УДК 519.62

Денисюк В. П., д.ф.-м.н., проф.
Рибачук Л.В., к.ф.-м.н.
Негоденко О. В.

МЕТОД ФАНТОМНИХ ВУЗЛІВ В ЗАДАЧІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ СПЛАЙНАМИ

**Інститут комп'ютерних інформаційних технологій
Національного авіаційного університету**

Досліджено метод фантомних вузлів для випадку, коли в ролі наближуючої функції використовуються тригонометричні сплайни. Цей метод полягає в тому, що до послідовності заданих інтерполяційних вузлів додається парна кількість фантомних вузлів; значення в цих вузлах вибираються з урахуванням оцінок похідних, які оцінюються через поділені різниці. Наведено тестові приклади; для цих прикладів похибка інтерполяції значно зменшується

Вступ

У математиці постійно доводиться мати справу з наближеним поданням функцій. Класичними апаратами таких представлень є многочлени і раціональні дроби. Теорія наближення функцій многочленами була розроблена в працях П.Л. Чебишева, К.Вейерштрасса, Ш. Вале Пуссена та ін.. Проте многочлени і раціональні дроби мають ряд недоліків в якості апаратів наближення для функцій з не надто великою гладкістю. Одним з основних недоліків є те, що їх поведінка в околі будь-якої точки визначає їх поведінку в цілому. У зв'язку з цим інші апарати наближення, вільні від цього недоліку, привертають увагу в останній час. Одним з таких апаратів є поліноміальні сплайни [3].

Сплайни природно виникають у деяких варіаційних задачах і мають ряд переваг у порівнянні з многочленами.

Переваги поліноміальних сплайнів перед іншими лінійними апаратами наближення проявилися саме у задачах інтерполювання функцій. Можна зазначити два аспекти, у яких ці переваги виявилися найбільш переконуючими.

По-перше, інтерполяційні сплайни у багатьох важливих випадках забезпечують мінімально можливу (при фіксованому числі вузлів рівномірної інтерполяційної сітки) похибку наближення на певних класах функцій; інтерполяційні ж многочлени не забезпечують навіть найкращих порядків наближення.

По-друге, сплайни – апарат більш зручний, ніж многочлени з практичної точки зору. Зокрема, прості поліноміальні сплайни мають властивість локальної гнучкості, тобто вони малочутливі до похибок вихідних даних; незначне змінювання значень функцій, що інтерполюється, в одному або кількох вузлах інтерполяції мало впливає на поведінку інтерполяційного сплайна на деякій віддалі від цих точок. Далі інтерполяційні сплайни, добре наближуючи функцію, одночасно добре наближують і її похідні. Нарешті, при обчисленні простих інтерполяційних сплайнів доводиться стикатися із значно меншими труднощами, аніж при обчисленні інтерполяційних многочленів [1].

Ці та деякі інші властивості сплайнів призвели до того, що вони поступово витісняють многочлени в багатьох галузях теоретичних і прикладних досліджень [2].

Проте поліноміальні сплайни теж мають ряд недоліків, які певною мірою стримують їх застосування у різних задачах науки і техніки. До одного з таких недоліків слід віднести складність побудови сплайнів високих степенів.

Тому привертають увагу нові класи функцій, які мають переваги поліноміальних сплайнів і є вільними від недоліків поліноміальних сплайнів. До таких нових класів функцій слід віднести класи тригонометричних сплайнів. Властивості простих тригонометричних сплайнів аналогічні властивостям простих поліноміальних сплайнів. Але клас простих тригонометричних сплайнів є більш широким і включає клас простих поліноміальних сплайнів.

Постановка задачі

В роботі (4) було досліджено вплив гладкості інтерполяційних тригонометричних сплайнів на похибку інтерполяції і встановлено, що при застосуванні тригонометричних сплайнів для наближення функцій в загальному випадку спостерігається відоме явище Гіббса, яке суттєво впливає на точність наближення.

Один з методів подолання шкідливого впливу даного явища, який отримав назву «Метод фантомних вузлів», було запропоновано в роботі [1]; застосування цього методу в багатьох випадках призводить до покращення збіжності інтерполяційного тригонометричного многочлена.

Дослідимо цей метод для випадку, коли в ролі наближуючої функції використовуються тригонометричні сплайни [2].

