УДК 629.733.5

[1]**Гусинін А.В.,** к.т.н.,
[2]**Тачиніна О.М.**, к.т.н.

СИНТЕЗ ГАРАНТОВАНО-АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМУ КЕРУВАННЯ ВИВЕДЕННЯМ БАГАТОРЕЖИМНОЇ АВІАЦІЙНО-КОСМІЧНОЇ СИСТЕМИ НА ОРБІТУ В УМОВАХ ДІЇ НЕВИЗНАЧЕНИХ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

[1]Національний технічний університет України «КПІ»,
[2]Національний авіаційний університет

Синтезовано гарантовано-адаптивний алгоритм керування виведенням багаторежимної авіаційно-космічної системи на орбіту на основі диференціальних перетворень математичної моделі диференціальної гри. Отриманий алгоритм керування володіє властивостями адаптації до дії збурень та забезпечує гарантію виведення на орбіту багаторежимної авіаційно-космічної системи в задані термінальні умови при найгіршому сполученні дії факторів обмежених збурень

Вступ

Синтез алгоритмів керування виведенням багаторежимної авіаційно-космічної системи (АКС) на орбіту в умовах дії зовнішніх збурень є складною проблемою. Високий порядок нелінійних диференціальних рівнянь руху АКС, зміна в широкому діапазоні масово-інерційних характеристик орбітальної ступені під час відділення її ступенів і скидання головного обтічника, режимів роботи двигунної установки, необхідність врахування можливості виходу траєкторії чи керування на обмеження ускладнюють розв'язання цієї проблеми. При цьому, звичайно відсутня апріорна інформація відносно компонентів зовнішніх збурень. В той самий час, високі вимоги до термінальних параметрів при виведенні АКС на орбіту вимагають врахування впливу збурень на досягнення цілей керування.

Одним із способів розкриття невизначеності, пов'язаної з непередбаченою дією зовнішніх збурень, є застосування концепції гарантовано-адаптивного підходу до синтезу алгоритмів керування траєкторним рухом літальних апаратів. Ця концепція використовує принцип максимального гарантованого результату, тому що процес керування розглядається при найбільш несприятливих умовах, які можуть мати місце при впливі збурень.

Задача синтезу гарантованого керування у невизначених умовах впливу збурень вимагає переходу від задач оптимізації до задач двобічної оптимізації, які розглядаються в теорії диференціальних ігор [1]. В таких умовах доцільно розглядати задачу термінального керування у формі математичної моделі диференціальної гри двох гравців, дослідження якої засноване на принципі максимального гарантованого результату [2,3]. Перший гравець формує керування літальним апаратом, а вектор збурень формується цілеспрямовано другим гравцем. Цілі управління першого та другого гравців є протилежними. Завдання першого гравця полягає у переведенні літального апарату з початкового стану у задане кінцеве, при якому мінімізується критерій якості керування за умови максимізації його з боку другого гравця. Ігровий підхід гарантує досягнення термінальних умов при будь-яких допустимих реалізаціях вектора збурень, так як синтез алгоритмів термінального керування орієнтований на найбільш несприятливі умови дії збурень.

В праці [4] запропонований метод синтезу алгоритмів термінального керування динамічних об'єктів в умовах дії збурень на основі диференціальних перетворень моделі диференціальної гри.

В праці [5] даний метод модернізований для рішення задач синтезу алгоритмів керування багаторежимних літальних апаратів.

Метод не вимагає для своєї реалізації чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху динамічного об'єкту, використовує математичний апарат диференціальних перетворень функцій та рівнянь [6]. При цьому, задача синтезу оптимального адаптивного алгоритму зводиться до рішення системи нелінійних рівнянь відносно його вільних параметрів.

В статті з використанням модернізованого методу виконано синтез гарантовано-адаптивного алгоритму керування виведенням багаторежимної АКС на орбіту в умовах дії невизначених зовнішніх збурень.

Постановка задачі синтезу керування

Весь керований процес виведення багаторежимної АКС на орбіту розбиваємо на *r* заданих часових інтервалів T_i, в середині яких параметри орбітального ступеня і режими роботи двигунної установки не мають стрибкоподібних змін, а усі зміни у формі заданих стрибків відбуваються на межах заданих тимчасових інтервалів

$$T_i = t_i - t_{i-1},\ i = \overline{1,r},\ \sum_{i=1}^{r} T_i = T,$$

де T – час виведення орбітального ступеня АКС на орбіту.

