УДК 004.421.6

Львов М. С, канд. физ-мат наук

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИЛЕНИЯ ДИСПЕРСИОННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ 4-Х ВОЛНОВОГО НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

Херсонский государственный университет

Изложен алгоритм решения системы диофантовых уравнений для дисперсионной функции четырех волнового нелинейного резонанса. Определена группа симметрий модели. Рассматриваются как асимметричные, так и симметричные решения. Для множества асиметричных решений предложен эффективный алгоритм, а множество симметричных решений описано в виде серий решений, заданных параметрически

Введение

Изучение явления нелинейного волнового резонанса – одна из наиболее важных и быстро развивающихся областей современной нелинейной динамики. Для интеграции исследований в этой области на основе информационно-коммуникационных технологий в январе 2009 г. был начат совместный украинско-австрийский проект «Разработка символьных методов и веб-технологий для виртуального центра вычислений нелинейных резонансов» (проект *CENREC*) http://cenrec.risc.uni-linz.ac.at/portal/.

Исполнители проекта – НИИ символьных вычислений, университет Кеплера, Линц, Австрия, и НИИ информационных технологий, Херсонский государственный университет, Украина.

Основная цель проекта *CENREC* – создание веб-портала виртуального центра вычислений задач нелинейного резонанса как интернационального открытого источника информационных ресурсов научного и учебного назначения. Более детально архитектура и функциональность портала *CENREC* как ресурса научного и учебного назначения см. в [1, 2].

Одна из основных задач проекта – создание мощной библиотеки программных средств, решающих основные задачи теории нелинейных резонансом. Эта библиотека включать в себя как ранее разработанные в различных средах программы, так и новые программы, которых реализованы эффективные алгоритмы. Таким образом, разработка новых, эффективных алгоритмов решения задач нелинейного резонанса для многих практически важных случаев – одна из основных задач проекта.

Оказывается, что наиболее трудоемкой с вычислительной точки зрения является задача решения системы диофантовых уравнений для дисперсионной функции [3, 4]. Реализации алгоритмов решения этой задачи для двухмерной волны, 3-х и 4-х волнового резонанса посвящены работы [5 - 8]. Более полная библиография по теории нелинейного резонанса содержится на портале *CENREC*. В настоящей работе описывается эффективный алгоритм решения задачи вычисления дисперсионной функции для 4-х волнового резонанса.

Постановка задачи

Пусть

$$k \overset{df}{=} (m, n),$$

$$k_1 = (m_1, n_1),\ k_2 = (m_2, n_2),$$

$$k_3 = (m_3, n_3),\ k_4 = (m_4, n_4),$$

$$\omega(k) \overset{df}{=} \sqrt{\sqrt{m^2 + n^2}} = (m^2 + n^2)^{1/4}.$$

Система уравнений для дисперсионной функции в задаче 4-х волнового нелинейного резонанса имеет вид

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4, \tag{1}$$

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) = \omega(k_3) + \omega(k_4), \tag{2}$$

$$m, n \in [-D_{\max}, D_{\max}]. \tag{3}$$

Требуется найти все k_1, k_2, k_3, k_4 с целочисленными координатами, удовлетворяющие (1)-(3). Таким образом, нужно найти все решения системы диофантовых уравнений (1), (2) на симметричном отрезке $[-D_{\max}, D_{\max}]$ множества целых чисел. Несколько модификаций алгоритма решения этой задачи изложены в [5 - 8]. Как мы покажем далее, множество всех решений задачи можно классифицировать как множество асимметричных решений и множество так называемых симметричных решений. Симметричные решения можно описать в виде серий, заданных параметрически. Например:

$$\bar{k}_1 = (a,b),\ \bar{k}_2 = (b,a),$$
$$\bar{k}_3 = (-a,-b),\ \bar{k}_4 = (-b,-a),$$
$$a,b \in N.$$

Подстановка этих значений в (1), (2) превращает эти уравнения в тождества. Наряду с симметричными решениями существуют и асимметричные решения. Например:

$$\bar{k}_1 = (256,512),\ \bar{k}_2 = (1980,360),$$
$$\bar{k}_3 = (800,400),\ \bar{k}_4 = (1436,472).$$

С физической точки зрения асимметричные решения представляют гораздо больший интерес, чем симметричные. Однако алгоритмы, описанные в [5 - 8] генерируют в смеси и симметричные, и асимметричные решения. Поскольку число симметричных решений очень велико, это приводит к существенному увеличению времени работы программы. Кроме того, анализ результатов ее работы существенно усложняется. Таким образом, во-первых, возникает задача построения алгоритма, который генерирует только асимметричные решения. Во-вторых, возникает задача описания всех симметричных решений в виде серий, заданных параметрически.

