щоб

$$j_V(t; t_0, x_0) = j_n(t; t_0, x_0).$$

4. Кожен вихідний сигнал або реакція СНВП є деякою дійсною функцією ψ, визначеною на добутку Т×К.

5. Функції φ і ψ безперервні відносно топології, вибраних на К, Т і Ω.

### *Аксіоматичний підхід побудови фрагментів математичній теорії СНВП*

Для формального опису СНВП будемо використовувати теоретико-множинний математичний апарат.

Для цього розглянемо основні початкові поняття теорії множин.

У загальному випадку існують текстовий та графічний (візуальний) підходи до побудови інструментів предметно-орієнтованого моделювання понять і

СНВП [9]. У першому випадку об’єкти будуються шляхом визначення їх рівнянь – наприклад, рівняння сфери

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

У даній роботі робиться акцент на візуально-текстовому підході моделювання об’єктів різної природи.

Реалізація візуально-текстового моделювання означає встановлення зв’язків між предметами і діями, функціями зміни значень атрибутів предметів – наприклад, у випадку сфери, такими величинами є $x_0, y_0, z_0, R$. У цьому і полягає доцільність використання предметно-орієнтованого моделювання, що дозволяє унаочнити здійснення багатьох ”нетворчих” операцій (зокрема, побудови сфери за її рівнянням) шляхом певних візуальних маніпуляцій. При моделюванні, наприклад, геометричних об’єктів вносяться атрибути, що визначають кути обертання геометричних фігур (у даному випадку розглядаються кути обертання вздовж осей X, Y, Z). Причому всі ці операції реалізовані на рівні геометричної моделі.

На рівні геометричної моделі визначена множина методів, які є загальними для множини геометричних об’єктів, що складають структуру фізичних моделей. Зокрема відзначимо паралельне перенесення, обертання у просторі, періодичне розподілення, розміщення одного геометричного об’єкта всередині іншого та ін.

У загальному випадку метод побудови структури моделі (а саме, геометрії включень) оснований на композиції об’єктів (наприклад, розташування куба у сфері, перетинання конуса й циліндра й т.ін.).

Множина операцій композиції геометричних об’єктів відповідає базовим операціям теорії множин.

– об’єднання $A \cup B$,

– перетинання $A \cap B$,

– вирахування $A / B$,

– доповнення $\overline{A}$.

Де A, B – є деякі геометричні об’єкти.

Розглянемо більш детально можливі операції композиції геометричних об’єктів A та B. Для цього будемо розглядати A та B як множини точок (геометричні місця точок) на площині XOY. Будемо зображати A та B у вигляді кіл Ейлера.

Можливі операції взаємного розташування цих множин зображені на рис. 1.

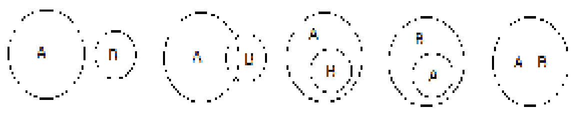

Рис. 1. Операції композиції множин точок A та B

В аналітичному вигляді:

а) $A \cap B = \varnothing$;

б) $A \cap B \neq \varnothing$;

в) $B \subset A$;

г) $A \subset B$;

д) $A = B$.

Розглянемо випадок б) на рис. 1 більш детально – див. рис. 2.

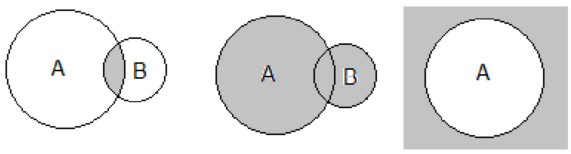


Рис. 2. Операції над геометричними множинами A та B

Випадки а) та б) на рис. 2 ілюструють можливі операції використання перетинання двох множин:

а) $A \cap B$;

а) $A \cup B$.

Випадок в) на рис. 2 ілюструє останню операцію теорії множин, що ми використовуємо для формалізації операції геометричної композиції (а саме операцію доповнення до деякої універсальної множини $\overline{A}$.).