Модель диференціальної гри, що описує траєкторний рух орбітального ступеню АКС на кожній ділянці виведення її на орбіту подамо у вигляді векторного диференціального рівняння:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_i, u_i, v_i),\ x_i(t_{i-1}) = x_i^0,\ i = \overline{1,r}, \quad (1)$$

де $x_i = x_i(t)$ – n-вимірний вектор стану; $u_i = u_i(t)$ – m-вимірний вектор керування; $v_i = v_i(t)$ – $\mathbf{l}$- вимірний вектор збурень; f_i – неперервна і неперервно диференційована за сукупністю змінних t, x_i, u_i, v_i вектор-функція узагальненої сили; $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Сполучення граничних і початкових умов ділянок процесу виведення багаторежимної АКС на орбіту задаємо у формі визначених крайових умов [7]:

$$\varphi_i\left[x_i(T_i), x_{i+1}^0; u_i(T_i), u_{i+1}^0; T_i\right] = 0,\ i = \overline{1,r}. \quad (2)$$

Задача першого гравця полягає в переведенні багаторежимної АКС із заданого початкового стану $x_1(t_0)$ в кінцевий (термінальний) стан $x_r(T)$, визначений в момент часу $t = T$ q- вимірним ($q \le n$) векторним рівнянням:

$$S[x_r(T), T] = 0. \quad (3)$$

Мета керування багаторежимною АКС полягає у такому виборі керування $u_i(t)$, яке в процесі руху АКС забезпечує мінімізацію функціоналу:

$$I = G[x_r(T), T] + \sum_{i=1}^{r} \int_{t_0}^{T} \Phi_i(t, x_i, u_i, v_i)dt,\ i = 1,2,3,...r \quad (4)$$

за умови максимізації його в процесі обрання вектору збурень $\nu_i(t)$ другим гравцем.

Припускаємо, що задані функції G та Φ_i мають неперервні частинні похідні за x_i, u_i, v_i. Функції $u_i(t)$ та $\nu_i(t)$ називаються програмними стратегіями гравців. Вважаємо, що обмеження на стратегії гравців враховані в процесі обрання вигляду функціоналу (4).

Пара стратегії гравців u_i^0 та ν_i^0 називається оптимальною, якщо має місце співвідношення:

$$I(u_i^0, \nu_i) \le I(u_i^o, \nu_i^o) \le I(u_i, \nu_i^0). \quad (5)$$

Необхідними умовами оптимальності стратегій u_i^0 та ν_i^0 є [3]:

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \nu_i} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial u_i^2} \ge 0, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial \nu_i^2} \le 0, \quad (7)$$

а достатніми умовами – співвідношення (6) та умова (7), в якій має місце сувора нерівність. Стратегії гравців u_i^0 та ν_i^0, що задовольняють достатнім умовам, забезпечують існування сідлової точки (5) диференціальної гри (1)-(4). Процес керування траєкторним рухом АКС будемо розглядати у межах таких математичних моделей диференціальних ігор, які задовольняють умовам (6) та (7).

З виразу (5) випливає, що довільний закон зміни вектору збурень, відмінний від оптимального ν_i^0, не погіршує якість процесу керування об'єктом, яке досягається при оптимальному керуванні u_i^0. Тому керування u_i^0 гарантує якість процесу керування не гірше оцінки (u_i^o, v_i^0) в умовах дії довільних обмежених збурень. Враховуючі, що керування u_i^0 забезпечує отримання гарантованої оцінки якості процесу керування і адаптивність до конкретного виду дії збурень, керування u_i^0 називається гарантовано-адаптивним [2,3].

Моделювання процесу керування виведенням багаторежимної АКС на орбіту у формі диференціальної гри знімає невизначеність, що викликана дією збурень. Розкриття невизначеності досягається ціною ускладнення математичної моделі та процесу моделювання, в результаті чого, окрім оптимального керування u_i^0, необхідно визначити закон зміни вектору збурень ν_i^0, що описує максимальну протидію цілям термінального керування.

Метод синтезу керування

Для синтезу алгоритмів керування виведенням багаторежимної АКС на орбіту у невизначених умовах впливу збурень скористаємося диференціально-ігровим підходом [4,5] з використанням математичного апарату диференціальних перетворень [6].