1. Группа симметрий модели (1)-(3)

Определение 1. Определим группу G_{sym} симметрий системы уравнений (1), (2) на области (3) следующим образом:

1. Элементом группы симметрий является «знаковая подстановка»

$$\begin{pmatrix} (m_1 & n_1) & (m_2 & n_2) & (m_3 & n_3) & (m_4 & n_4) \\ (r_1, & s_1) & (r_2 & s_2) & (r_3 & s_3) & (r_4 & s_4) \end{pmatrix},$$

где

$$r_j = \begin{cases} \pm m_k \\ \pm n_k \end{cases},\quad s_j = \begin{cases} \pm m_k \\ \pm n_k \end{cases}, \qquad (4)$$

т.е. каждый элемент второй строки – перестановка элементов первой строки, в которой перед переменной допускается знак плюс или минус.

2. Элемент группы симметрий, примененный к модели задачи, удовлетворяет этой модели.

3. Параллелограммы (неупорядоченные четверки точек) с вершинами

$$(m_1, n_1),\ (m_2, n_2),\ (m_3, n_3),\ (m_4, n_4),$$

и

$$(r_1, s_1),\ (r_2, s_2),\ (r_3, s_3),\ (r_4, s_4),$$

различны.

Например: подстановка

$$\begin{pmatrix} (m_1 & n_1) & (m_2 & n_2) & (m_3 & n_3) & (m_4 & n_4) \\ (n_4 & m_4) & (n_3 & m_3) & (n_2 & m_2) & (n_1 & m_1) \end{pmatrix},$$

удовлетворяет условиям 1 – 3.

Описание группы G_{sym}. Нетрудно видеть, что условиям (1)-(3) определения 1 удовлетворяют следующие преобразования плоскости:

1. Поворот плоскости на прямой угол. Группа поворотов содержит 4 элемента, перечисленные ниже:

α : ***(m, n)* → *(-n, m)***// поворот на $\pi/2$

α^2 : *(m, n)* → *(-m, -n)*

α^3 : *(m, n)* → *(n, -m)*

$\alpha^4 = e$: *(m, n)* → *(m, n)*

2. Симметрии плоскости относительно осей *OX* и *OY*. Эти группы имеют порядок 2. Неединичные их элементы описаны ниже:

β : ***(m, n)* → *(m, -n)*** // *OX* симметрия

γ : **(*m*, *n*) → (-*m*, *n*)** // *OY* симметрия

3. Симметрии плоскости относительно биссектрис первой-третьей и второй-четвертой четвертей (прямых *x*=*y*, *x*=-*y*). Эти группы также имеют порядок 2. Неединичные их элементы описаны ниже:

δ : **(*m*, *n*) → (*n*, *m*)** // *x*=*y* симметрия

ε : **(*m*, *n*) → (-*n*, -*m*)** // *x*=-*y* симметрия

Множество элементарных преобразований плоскости образует группу симметрий 8-го порядка, называемую группой диэдра. (рис. 1)

Утверждение 1. Пусть знаковая подстановка имеет вид

$$\begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ \sigma(K_1) & \sigma(K_2) & \sigma(K_3) & \sigma(K_4) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\sigma \in G_{sym}$ и K_1, K_2, K_3, K_4 удовлетворяет модели (1),(2). Тогда четверка

$$\sigma(K_1), \sigma(K_2), \sigma(K_3), \sigma(K_4),$$

также удовлетворяет условиям (1), (2).