Основний зміст

Розглянемо функцію $f(t)$ на $[0,2p]$. Задамо N вузлів інтерполяції, $N=2n+1$, де $n=1,2,\ldots$, крок рівномірної сітки $h=2p\,\dfrac{i-1}{N}$, де $i=1,2,\ldots,N$.

Обчислюємо значення функції у вузлах інтерполяції. Далі по цих вузлах будуємо тригонометричний інтерполяційний сплайн, який має вигляд (1), а коефіцієнти інтерполяційного многочлена a_0, a_k^*, b_k^* визначаються за формулами Бесселя (2), тобто

$$S_{t_r}(f,\Delta_N,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k(r,N)\left[a_k^*\Phi_k^c(r,N,t)+b_k^*\Psi_k^s(r,N,t)\right], \tag{1}$$

де $\Phi_k^c(r,N,t)=\dfrac{\cos kt}{k^{r+1}}+\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{\cos(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right]$,

$$\Psi_k^s(r,N,t)=\frac{\sin kt}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}-\frac{\sin(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right],$$

$$[a_k(r,N)]^{-1}=\frac{1}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{1}{(mN-k)^{r+1}}\right],$$

$$a_0=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i),\quad a_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i)\cos kt_i, \tag{2}$$

$$b_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i)\sin kt_i,\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Інтерполяційний тригонометричний сплайн S_{t_r} інтерполює функцію $f(x)$ в N точках, які задані на відрізку $2p-h$.

Застосуємо метод фантомних вузлів для покращення збіжності інтерполяційного тригонометричного сплайна [2].

Даний метод полягає в наступному. Додамо до послідовності вузлів інтерполяції парну кількість фантомних вузлів; значення в цих вузлах будемо вибирати з урахуванням оцінок похідних, які ми оцінюємо з використанням поділених різниць. Зауважимо, що парна кількість фантомних вузлів вибирається для того, щоб зберегти непарність загальної кількості вузлів інтерполяції. Як було показано в [1] в багатьох випадках це призводить до зменшення похибки на відрізку інтерполяції.

Оскільки теоретичні засади методу фантомних вузлів знаходяться в стадії розвитку, дослідимо цей метод на тестовому прикладі; в ролі такого прикладу виберемо функцію $f(t)=t+1$, $t\in[0,2p]$. На відрізку $[0,2p]$ задавали 9 вузлів інтерполяції і знаходили значення функції в цих вузлах. По цих вузлах будували тригонометричний інтерполяційний сплайн і знаходили похибку інтерполяції. До 9 вузлів додавались два фантомних вузла, значення в яких обчислювали за допомогою різного виду інтерполяції (лінійної, з урахуванням 1-ої похідної та з урахуванням 1-ої і 2-ої похідних). За послідовністю тепер уже 11 точок знову будували інтерполяційний тригонометричний сплайн і обчислювали похибку інтерполяції. В результаті порівняння цих похибок виявилось, що відносна похибка інтерполяції з двома фантомними вузлами зменшилась. Аналогічні дії виконувались при додаванні до 9 вузлів чотирьох фантомних вузлів і за послідовністю тепер уже 13 точок знову будували інтерполяційний тригонометричний сплайн і обчислювали похибку інтерполяції. При чотирьох фантомних вузлах похибка значно зменшилась (Таблиця1).

В іншому прикладі розглядалась функція $f(t) = \sin \frac{3}{4}t$, $t \in [0,2p]$. Було також задано 9 вузлів інтерполяції і побудовано інтерполяційний тригонометричний сплайн (Рис. 1, Рис. 2). В результаті порівняння цих похибок при 2-х і 4-х фантомних вузлах виявилось, що відносна похибка інтерполяції також значно зменшилась (Рис. 3, Рис. 4).

Таблиця 1. Залежність похибки інтерполяції від кількості фантомних вузлів

		Відносна похибка*		
Функція	**Кількість фантомних точок**	**Лінійна інтерполяція**	**Інтерполяція з урахуванням 1 похідної**	**Інтерполяція з урахуванням 1 та 2 похідних**
f(t)=t+1	**2**	3.3	7.2	7.2
	4	4.9	12.7	27.5
f(t)=sin3\4t	**2**	5.3	44	80
	4	2.94	14.3	24.1