Відмітимо, що ми використовуємо позначення операцій з теорії множин завдяки їх семантичної близькості до сутності геометричних перетворень, що мають місце при моделюванні різних предметів. Однак, результатом застосування даних операцій над геометричними об’єктами є, власне, область визначення функції, що задає розподіл фізичних властивостей.

Останнім етапом побудови моделі є накладання обмежень на можливі значення геометричних та фізичних атрибутів моделі. Як загальне привило можна визначити відповідність значення атрибутів фундаментальним фізичним законам (зокрема, законам збереження). У прикладі моделювання геометричних об'єктів, геометрія включень будується із геометричних фігур, формфактор яких може бути підрахований аналітично (це зумовлено наявним методом обчислення [9]). Це накладає обмеження на множину просторових структур, яку можна отримати з елементів моделі.

Валідними вважаються структури, які не містять перетинів геометричних об'єктів. Розглядаючи геометричну фігуру як множину (геометричне місце) точок у просторі, можна сформулювати наступний критерій:

$$A \cap B = \varnothing,$$

де А, В- деякі геометричні фігури.

Окремим випадком є істинність наступної логічної формули:

$$(B \subset A) \vee (A \subset B).$$

Керуючись теоретико-множинним та аксіоматичним підходами, формально побудуємо фрагменти теорії СНВП на підставі наступних аксіом.

1. Аксіома існування 1. Існує принаймні одна множина науково-визначуваних понять.
2. Аксіома існування 2. Існує принаймні одна множина СНВП.
3. Аксіома об'ємності (екстенціональності). Якщо множини СНВП $M_a$ і $M_b$ складені з одних і тих же понять, то ці множини співпадають (рівні):

$$M_a = M_b.$$

4. Аксіома об'єднання. Для довільних множин СНВП $M_a$ і $M_b$ існує множина СНВП, поняттями якої є усі поняття множини СНВП $M_a$ і усі поняття множини СНВП $M_b$, і які ніяких інших понять не містять.

З аксіом об'ємності і об'єднання виходить, що для довільних множин СНВП $M_a$ і $M_b$ множина СНВП, що задовольняє умовам аксіоми об'єднання, єдина. Дійсно, якщо були б дві такі множини СНВП $M_{c1}$ і $M_{c2}$, то вони містили б одні і ті ж поняття (усі поняття, що належать множині СНВП $M_a$, і усі поняття множини СНВП $M_b$) і тому, згідно з аксіомою об'ємності, $M_{c1} = M_{c2} = M_c$. Назвемо цю єдину множину СНВП – об'єднанням великих кількостей СНВП $M_a$ і $M_b$ і будемо писати

$$M_c = M_a \cup M_b.$$

5. Аксіома різниці. Для довільних множин СНВП $M_a$ і $M_b$ існує множина СНВП, поняттями якого є ті і тільки ті поняття множини СНВП $M_a$, які не є поняттями множини СНВП $M_b$.

Аналогічно, з третьої і п'ятої аксіом слідує, що для довільних множин СНВП $M_a$ і $M_b$ існує в точності одна множина, що містить поняття великої кількості СНВП $M_a$, що не належать множині СНВП $M_b$. Назвемо цю множину СНВП $M_c$ – різницею великих кількостей СНВП $M_a$ і $M_b$ :

$$M_c = M_a \setminus M_b.$$

6. Аксіома ступеня. Для кожної множини СНВП М існує сімейство множин СНВП В(М) (булеан), поняттями якого є усі підмножини СНВП $M_i$, $M_i \subset M$ і тільки вони.

Якщо поняття і визначення в деякій предметній області приймаються інтуїтивно, то аксіоматичний підхід побудови теорії СНВП дозволяє формально на підставі введених шести аксіом визначити базові поняття математичної теорії СНВП.

За допомогою операцій об'єднання і різниці, використовуючи введені аксіоми, визначимо ще три операції, які використовуватимуться в математичній теорії СНВП.

Перетин множин СНВП $M_a$ і $M_b$ визначається формулою

$$M_a \cap M_b = M_a \setminus (M_a \setminus M_b).$$

Можна показати, що поняттями перетину СНВП $M_a \cap M_b$ є ті і тільки ті поняття, які належать як множині СНВП $M_a$, так і множині СНВП $M_b$.