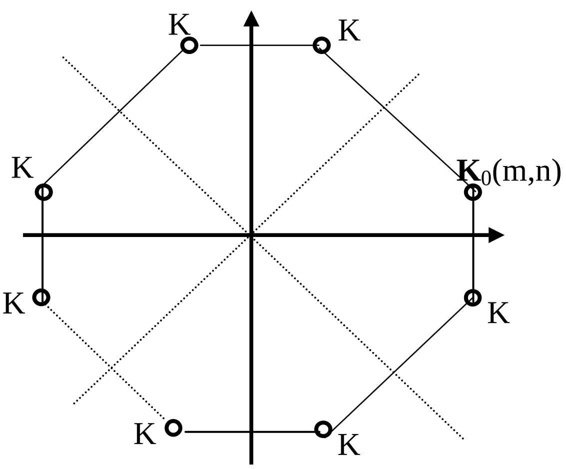

Рис. 1. Группа симметрий модели (1)-(3) (группа дієдра). Орбита точки $K_0(m,n)$

Утверждение 2. Пусть знаковая подстановка имеет вид (4) и четверка K_1, K_2, K_3, K_4 точек удовлетворяет (1), (2). Тогда четверка (r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3), (r_4, s_4) имеет вид $\sigma(K_{j1}), \sigma(K_{j2}), \sigma(K_{j3}), \sigma(K_{j4})$, где подстановка (j_1, j_2, j_3, j_4) переводит параллелограмм K_1, K_2, K_3, K_4 в себя. Эта группа описывается образующими

A1→ A2, A3 → A4, (A1, A2) → (A3, A4).

Таким образом, группа G_{sym}, определенная как группа «знаковых» подстановок координат четверки точек, является группой диэдра.

Отметим, что в определении группы G_{sym} мы не учитываем еще одного очевидного преобразования симметрии – растяжения плоскости $(m,n) \to (Cm, Cn), C \in N$. Его несложно учесть в алгоритме генерации асимметричных решений.

Определение 2. Решение K_1, K_2, K_3, K_4 модели (1), (2) называется асимметричным, если все четверки $\sigma(K_1), \sigma(K_2), \sigma(K_3), \sigma(K_4), \sigma \in G_{sym}$ попарно различны.

Определение 3. Решение K_1, K_2, K_3, K_4 модели (1), (2) называется симметричным, если существует такой элемент $\sigma \in G_{sym}, \sigma \neq e$, что

$$(K_1, K_2, K_3, K_4) =$$
$$= (\sigma(K_1), \sigma(K_2), \sigma(K_3), \sigma(K_4)).$$

2. Алгоритм генерации асимметричных решений

Алгоритм состоит из двух подалгоритмов, выполняемых последовательно. Первый из них генерирует таблицу *q*-классов (в обозначениях [5 - 8]).

Определение 2. Пусть $K(m,n)$ – точка плоскости. Точка K принадлежит (*q*)-классу, если

$$m^2 + n^2 = \gamma \cdot \sqrt[4]{q}, \quad (6)$$

где q – натуральное число, свободное от 4-х степеней.

Как показано в [5], условие (2) можно переписать либо в виде

$$\gamma_1 \cdot \sqrt[4]{q} + \gamma_2 \cdot \sqrt[4]{q} = \gamma_3 \cdot \sqrt[4]{q} + \gamma_4 \cdot \sqrt[4]{q}, \quad (7)$$

либо в виде

$$\gamma_1 \cdot \sqrt[4]{q_1} + \gamma_2 \cdot \sqrt[4]{q_2} = \gamma_1 \cdot \sqrt[4]{q_1} + \gamma_2 \cdot \sqrt[4]{q_2}. \quad (8)$$

Число q называется классом точки $K(m,n)$. Т.о., (7), (8) означает, что либо любая четверка точек, образующая решение задачи (1), (2), либо состоит из 4-х точек одного (q)-класса, либо состоит из из двух пар точек, принадлежащих двум различным классам.

Опишем основную идею алгоритма генерации решений случая (7).

1. Алгоритм генерирует попарно различные четверки точек плоскости (K_1, K_2, K_3, K_4) одного (q)-класса в первом октанте плоскости: $x \ge 0, y \ge 0, x \ge y$, такие что $q_1 - q_3 = q_4 - q_2$, $q_1 - q_3 \ge 0$.