Диференціальні перетворення дозволяють замінити функції $x(t)$ неперервного аргументу t їх моделями у вигляді дискретних функцій $X(k)$ цілочислового аргументу $k = 0, 1, 2, \ldots$ згідно виразу:

$$\underline{x(t)} = X(k) = \frac{h^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0}, \qquad (8)$$

де $x(t)$ – оригінал, що являє собою неперервну і обмежену разом із усіма своїми похідними функцію дійсного аргументу t; $X(k)$ – дискретна функція цілочислового аргументу k, яка називається диференціальним спектром функції $x(t)$ в точці $t = t_0$; h – масштабна стала, яка має розмірність аргументу t; риса знизу – символ перетворення.

Математичні моделі, що отримані на основі диференціальних перетворень (8) вихідної математичної моделі, називаються спектральними моделями. У подальшому будемо вважати, що функції часу, які описують процеси керування в задачі (1)-(4) усередині кожної ділянки руху, є аналітичними.

Синтез гарантовано-адаптивних алгоритмів керування здійснимо у два етапи [5]. На першому етапі виконаємо синтез ігрових оптимальних алгоритмів програмного керування $u_i^0(t)$ та максимально протидіючого збурення $\nu_i^0(t)$, які задовольняють умовам (6) та (7), у середині кожної ділянки керування в класі аналітичних функцій $u_i(\tau, A_i)$ та $v_i(\tau, B_i)$, де $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{iN})$ та $B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots b_{iM})$ – вектори вільних параметрів, τ - локальний часовий аргумент.

Оберемо масштабну сталу $h = T_i$ та приймемо $\tau = 0$. Застосувавши диференціальні перетворення (8) до функцій $u_i(\tau, A_i)$ та $v_i(\tau, B_i)$ отримуємо їх диференціальні спектри у вигляді:

$$\underline{u}_i(\tau, A_i) = U_i(k, A_i) = \frac{T_i^k}{k!}\left[\frac{d^k u_i(t_{i-1}+\tau, A_i)}{dt^k}\right]_{\tau=0} \tag{9}$$

$$\underline{v}_i(\tau, A_i) = V_i(k, B_i) = \frac{T_i^k}{k!}\left[\frac{d^k \nu_i(t_{i-1}+\tau, B_i)}{dt^k}\right]_{\tau=0} \tag{10}$$

Диференціальне рівняння (1) в області зображень на основі перетворень (8) зображується у формі спектральної моделі:

$$X_i(k+1, A_i, B_i, X_i^0) = \frac{T_i}{k+1}\underline{f_i}\left[T_i, X_i(k, A_i, B_i, X_i^0), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)\right], \tag{11}$$

$$X_i(0) = X_i^0(A_{i-1}, A_{i-2}, \ldots A_1, B_{i-1}, B_{i-2}, \ldots, B_1);\ X_1(0) = X_1^0 = x_0;\ i = \overline{1, r}.$$

Спектральна модель (11) має універсальний характер та може бути використана для рішення задач траєкторного руху різних багаторежимних літальних апаратів, які відрізняються як за своєю компоновкою, так й за багаторежимністю. Відмітимо, що оскільки диференціальні перетворення (8) є точним операційним методом, то спектральна модель (11) не має методичних похибок та потенційно дозволяє отримати точне рішення диференційного рівняння (1). Рекурентний вираз (11) дозволяє знайти диференціальний спектр $X_i(k, A_i, B_i, X_i^0)$ вектору стану $x_i(t)$ за диференціальними спектрами (9) та (10).

Скористаємося властивістю диференціальних перетворень, згідно якої алгебраїчна сума усіх дискет диференціального спектру будь-якої аналітичної функції в точці $t = t_\nu$ дорівнює нульовій дискреті диференціального спектру функції в точці $t_{\nu+1} = t_\nu + h$ або значенню оригіналу функції в тій самій точці [6]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_\nu(k) = X_{\nu+1}(0) = x(t_\nu + h). \tag{12}$$

З співвідношення (12) при $t_\nu = t_{i-1}$ та $h = T_i$ знаходимо вектор стану в кінці кожної ділянки керування:

$$x_i(T_i, A_i, B_i, x_i^0) = \sum_{k=0}^{\infty} X_i(k, A_i, B_i, X_i^0),\ i = \overline{1, r}. \tag{13}$$