Доповнення $\overline{M}$ множини СНВП М визначається формулою

$$\overline{M} = 1 \setminus M,$$

(тут 1 представляє собою універсальну безліч понять).

Симетрична різниця множин СНВП $M_a$ і $M_b$ визначається формулою

$$M_a \setminus M_b = (M_a \setminus M_b) \cup (M_b \setminus M_a).$$

На підставі введеної аксіоматики можна довести справедливість як законів, які визначають властивості сигнатури алгебри множин СНВП (закони ідемпотентності, комутативності, асоціативності, дистрибутивності, дії з константами, подвійного доповнення, закони Де-Моргана), так і наступних законів:

Закон комутативності симетричної різниці СНВП

$$M_a \setminus M_b = M_b \setminus M_a;$$

Закон асоціативності симетричної різниці СНВП

$$M_a \setminus M_b \setminus (M_b \setminus M_c) = (M_a \setminus M_b) \setminus M_c;$$

Закон дистрибутивності перетину відносно симетричної різниці СНВП

$$M_a \cap (M_b \setminus M_c) = M_a \cap M_b \setminus M_a \cap M_c;$$

Закони склеювання (композиції) СНВП

$$M_a \cap M_b \cup M_a \cap \overline{M}_b =$$

$$M_a (M_a \cup M_b) \cap (M_a \cup \overline{M}_b) = M_a;$$

Закони поглинання СНВП

$$M_a \cup M_a \cap M_b = M_a,$$

$$M_a \cap (M_a \cup M_b) = M_a.$$

Використовуючи ці закони, розглянемо завдання мінімізації представлення множини СНВП М за допомогою операцій $\cup, \cap, \overline{\phantom{M}}$.

Під складністю представлення множини СНВП М будемо розуміти число понять $M_i$, і $\overline{M}_i$ в виразі, що його задає.

Нехай в просторі 1={$M_1$, $M_2$, $M_3$} задана множина СНВП виду

$$M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cup \overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap M_3.$$

На підставі законів ідемпотентності, комутативності і асоціативності об'єднання отримуємо

$$M(M_1, M_2, M_3) = (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3) \cup (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) \cup (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3) \cup (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) \cup (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap M_3).$$

Використовуючи закони комутативності, перетину і склеювання, маємо

$$M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cup \overline{M}_1 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2.$$

Згідно із законами комутативності, об'єднання, перетину і закону склеювання, маємо

$$M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cup \overline{M}_3 \cup \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2.$$

Згідно із законами комутативності, перетину і поглинання, маємо

$$M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cup \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2.$$

Складність представлення заданої множини СНВП зменшилася від 21 до 5.

Послідовність застосування законів будемо називати стратегією перетворень. Складність представлення множини СНВП, що отримується в результаті застосування цих законів (кожен з яких визначає еквівалентне перетворення), залежить від стратегії, що використовується, або утворюючих простір $M_1$, $M_2$,.., $M_п$, які називаються породжуючі 1 за допомогою довільних операцій підмножин СНВП $\cup, \cap, \overline{\phantom{M}}$. Знайдемо стратегію, яка завжди породжує мінімальне вираження заданої множини СНВП.

Розглянемо алгебру $A = < B(1), \cup, \cap, \overline{\phantom{M}} >$ і визначимо множини СНВП, які можуть бути породжені (утворені) з довільних підмножин СНВП $M_1$, $M_2$,.., $M_п$, які називаються породжуючими простір чи утворюють простір 1 за допомогою операцій $\cup, \cap, \overline{\phantom{M}}$.

Множину СНВП:

$$M_i^{s_i} = \begin{cases} M_i & при\ s_i = 1, \\ \overline{M_i} & при\ s_i = 0 \end{cases} \quad i=1, 2,.., ,п,$$

надалі будемо називати первинним термом. Множину СНВП виду

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i^{s_i} = M_1^{s_1} \cap M_2^{s_2} \cap ... \cap M_n^{s_n},$$

$$s_i = 0, 1,$$

назвемо конституентою.