Таким образом, удовлетворяется условие (7), а вместе с ним и условие (2). Легко видеть, что эти условия инвариантны относительно преобразований группы G_{sym}.

2. Для каждой четверки (K_1, K_2, K_3, K_4) находятся все такие четверки вида

$$(\sigma_1(K_1), \sigma_2(K_2), \sigma_3(K_3), \sigma_4(K_4)),\ \sigma_i \in G_{sym},$$

что

$$\sigma_1(k_1) - \sigma_3(k_3) = \sigma_4(k_4) - \sigma_2(k_2). \quad (9)$$

Выполнение этого условия означает выполнение условия (2). Тогда, ввиду того, что поиск осуществляется в одном (q)-классе, и базовая четверка попарно различных точек (K_1, K_2, K_3, K_4) выбирается из первого октанта, найденные четверки

$$(\sigma_1(K_1), \sigma_2(K_2), \sigma_3(K_3), \sigma_4(K_4)),\ \sigma_i \in G_{sym}$$

также попарно различны и образуют асимметрическое решение.

Положим $\sigma_1 = e$. Это означает, что первая точка всегда выбирается из первого октанта. Тогда алгоритм будет генерировать только одно решение S из каждых восьми различных решений вида

$$\begin{gathered} S,\ \sigma_1(S),\ \sigma_2(S),\ \sigma_3(S), \\ \sigma_4(S),\ \sigma_5(S),\ \sigma_6(S),\ \sigma_7(S) \end{gathered}. \quad (10)$$

Таким образом, условие (9) используется в упрощенном виде

$$k_1 - \sigma_3(k_3) = \sigma_4(k_4) - \sigma_2(k_2), \quad (11)$$

и перебор четверок осуществляется в виде $(K_1,\ \sigma_2(K_2),\ \sigma_3(K_3),\ \sigma_4(K_4)),\ \sigma_i \in G_{sym}$.

На первом этапе (подалгоритм 1) выполняются следующие шаги:

1. Сформировать:

1.1. массив P всех простых чисел $P = \{p : p < \sqrt[4]{2D_{\max}^2}\}$.

1.2. массив $P4$ всех 4-х степеней простых чисел из массива P.

2. Для всех (m,n), $m \le n \le D_{\max}$ вычислить

2.1. $A_{m,n} = m^2 + n^2$.

2.2. $\gamma, q : K_{m,n} = \gamma \cdot \sqrt[4]{q}$.

Вычисления оформлены в виде отдельной процедуры, которая формирует таблицу TP с ключом q и данными (m,n,γ). Каждая строка таблицы TP – список, представляющий (q)-класс для данного числа q. Элементы списка (q) упорядочены по (m,n) в том порядке, в котором они перечисляются в п.2.

Отметим, что алгоритмы, описанные в [1 - 4], в качестве параметров двойного цикла используют числа q и γ, вычисляя все представления результата в виде $m^2 + n^2$. Можно сказать, что в этом алгоритме формула (6) читается справа налево, и для вычисления представления числа в виде суммы квадратов используются довольно тонкие теоретико-числовые результаты. В рассматриваемом алгоритме представление суммы квадратов в требуемом виде осуществляется делениями на четвертые степени простых чисел.

На втором этапе (подалгоритм 2) находятся все решения (13) перебором всех упорядоченных пар точек.

Каждая (q) строка таблицы классов обрабатывается двойным вложенным циклом. Для каждой пары (m, n) точек A_j, A_k в теле цикла вычисляется

```
If qj <=qk
   then InsertDifTable(qj - qk ,Kj,Kk )
   else InsertDifTable(qk - qj ,Kk,Kj )
```

В результате каждая (q) строка таблицы разностей содержит пары точек (K_j, K_k) такие, что q_j-q_k=q.

2.1. Поиск ассимметрических решений

Основная идея алгоритма заключается в следующем: алгоритм генерирует четверки точек плоскости (K_1, K_2, K_3, K_4) в первом октанте плоскости: $x \geq 0, y \geq 0, x \geq y$.