**- Відносна похибка – відношення похибки без фантомних вузлів до похибки з фантомними вузлами.*

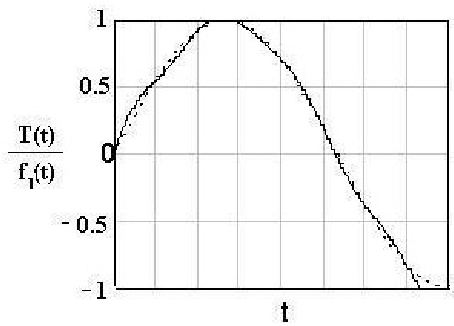

Рис.1 *T(t)-інтерполяційний тригонометричний сплайн, $f_1(t)$=sin3\4t*

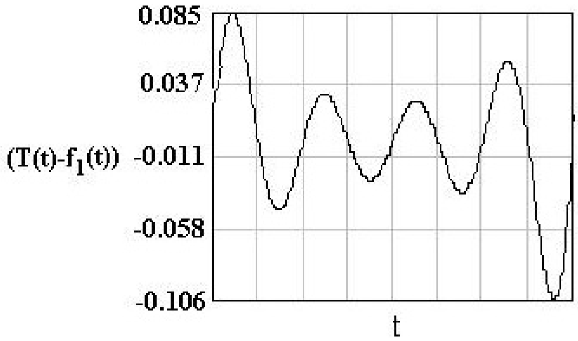

Рис.2 *Відносна похибка інтерполяції без фантомних точок*

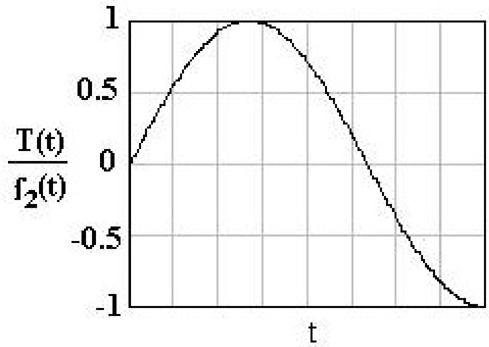

Рис.3 *Інтерполяція з 2-ма фантомними вузлами, де T(t)-інтерполяційний тригонометричний сплайн, $f_1(t)$=sin3\4t*

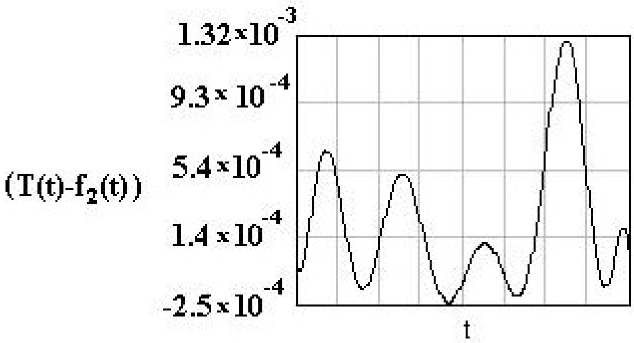

Рис.4 *Відносна похибка інтерполяції з уразуванням 1-ї та 2-ої похідних з двома фантомними вузлами*

Висновки

Досліджено метод фантомних вузлів для випадку, коли в ролі наближуючої функції використовуються тригонометричні сплайни [2]. Цей метод полягає в тому, що до послідовності заданих інтерполяційних вузлів додається парна кількість фантомних вузлів; значення в цих вузлах вибираються з урахуванням оцінок похідних, які оцінюються через поділені різниці. Наведено тестові приклади; для цих прикладів похибка інтерполяції значно зменшується, причому найкращі результати отримано при розгляді функції $f(t)=\sin\frac{3}{4}t$, $t\in[0,2p]$ з додаванням двох фантомних вузлів, значення в яких обчислено за допомогою інтерполяції з урахуванням 1-ої і 2-ої похідних.

Література

1. Денисюк В.П. «Про деякі методи покращення збіжності рядів Фур’є та інтерполяційних тригонометричних многочленів». Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. праць. – К: НАУ, 2012. – Випуск 3(39). – с. 39-42.

2. Денисюк В.П. Сплайни та сигнали. – К: ЗАТ «ВІПОЛ», 2007. – 228 с.

3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математики. – М. «Наука», 1976.-248с.

4. Денисюк В.П., Негоденко О.В. «Вплив гладкості інтерполяційних тригометричних сплайнів на похибку інтерполяції» подано до друку.

5. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М. «Наука»,1984- с. 352.

Статтю подано до редакції 16.12.2013