Загальне число різних конституент не перевищує $2^п$ [4, 5]. Кожній конституенті можна зіставити двійковий набір довжини п, число цих наборів рівне $2_п$. Якщо деякі конституенти рівні, то загальна кількість конституент менше $2^п$, при цьому серед підмножин СНВП знайдуться хоч би два такі, які можна виразити одну через іншу, тобто залежні. Наприклад, якщо п = 2 і $M_2 = \overline{M_1}$, то існують тільки дві відмінні від $\varnothing$ конституанти:

$$\varnothing = M_1^0 \cap M_2^0 = M_1^1 \cap M_2^1,$$

$$C_1 = M_1^0 \cap M_2^1, C_2 = M_1^1 \cap M_2^0.$$

Лема 1. Перетин двох різних конституент порожньо [4, 5].

Дійсно, якщо конституенти

$$C_a = \bigcap_{i=1}^{n} M_i^{s_i} \quad и \quad C_b = \bigcap_{i=1}^{n} M_i^{s_i^*}$$

різні, то σk≠σk* принаймні для одного k, k≤п. Але тоді $M_k^{s_k} \cap M_k^{s_k^*} = \varnothing$ і, отже, $C_a \cap C_b = \varnothing$.

Лема 2. Об'єднання усіх конституент дорівнює 1 [4, 5].

Представимо 1 у виді

$$1 = \bigcap_{i=1}^{n} \left( M_i^0 \cup M_i^1 \right)$$

і, розкривши дужки, в правій частині рівності отримаємо об'єднання усіх конституент.

Лема 3. Множина СНВП $M_i$ – дорівнює об'єднанню конституент, кожна з яких містить $M_i^1$.

Згідно з лемою 2,

$$1 = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_l = \bigcup_{i=1}^{l} C_i,$$

де $C_i$, i=l, 2,.., l, – конституента. Визначимо перетин лівої і правої частин цього виразу з $M_i$. Маємо

$$M_i = (M_i \cap C_1) \cup (M_i \cap C_2) \cup ... \cup (M_i \cap C_l).$$

Якщо $C_j$ містить в якості аргументу перетини $M_i^0$, то $M_i \cap C_j = \varnothing$. Якщо ж $C_j$ містить $M_i^1$, то $C_j \cap M_i = C_j$. Отже, $M_i$ – об’єднання тих конституент, які містять $M_i^1$ як співмножника.

Теорема 1. Кожна не порожня множина СНВП, яка утворена з множин СНВП $M_1$, $M_2$,.., $M_п$ за допомогою операцій $\cup$, $\cap$, $\overline{\phantom{M}}$, є об'єднанням деякого числа конституент.

Згідно з лемою 3, теорема справедлива для множин СНВП $M_1$, $M_2$,.., $M_п$. Отже, досить довести, що якщо довільні множини СНВП $M_a$ і $M_b$ представлені у вигляді об’єднання деякого числа конституент, то і множини СНВП $M_a \cup M_b$, $M_a \cap M_b$ і $\overline{M}$, якщо вони не порожні, також можна представити у вигляді об’єднання конституент.

Нехай множини СНВП $M_a$ і $M_b$ представлені у вигляді об’єднання конституент $M_a = C_{a_1} \cup C_{a_1} ... \cup C_{a_k}$ і $M_b = C_{b_1} \cup C_{b_2} ... \cup C_{b_S}$. Тоді множину СНВП $M_a \cup M_b$, очевидно, можна представити у вигляді об’єднання конституент.