Для каждой такой четверки находятся все $((\sigma_1(K_1), \sigma_2(K_2), \sigma_3(K_3), \sigma_4(K_4)), \sigma_i \in G$. Из этих четверок выбираются такие, что

$$\sigma_1(K_1) - \sigma_3(K_3) = \sigma_4(K_4) - \sigma_2(K_2). \quad (12)$$

Тогда, ввиду того, что поиск осуществляется в (q)-классе, найденные четверки образуют асимметрическое решение $\sigma_1(K_1), \sigma_3(K_3), \sigma_2(K_2), \sigma_4(K_4)$.

Полный перебор всех четверок означает перебор 8*8*8*8=4096 вариантов. Поэтому возникает необходимость в эффективном алгоритме поиска решения уравнения (12).

2.2. Эффективный алгоритм анализа решения

Умножая обе части (12) на σ_1^{-1}, получим: $K_1 - \sigma_3'(K_3) = \sigma_4'(K_4) - \sigma_2'(K_2)$. Таким образом, точку K_1 в асимметрическом случае можно считать принадлежащей первому октанту $x \geq 0, y \geq 0, x \geq y$. Перебору подлежат точки K_2, K_3, K_4. Далее, при $\sigma_i' = e$ покоординатная запись равенства (12) имеет вид:

$$\begin{cases} m_1 - m_3 = m_4 - m_2 \\ n_1 - n_3 = n_4 - n_2 \end{cases}. \quad (13)$$

Перепишем ее в виде

$$\begin{cases} m_1 - m_4 = m_3 - m_2 \\ n_1 - n_4 = n_3 - n_2 \end{cases}. \quad (14)$$

Обратим внимание на первое равенство системы (14). Его левая часть при действиях различных $\sigma_i \in G$ может принимать 4 значения:

$$m_1 + m_4, m_1 - m_4, m_1 + n_4, m_1 - n_4. \quad (15)$$

Учитывая, что $x \geq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, расположим числа (15) в порядке убывания

$$m_1 + m_4 \geq m_1 + n_4 \geq m_1 - n_4 \geq m_1 - m_4.$$

Левая часть первого равенства системы (4) принимает 16 значений:

$$\begin{matrix} m_3 + m_2 & n_3 + m_2 & -m_3 + m_2 & -n_3 + m_2 \\ m_3 + n_2 & n_3 + n_2 & -m_3 + n_2 & -n_3 + n_2 \\ m_3 - n_2 & n_3 - n_2 & -m_3 - n_2 & -n_3 - n_2 \\ m_3 - m_2 & n_3 - m_2 & -m_3 - m_2 & -n_3 - m_2 \end{matrix}. \quad (16)$$

Перечисленные значения, во первых, упорядочены в каждом столбце по убыванию, и, во-вторых, значения в 3-м и 4-м столбцах равны соответствующим значениям в 1-м и 2-м столбцах, взятым со знаком «минус». Поэтому упорядочению подлежат элементы первого и второго столбцов. Используя эти соображения, легко эффективно организовать упорядочение таблицы (16) и поиск пересечения (15) и (16).

Предположим, что равенство $m_1 + \sigma_2(m_2) = \sigma_3(m_3) + \sigma_4(m_4)$ найдено. Тогда необходимо проверить равенство $n_1 + \sigma_2(n_2) = \sigma_3(n_3) + \sigma_4(n_4)$. Легко видеть, что для однозначного восстановления знаковых подстановок $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ это равенство должно проверяться в 8-ми вариантах: $n_1 \pm \sigma_2(n_2) = \pm\sigma_3(n_3) \pm \sigma_4(n_4)$ (см. определение группы симметрий G).

3. Анализ симметрических решений

Алгоритм построения решений, основанный на переборе всевозможных четверок точек, порождаемых элементами группы симметрий, нуждается в анализе.

Пусть K_1, K_2, K_3, K_4 – четверка точек первого октанта, причем алгоритм генерирует эту четверку в виде пары пар точек $(K_1, K_3), (K_4, K_2)$. Для этой четверки выполняется соотношение (2). Тогда логически возможны следующие случаи:

1. Точки K_1, K_2, K_3, K_4 попарно различны.