Тоді рівняння кінцевого стану усього процесу керування (3) з урахуванням виразу для спряження термінальних та початкових ділянок (2), а також виразу для вектору стану в кінці кожної ділянки (13) перетвориться до вигляду:

$$S[A_1, A_2, \ldots, A_r, B_1, B_2, \ldots, B_r] = 0. \tag{14}$$

Дана термінальна умова у неявній формі визначає q-компонент векторів вільних параметрів A_i та B_i, $i = \overline{1, r}$ у вигляді функцій від T_i та x_i^0. Решту *M*+*N*-*q* компонентів векторів вільних параметрів визначаємо із умов (6) стаціонарності функціоналу (4). Представимо функціонал (4) на основі диференціальних перетворень (8) у вигляді векторів невизначених параметрів A_i та B_i:

$$I(A_1, A_2, ..A_r, B_1, B_2, ...B_r) = G[A_1, A_2, ..A_r, B_1, B_2, ...B_r] + \sum_{i=1}^{r} T_i \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{\Phi_i}\left[T_i, X_i(k, A_i, B_i, X_i^0), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)\right]}{k+1}. \tag{15}$$

Умови стаціонарності (6) функції (15) дають можливість отримати систему рівнянь для визначення решти *M*+*N*-*q* невідомих компонент векторів вільних параметрів $A_1, A_2, \ldots, A_r$ та $B_1, B_2, \ldots, B_r$:

$$\frac{\partial I(A_1, A_2,...A_r, B_1, B_2,...., B_r)}{\partial a_{ij}} = 0, \;\; q+1 \le i \le N, \tag{16}$$

$$\frac{\partial I(A_1, A_2,...A_r, B_1, B_2,...., B_r)}{\partial b_{ij}} = 0, \;\; 1 \le j \le M. \tag{17}$$

Розв’язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (14), (16) та (17), у випадку їх сумісності, дозволяє знайти компоненти векторів вільних параметрів $A=(A_1, A_2,..., A_r)$ та $B=(B_1, B_2,..., B_r)$ програмних стратегій обох гравців у вигляді функції вектору довільного початкового стану $x_0 = x_1(t_0)$. Після цього можуть бути перевірені достатні умови (6), (7) оптимальності стратегій гравців при суворій нерівності у виразі (7).

У випадку, коли система рівнянь (14), (16) та (17) несумісна, диференціальна гра (1)-(7) не має рішення при вибраному вигляді функцій $u(t, A)$ та $v(t, B)$ і тоді необхідно змінити вигляд функцій з вільними параметрами або розширити розмірність векторів вільних параметрів [4]. Таким чином, у результаті виконання першого етапу у неявній формі встановлюється нелінійний зв'язок програмних стратегій обох гравців $u(t, A)$ та $v(t, B)$ з вектором начального стану $x_0 = x_1(t_0)$. Ці стратегії можуть бути використані тільки у початковий момент часу t_0 і не враховують зміни стану у процесі руху. Для врахування поточного стану процесу керування необхідно синтезувати алгоритми керування та максимальної протидії збурень у формі позиційних стратегій гравців $u = u(x,t), v = v(x,t)$.

На другому етапі синтезу зробимо наступне припущення. Будемо розглядати тільки такі моделі процесу керування, у яких стратегії гравців існують та дозволяють зв’язати довільну початкову умову у межах заданої області простору стану із заданими термінальними умовами (3). Синтез стратегій поза заданої області простору стану не розглядається.

У кожний поточний момент часу t для кожного поточного стану гри $x(t)$ із розв’язання системи рівнянь (14), (16) та (17) визначається пара стратегій гравців $u^o[t, A(T, x)]$ та $v^0[t, B(T, x)]$, що пов’язують поточний стан гри із заданими термінальними умовами (3). Якщо організувати неперервний за часом процес обчислювання параметрів A та B стратегій гравців, то на множині рішень можна сформувати стратегії гравців на кожній ділянці руху у вигляді $u[t, A(T, x)]$ та $v[t, B(T, x)]$.

Перший гравець, який реалізує потенційну стратегію $u[t, A(T, x)]$, що безперервно визначається з системи рівнянь (14), (16) та (17), гарантує керування багаторежимної АКС з досягненням заданих термінальних умов (3) при максимальній протидії збурень, дія яких моделюється стратегією другого гравця $v[t, B(T, x)]$.

За необхідності знайти оптимальну траєкторію $x(t, A, B)$ її компоненти можуть бути визначені у вигляді відрізків рядів Тейлора або з використанням зворотних диференціальних перетворень у формі багаточленів Лежандра, Чебишева, рядів Фур’є [6]. При цьому, вільні параметри апроксимуючих функцій визначають з порівняння диференціальних спектрів компонент вектору стану з диференціальними спектрами апроксимуючих функцій. Рівняння зв’язку між вільними параметрами деяких апроксимуючих функцій та дискретами диференціального спектру невідомої функції часу надано в [6].