Згідно із законом дистрибутивності

$$M_a \cap M_b = (C_{a_1} \cap C_{b_1}) \cup ... \cup (C_{a_k} \cap C_{b_s}),$$

при цьому якщо $C_{a_a} \neq C_{b_b}$ то, згідно з лемою 1, $C_{a_a} \cap C_{b_b} = \varnothing, =Ø,$ інакше $C_{a_a} = C_{b_b}$. Отже, перетин $M_a \cap M_b$ або порожній, або представимо у вигляді об’єднання конституент. Доведемо, що множину СНВП $\overline{M}$ також можна представити у вигляді об’єднання конституент, якщо

$$M = C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_k.$$

Згідно із законом Де-Моргана [4, 5],

$$\overline{M} = \overline{C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k} = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \ldots \cap \overline{C_k} =$$
$$\overline{M_1^{s_{11}} \cap M_2^{s_{12}} \cap \ldots \cap M_n^{s_{1n}}} \cap$$
$$\overline{M_1^{s_{21}} \cap M_2^{s_{22}} \cap \ldots \cap M_n^{s_{2n}}} \cap \ldots$$
$$\cap \overline{M_1^{s_{k1}} \cap M_2^{s_{k2}} \cap \ldots \cap M_n^{s_{kn}}} =$$
$$(\overline{M_1^{s_{11}}} \cup \overline{M_2^{s_{12}}} \cup \ldots \cup \overline{M_n^{s_{1n}}} \cap$$
$$(\overline{M_1^{s_{21}}} \cup \overline{M_2^{s_{22}}} \cup \ldots \cup \overline{M_n^{s_{2n}}} \cap \ldots$$
$$\cap(\overline{M}_1^{s_{k1}} \cup \overline{M}_2^{s_{k2}} \cup \ldots \cup \overline{M}_n^{s_{kn}}).$$

Розкриваючи дужки і використовуючи співвідношення $M_a \cap \overline{M_a} = \varnothing$, $M_a \cup \overline{M_a} = 1,$ а також додаючи в ті перетини, в яких відсутній нижній індекс β, співмножника $M_b \cup \overline{M_b} = 1$, отримуємо, що множину $\overline{M}$ також можна представити у вигляді об'єднання конституент.

Теорема 2. З п множин СНВП в алгебрі $A =< B(1) \cup, \cap, \overline{\phantom{x}}, >$ можна утворити не більше ніж $2^{2^n}$ множин СНВП.

Кожна множина СНВП М, згідно з теоремою 1, є об'єднанням конституент, число яких не перевищує $2^n$; отже, число різних об'єднань не перевищує $2^{2^n}$. При цьому якщо множини СНВП $M^1, M^2,.., M^n$ незалежні, тобто усі конституенти відмінні від порожньої множини, то число різних конституент рівне $2^n$ і число множин СНВП, які утворені з цих конституент у вигляді їх об'єднання, рівно $2^{2^n}$ (з урахуванням порожньої множини СНВП).

Введення поняття конституенти дозволяє задавати множину СНВП М, при фіксованих незалежних підмножинах СНВП $M_1, M_2,.., M_n$ універсальної множини СНВП 1, у вигляді об'єднання конституент :

$$M = \bigcup_j \bigcap_{i=1}^{n} M_i^{s_i}.$$

Кожна фіксована множина СНВП $M_i \in 1$ розбиває простір СНВП на дві частин: на власне $M_i$ і на $\overline{M_i}$. При незалежних множинах СНВП $M_i \in \{M_i / i = 1,...n\}$ простір СНВП розбивається на $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n\ раз} = 2^n$ областей. Кожна область є перетином п великих кількостей СНВП $M_i$ або $\overline{M_i}$, i=1,.., п. Зіставимо цій області двійковий вектор ($\sigma_1, \sigma_2$, .., $\sigma_n$), в якому $\sigma_i$ =1, якщо в перетин $C = \bigcap_i M_i^{s_i}$ входить $M_i$, і $\sigma_i$=0, якщо входить $\overline{M_i}$, а також десятковий еквівалент

$$d(C) = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot 2^{i-1}.$$

Будь-яку множину СНВП М в просторі 1 можна задати у вигляді об'єднання цих областей. Зіставимо множині СНВП М двійковий вектор довжини $2^n$, в якому і-му розряду відповідає область з десятковим еквівалентом, рівним і. Вектор, що визначає множину СНВП, представимо у вигляді десяткового еквіваленту:

$$d(M) = \sum_{i=0}^{2^n - 1} c_i \cdot 2^i, \quad c_i = 0, 1.$$

Отже, множина СНВП М в просторі може бути задана у вигляді відповідного десяткового еквіваленту.