2. Одна пара точек из четверки K_1, K_2, K_3, K_4 совпадает.

2.а. Если $K_1 = K_4$ то и $K_3 = K_2$, т.е. совпадают пары $(K_1, K_3), (K_4, K_2)$. Этот случай не генерируется основным алгоритмом. Этот случай мы рассмотрим в п.3.

2.б. Если $K_1 = K_2$, пары $(K_1, K_3), (K_4, K_2)$ различны. Этот случай генерируется основным алгоритмом, поскольку он перебирает различные пары точек.

3. Совпадают две пары точек. Четверка имеет вид $(K_1, K_3), (K_1, K_3)$ Соотношение (2) можно переписать в виде

$$K_1 - \sigma_3(K_3) = \sigma_4(K_1) - \sigma_2(K_3). \quad (17)$$

Ввиду линейности преобразования симметрии $K_1 - \sigma_3(K_3) = \sigma_4(K_1 - \sigma_2^{'}(K_3))$.

Легко видеть, что при $\sigma_2^{'} = \sigma_3$, $\sigma_4 = \alpha^2$ равенство (17) выполняется

3.а. Если направленный отрезок (K_1, K_3) находится в общем положении, можно показать, что все решения описываются соотношением

$$K_1 - \sigma(K_3) = \alpha^2 (K_1 - \sigma(K_3)).$$

Напомним, что α^2 – поворот на 180°, а σ - произвольный элемент группы симметрий G. Следующие 4 случая представляют частные случаи 3.а.

3.б. Если направленный отрезок (K_1, K_3) параллелен оси *OX*, дополнительно существуют решения

$$((K_1, K_3), (\beta(K_1), \beta(K_3))),$$
$$((K_1, K_3), (\gamma(K_1), \gamma(K_3))).$$

3.в. Если направленный отрезок (K_1, K_3) параллелен оси *OY*, дополнительно существуют решения

$$((K_1, K_3), (\gamma(K_1), \gamma(K_3))),$$
$$((K_1, K_3), (\beta(K_1), \beta(K_3))).$$

3.г. Если направленный отрезок (K_1, K_3) параллелен прямой *x=y*, дополнительно существуют решения

$$((K_1, K_3), (\delta(K_1), \delta(K_3))),$$
$$((K_1, K_3), (\varepsilon(K_1), \varepsilon(K_3))).$$

3.д. Если направленный отрезок (A_1, A_2) параллелен прямой *x=-y*, дополнительно существуют решения

$$((K_1, K_3), (\varepsilon(K_1), \varepsilon(K_3))),$$
$$((K_1, K_3), (\delta(K_1), \delta(K_3))).$$

4. Совпадают по крайней мере три точки. Легко видеть, что в этом случае совпадают все 4 точки. Четверка точек генерируется из одной точки K_1 первого октанта. Поэтому возможны 3 симметричных решения:

$$(K_1, K_1^{(1)}, K_1^{(4)}, K_1^{(5)}),\ (K_1, K_1^{(2)}, K_1^{(4)}, K_1^{(6)}),$$
$$(K_1, K_1^{(3)}, K_1^{(4)}, K_1^{(7)}).$$

3.1. Серии симметричных решений

Случай 3.а.:

$$(a,b),(c,d),(-a,-b),(-c,-d). \quad (18)$$

Случай 3.б.:

$$\begin{aligned}&(a,b),(c,b),(c,-b),(a,-b);\\&(a,b),(c,b),(-a,b),(-c,b).\end{aligned} \quad (19)$$

Случай 3.в.:

$$\begin{aligned}&(a,b),(a,c),(-a,c),(-a,b);\\&(a,b),(a,c),(a,-b),(a,-c).\end{aligned} \quad (20)$$

Случай 3.г.:

$$\begin{aligned}&(a,b),(a+c,b+c),(b+c,a+c),(b,a);\\&(a,b),(a+c,b+c),(-b-c,-a-c),\\&(-b,-a).\end{aligned} \quad (21)$$

Случай 3.д.:

$$\begin{aligned}&(a,b),(a+c,b+c),(b+c,a+c),(b,a);\\&(a,b),(a+c,b-c),(-b+c,-a-c),\\&(-b,-a).\end{aligned} \quad (22)$$

Случай 4.

$$(a,b),(b,a),(-a,-b),(-b,-a);$$
$$(a,b),(-b,a),(-a,-b),(b,-a); \quad (23)$$
$$(a,b),(-a,b),(-a,-b),(a,-b).$$

Отметим, что серии определяются с точностью до преобразований группы G_{sym}.