Синтез гарантовано-адаптивного алгоритму

Синтез гарантовано-адаптивного керування виконуємо за математичною моделлю диференціальної гри, яка містить опис траєкторного руху АКС з урахуванням впливу збурень. Відповідна спектральна модель наведена в праці [7].

Програмну зміну кута тангажу задаємо у вигляді суми двох складових:

$$\vartheta = u + \sigma, \tag{18}$$

де $u-$ керування процесом виведення АКС при відсутності впливу збурень, σ – приріст кута тангажу, необхідний для парирування впливу зовнішніх збурень.

Складова σ являє собою сумарну характеристику дії різних збурень в процесі виведення АКС на орбіту. На відміну від стохастичних моделей опис процесу виведення АКС на орбіту у формі диференціальної гри не вимагає апріорної інформації про стохастичні моделі зовнішніх збурень та гарантує досягнення заданих термінальних умов при найбільш несприятливому випадку сполучення дії факторів збурень.

Припускаємо, що складовою керування u володіє перший гравець, а додаткова складова керування σ визначається впливами факторів збурень, які розглядаються з позицій другого гравця, який має протилежні цілі керування.

Синтез програмних стратегій обох гравців виконаємо в класі аналітичних функцій:

$$u = e_0 + e_1 t, \tag{19}$$

$$\sigma = b_0 + b_1 t. \tag{20}$$

Тут e_0, e_1, b_0, b_1 – параметри, що підлягають визначенню.

Тоді програмна зміна кута тангажу буде мати вигляд:

$$\vartheta = a_0 + a_1 t, \tag{21}$$

де $a_0 = e_0 + b_0$, $a_1 = e_1 + b_1$.

Задача першого гравця полягає у переведенні АКС із початкових умов

$$X1(0) = X10\,,\; X2(0) = X20\,,\; Y1(0) = Y10\,, Y2(0) = Y20 \tag{22}$$

в задані кінцеві:

$$Y1(T_i) = H_{T_i}\,, Y2(T_i) = \dot{H}_{T_i}\,,\; X2(T_i) = V_{T_i} \tag{23}$$

з мінімальним значенням функціоналу якості, при умові максимізації його другим гравцем, який імітує вплив найбільш несприятливого сполучення факторів збурень. Введені позначення відповідають позначенням в спектральній моделі траєкторного руху АКС [7].

Введемо до розгляду наступний функціонал якості:

$$I_i = \frac{\lambda_1}{2}\left[H_{T_i} - Y1(T_i)\right]^2 + \frac{\lambda_2}{2}\left[\dot{H}_{T_i} - Y2(T_i)\right]^2 + \frac{\lambda_3}{2}\int_0^T \left(u_i^2 - \nu\sigma_i^2\right)dt, \tag{24}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ та ν – додаткові вагові множники.

Перші два вирази (24) характеризують термінальні помилки за висотою та вертикальною складовою швидкості. Інтегральна складова функціоналу (24) обмежує обрання керування АКС та вплив факторів збурень в процесі виведення АКС на орбіту.

Для визначення гарантовано-адаптивного алгоритму керування обчислені дискрети диференціальних спектрів змінних траєкторного руху АКС [7] виразимо у вигляді функцій від початкових значень перемінних математичної моделі (1), вільних параметрів a_0, a_1 керування кутом тангажу ϑ, що прогнозується, та тривалості i-ої ділянки виведення T_i.

Скориставшись властивістю диференціальних перетворень (8), згідно якої алгебраїчна сума всіх дискрет диференціального спектра будь-якої аналітичної функції в точці $t_0 = 0$ дорівнює значенню оригіналу функції в точці $t = T_i$ закінчення i-ої ділянки процесу керування, отримаємо рівняння, що пов'язують параметри керування (a_0, a_1) та параметри траєкторного руху орбітального ступеню АКС із заданими висотою H_{T_i}, вертикальною швидкістю набора висоти $\dot{H}_{T_i}$ та необхідної орбітальної швидкості $X2(T_i)$ відповідно:

$$Y1(T_i) = Y10 + T_iY20 + \frac{A_iT_i^2}{2} + \frac{T_i^3}{6}\left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_0 + a_1 \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_0 + B_i \cdot \left(\frac{2X20}{R_3 + Y10} + 2\Omega_3\right)\right] = H_{T_i} \cdot \quad (25)$$

$$Y2(T_i) = Y20 + A_iT_i + \frac{T_i^2}{2}\left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_0 + a_1 \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_0 + B_i \cdot \left(\frac{2X20}{R_3 + Y10} + 2\Omega_3\right)\right] = \dot{H}_{T_i}. \quad (26)$$

$$X2(T_i) = X20 + B_iT_i + \frac{T_i^2}{2}\left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_0 - a_1 \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_0 - A_i \cdot \left(\frac{X20}{R_3 + Y10} + 2\Omega_3\right)\right] = V_{T_i}. \quad (27)$$