Розглянемо, наприклад, в тривимірному просторі 1={$M_1$, $M_2$, $M_3$} безліч М($M_1$, $M_2$, $M_3$) з десятковим еквівалентом d(M)=217. Маємо

217= $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

Множині СНВП М відповідає двійковий вектор (1,1,0,1,1,0,0,1), який визначає включення областей в множину СНВП М (див. рис. 3).

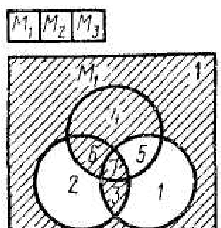


Рис. 3. Множинний простір 1, заданий кругами Ейлера

Окрім діаграми Ейлера [4, 5] простір може бути заданий у вигляді гіперкуба або n-мірного куба (n-размірність простору, рівна числу фіксованих множин).

Гіперкубом (n-мірним кубом) називається граф H, кожна вершина якого взаємно однозначно відповідає області простору, і дві вершини сполучені ребром, якщо вони відповідають сусіднім областям (мають загальну межу) [4, 5]. Зіставлені цим областям двійкові вектори відрізняються в одному і тільки одному розряді.

Гіперкуб для даного прикладу зображений на рис. 4 (вершини, що відповідають конституентам множини M, заштриховані).

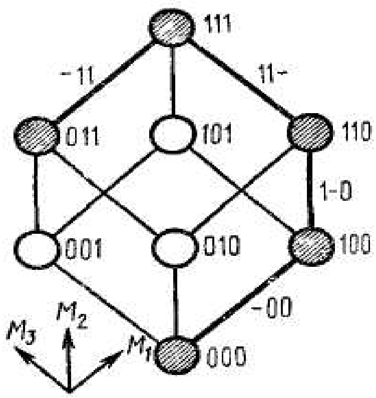


Рис. 4. Гіперкуб, представлений графом

### *Висновки*

Описані в роботі методи моделювання і побудови теорії понять в тому числі і математичної теорії побудови системи науково-визначуваних понять дозволяють побудувати математичні моделі системи науково-визначуваних понять.

Розглянутий аксіоматичний підхід дозволив сформулювати ряд аксіом формальної побудови фрагментів теорії системи науково-визначуваних понять.

Приведений приклад реалізації моделі системи науково-визначуваних понять з використанням теоретико-множинного підходу дозволяє створювати науково-визначувані поняття, які можуть використовуватися в системі науково-визначуваних понять.

### *Список літератури*

1. Романенко В.Н., Никитина Г.В. Многозначность понятия информации. Философия науки. – 2010. – № 4(47). – Режим доступу до журн. : http:// moikariver.ru/wp-content/uploads/2011/02/.

2. Кононюк А.Е. Обобщенная теория познания и созидания. – Киев: Освіта України, 2013. – 648 с.

3. Кононюк А.Е. Общая теория систем. К.1. – Киев: Освіта України, 2012. – 548 с.

4. Кононюк А.Е. Дискретна математика. К. 1. Множества, отношения, пространства (четкие и нечеткие), ч. 1. – Киев: Освіта України, 2011. – 450 с.

5. Кононюк А.Е. Дискретна математика. К. 1. Множества, отношения, пространства (четкие и нечеткие). ч. 2. - Киев: Освіта України, 2011. – 480 с.

6. Кононюк А.Е. Дискретна математика. К. 2. Алгебра (четкие и нечеткие), ч. 1. – Киев: Освіта України, 2012. – 530 с.

7. Кононюк А.Е. Дискретна математика. К. 2. Алгебра (четкие и нечеткие), ч. 2. – Киев: Освіта України, 2012. – 512 с.

8. Кононюк А.Е. Общая теория информации. К. 1. – Київ: Освіта України, 2012. – 430 с.

9. Межуев В.І. Застосування технології предметно-ориентованого моделювання для проектування метаматеріалів. –К.: НАУ, Зб. наук. праць ”Проблеми інформатизації та управління”. Вип. 3(31), 2010. – С.77-82.

Статтю подано до редакції 15.10.2013