Диференціальне перетворення виразу (21) дає диференціальний спектр кута тангажу в вигляді:

$$\upsilon(k) = (e_0 + b_0)\text{ъ}(k) + (e_1 + b_1)T_i\text{ъ}(k-1). \quad (28)$$

Підстановка диференціальних спектрів функцій (19) та (20) у вираз (24), до якого застосовано диференціальні перетворення, дозволяє представити функціоналу якості (24) у вигляді

$$I_i = \frac{\lambda_1}{2}\left[H_{T_i} - Y1(T_i)\right]^2 + \frac{\lambda_2}{2}\left[\dot{H}_{T_i} - Y2(T_i)\right]^2 + \frac{\lambda_3T_i}{2}\left[e_1^2 - \upsilon b_0^2 + T(e_0e_1 - \upsilon b_0b_1) + \frac{T_i^2}{3}(e_1^2 - \upsilon b_1^2)\right]. \quad (29)$$

Диференціюючи вираз (29) за вільними параметрами керування e_0, e_1, b_0, b_1, знайдемо похідні, які згідно необхідним умовам екстремуму функції (29) дорівнюють нулеві:

$$\frac{\partial I_i}{\partial e_0} = -\lambda_1\left[H_{T_i} - Y1(T_i)\right] \cdot \frac{\partial Y1(T_i)}{\partial e_0} - \lambda_2\left[\dot{H}_{T_i} - Y2(T_i)\right] \cdot \frac{\partial Y2(T_i)}{\partial e_0} + \frac{\lambda_3T_i^2}{2}(2e_0 + e_1T_i), \quad (30)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial b_0} = -\lambda_1\left[H_{T_i} - Y1(T_i)\right] \cdot \frac{\partial Y1(T_i)}{\partial b_0} - \lambda_2\left[\dot{H}_{T_i} - Y2(T_i)\right] \cdot \frac{\partial Y2(T_i)}{\partial b_0} - \frac{\lambda_3T_i^2}{2}(2b_0 + b_1T_i), \quad (31)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial e_1} = -\lambda_1\left[H_{T_i} - Y1(T_i)\right] \cdot \frac{\partial Y1(T_i)}{\partial e_1} - \lambda_2\left[\dot{H}_{T_i} - Y2(T_i)\right] \cdot \frac{\partial Y2(T_i)}{\partial e_1} + \frac{\lambda_3T_i^2}{2}\left(e_0 + \frac{2}{3}e_1T_i\right), \quad (32)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial b_1} = -\lambda_1\left[H_{T_i} - Y1(T_i)\right] \cdot \frac{\partial Y1(T_i)}{\partial b_1} - \lambda_2\left[\dot{H}_{T_i} - Y2(T_i)\right] \cdot \frac{\partial Y2(T_i)}{\partial b_1} - \frac{\lambda_3T_i^2}{2}\left(b_0 + \frac{2}{3}b_1T_i\right). \quad (33)$$

Аналіз виразів (25), (26) із урахуванням позначень (21) дозволяє зробити висновок:

$$\frac{\partial Y1(T_i)}{\partial e_0} = \frac{\partial Y1(T_i)}{\partial b_0}; \quad \frac{\partial Y2(T_i)}{\partial e_0} = \frac{\partial Y2(T_i)}{\partial b_0}; \quad (34)$$

$$\frac{\partial Y1(T_i)}{\partial e_1} = \frac{\partial Y1(T_i)}{\partial b_1}; \quad \frac{\partial Y2(T_i)}{\partial e_1} = \frac{Y2(T_i)}{\partial b_1}. \quad (35)$$

Різниця виразів (30) та (31) при виконанні співвідношень (34) дає рівняння для визначення вільних параметрів:

$$2(e_0 + \upsilon_ib_0) + T_i(e_1 + \upsilon_ib_1) = 0. \quad (36)$$

Віднімаючи вираз (33) з виразу (32) та приймаючи до уваги співвідношення (35), отримуємо друге рівняння для визначення вільних параметрів:

$$(e_0 + \upsilon_ib_0) + \frac{2}{3}T_i(e_1 + \upsilon_ib_1) = 0. \quad (37)$$

Розв’язання системи рівнянь (36), (37) дозволяє встановити співвідношення між оптимальними значеннями параметрів керування та збурень:

$$e_0 = -\upsilon_ib_0, \quad (38)$$

$$e_1 = -\upsilon_ib_1. \quad (39)$$

З аналізу виразів (30)−(33) витікає, що другі похідні функції (29) за параметрами e_0 та e_1 додаткові, а за параметрами b_0 та b_1 від’ємні при нульових термінальних помилках за висотою та вертикальною швидкістю. Це підтверджує існування сідлової точки функції (29) при високоточному виведенні АКС в задані термінальні умови.

Співвідношення (38) и (39) між параметрами керування та збурень дозволяє звести задачу синтезу керування до визначення параметрів e_0, e_1 та часу T_i виведення АКС на орбіту, яке може бути знайдено з рівняння (27), отриманого з граничної умови (23), з урахуванням позначень (21).

Таким чином, для визначення трьох невідомих e_0, e_1 та часу T_i є три рівняння (30), (32) та (27). З цих рівнянь виключимо на основі виразів (38) та (39) параметри збурень b_0, b_1. Із рівняння (32) визначимо в явній формі параметр управління e_1:

$$e_1 = -\frac{1}{T_i} \cdot \frac{\lambda_1 N_3 N_4 + \lambda_2 M_3 M_4 + \frac{\lambda_3}{2}\vartheta_k}{rT_i\left(\lambda_1 N_4^2 + \lambda_2 M_4^2\right) + \frac{\lambda_3}{3}}, \qquad (40)$$

де $N_4 = \frac{T_i}{6} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos r\vartheta_k$,

$$N_3 = Y10 - H_{T_i} + T_i Y20 + \frac{A_i T_i^2}{2} + \frac{T_i^3}{6}\left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin r\vartheta_k + B_i \cdot \left(\frac{2X20}{R_3 + Y10} + 2\Omega_3\right)\right],$$

$$M_3 = Y20 - \dot{H}_{T_i} + A_i T_i + \frac{T_i^2}{2}\left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin r\vartheta_k + B_i \cdot \left(\frac{2X20}{R_3 + Y10} + 2\Omega_3\right)\right],$$

$$M_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos r\vartheta_k,$$

$$A_i = \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin r\vartheta_k - g + \frac{(X20)^2}{R_3 + Y10} + 2\Omega_3 X2 + \frac{\rho_0 V_0}{m_{0_i}}\left[C_3\alpha_0 X20 - \left(C_1 + C_2 C_3 \alpha_0^2\right)Y20\right],$$

$$B_i = \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos r\vartheta_k - \frac{X20 \cdot Y20}{R_3 + Y10} - 2\Omega_3 Y20 - \frac{\rho_0 V_0}{m_{0_i}}\left[C3\alpha_0 Y20 + (C1 + C2 \cdot C3 \cdot \alpha_0^2) X20\right],$$

$$r = \frac{\nu_i - 1}{\nu_i}.$$

Виключимо знайдений параметр e_1 з виразів (30) та (27). Після цього, замінюючи довільні початкові умови поточними значеннями змінних траєкторного руху та параметр керування e_0 – поточним значенням кута тангажу ϑ_k, отримаємо гарантовано-адаптивний алгоритм виведення АКС на орбіту у наступній формі:

$$\vartheta_k = \frac{T_i^2}{\lambda_3}\left[\begin{array}{l} \frac{\lambda_1\delta_1\left(H_{T_i} - Y1\right)}{T_i^2} + \frac{\lambda_2\delta_2 \dot{H}_{T_i}}{T_i^2} - \frac{Y2}{T_i} \cdot \left(\lambda_1\delta_1 + \frac{\lambda_2\delta_2}{T_i}\right) - A_i \cdot \left(\frac{\lambda_1\delta_1}{2} + \frac{\lambda_2\delta_2}{T_i}\right) - \\ - \frac{T_i}{2} d_1 \cdot \left(\frac{\lambda_1\delta_1}{3} + \frac{\lambda_2\delta_2}{T_i}\right) \end{array}\right] - \frac{T_i}{2} e_1, \qquad (41)$$

де $\delta_1 = \frac{T_i}{2} \cdot \left(\frac{P_i}{m_{0_i}} \cos r\vartheta_k + \frac{T_i}{3} d_2\right)$, $\delta_2 = \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos r\vartheta_k + \frac{T_i}{2} d_2$,

$$d_1 = \frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin r\vartheta_k + re_1 \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos r\vartheta_k + B_i\left(\frac{2X20}{R_3 + Y10} + 2\Omega_3\right),$$

$$d_2 = \frac{P_i}{m_{0_i}}\left\{\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cos r\vartheta_k - \sin r\vartheta_k\left[re_1 + \left(\frac{2X20}{R_3 + Y10} + 2\Omega_3\right)\right]\right\}.$$

Час виведення АКС на орбіту з урахуванням введених позначень визначається із рівняння (27):

$$T_i = \frac{1}{d_3}\left[-B_i + \sqrt{B_i^2 + 2\left(V_{T_i} - X20\right)d_3}\right],$$

де $d_3 = \frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos r\vartheta_k - re_1 \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin r\vartheta_k - A_i\left(\frac{X20}{R_3 + Y10} + 2\Omega_3\right)$.

Вибір вагових множників $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ у виразі (41) визначається вимогами до термінальних помилок виведення АКС на орбіту, а також достатніми умовами екстремуму функції (29).

Гарантовано-адаптивний алгоритм (41), синтезований за диференціально-ігровою моделлю процесу керування, є більш складним порівняно з іншими алгоритмами [8,9]. В той самий час ускладнений алгоритм (41) забезпечує гарантію виведення АКС в задані термінальні умови у випадку дії збурень, обмежених складовою функціоналу (24).

З рівнянь (38), (39) витікає, що для парирування найгіршого сполучення факторів збурень та виведення АКС на орбіту рівень складових кута відхилення тангажу повинен бути в ν раз більшим, ніж вплив параметрів збурень. Тому гарантія виведення АКС на орбіту у випадку найгіршого сполучення факторів збурень може бути реалізована тільки за наявності ресурсу керування, достатнього для парирування дії збурень та виведення АКС в задані термінальні умови.

Особливістю синтезованого гарантовано-адаптивного алгоритму порівняно з іншими алгоритмами є досягнення найменших термінальних помилок при дії збурень на процес виведення АКС на орбіту. Наявність сідлової точки функціоналу (24) забезпечує зниження термінальних помилок, якщо в реальному процесі керування виведенням багаторежимної АКС на орбіту сполучення факторів збурень не є найгіршим.

Коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку за неузгодженістю висоти та вертикальної швидкості алгоритму (41) є змінними, що залежать від траєкторних параметрів процесу виведення АКС на орбіту, характеристик АКС, а також від параметру υ_i обмеження впливу збурень у складовій функціоналу (24).

Висновки

Синтезований гарантовано-адаптивний алгоритм виведення багаторежимної АКС на орбіту на основі диференціальних перетворень математичної моделі диференціальної гри. Алгоритм володіє не тільки властивостями адаптації до дії збурень, але й забезпечує гарантію виведення на орбіту багаторежимної АКС в задані термінальні умови при дії обмежених збурень.

Список літератури

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры / Айзекс Р. – М.: Мир, 1967. – 479 с.
2. Васильев В. В. Моделирование задач оптимизации и дифференциальных игр / В. В. Васильев, В. Л. Баранов. – К.: Наукова Думка, 1989. – 294 с.
3. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Ю-Ши Х. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
4. Баранов В. Л. Моделирование игровых алгоритмов терминального управления динамическими объектами / В. Л. Баранов, О. С. Уруский, Г. Л. Баранов, Е. Ю. Комаренко // Электронное моделирование. – 1996. – Т.18, №2. – С. 75-81.
5. Гусинін А.В. Диференціально-ігровий підхід до синтезу алгоритмів керування багаторежимних літальних апаратів / А.В. Гусинін // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – №1(88). – С. 40-46.
6. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наукова думка, 1990. – 184 с.
7. Збруцький О.В. Диференціальні Т-перетворення в задачах автоматичного керування рухом літальних апаратів : навч. посіб. / О.В. Збруцький, В.П. Гусинін, А.В. Гусинін. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 176 с.
8. Легенький В.И. Алгоритмы управления орбитальным самолетом на этапе выведения / В.И. Легенький, О.С. Уруский, Ю.М. Саранчук // Оборудование летательных аппаратов. – К.: КВВАИУ, 1991. – Вып. 5,6.
9. Уруский О.С. Алгоритм траекторного управления составным объектом на участке выведения с использованием прогноз-модели / О.С. Уруский // Оборудование летательных аппаратов. – 1990. – Вып. 6-7. – С. 23-25.

Статтю подано до редакції 28.11.2013