4. Алгоритм генерации решений в случае разных (q)-классов

Предположим, что (2) в результате освобождения от 4-х степеней приняло вид (8). Тогда из (1) следует, что существуют по крайней мере две пары векторов $(\bar{k}_1,\bar{k}_3)$, $(\bar{k}_2,\bar{k}_4)$ такие, что

$$\begin{matrix} m_1^2+n_1^2=\gamma_1^4\cdot q_1, & m_3^2+n_3^2=\gamma_1^4\cdot q_1 \\ m_2^2+n_2^2=\gamma_2^4\cdot q_2, & m_4^2+n_4^2=\gamma_2^4\cdot q_2 \end{matrix}. \quad (24)$$

Поэтому

$$m_1^2+n_1^2= m_3^2+n_3^2,\ m_2^2+n_2^2= m_4^2+n_4^2,$$

и

$$\bar{k}_1+\bar{k}_2=\bar{k}_3+\bar{k}_4.$$

Пусть $\left|\bar{k}_1\right|=\left|\bar{k}_3\right|=r,\ \left|\bar{k}_2\right|=\left|\bar{k}_4\right|=R$.

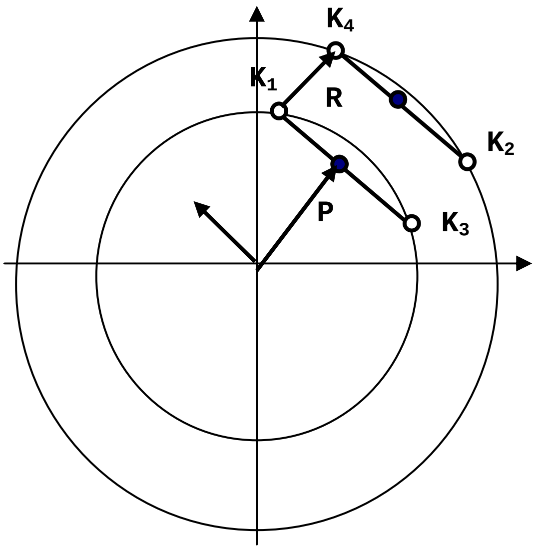

Рис. 2. Прямоугольник решения в случае разных (*q*)-классов

Рис. 2 иллюстрирует постановку этой задачи. Ее решение представляет собой прямо угольник, который мы будем искать в виде $\bar{k}_4=\bar{k}_1+X$, $\bar{k}_2=\bar{k}_3+X$, где $X=(m_x,n_x)$ – вектор с целочисленными координатами такой, что $X\perp\bar{k}_3-\bar{k}_1$. Из условия перпендикулярности следует, что

$$(m_x,n_x)=C\cdot(n_1-n_3,m_3-m_1).$$

Таким образом,

$$m_4=m_1+C\cdot(m_3-m_1),\ n_4=n_1+C\cdot(n_1-n_3),$$
$$m_2=m_3+C\cdot(n_1-n_3),$$
$$n_2=n_3+C\cdot(m_3-m_1).$$

Параметр C может принимать все значения, кратные числу

$$d=\frac{1}{\gcd(m_3-m_1,n_1-n_3)}.$$

Выразим векторы $\bar{k}_1,\bar{k}_3,\ \bar{k}_2,\bar{k}_4$ через векторы L,P,R, обозначенные на рис. 2.

$$\bar{k}_1=P+L,\ \bar{k}_3=P-L,$$
$$\bar{k}_2=P-L+R,$$
$$\bar{k}_4=P+L+R.$$

Пусть теперь $L=(a,b)$. Тогда $P=C_1(-b,a),\ \ R=C_2(-b,a)$.

$$\begin{aligned} k_1&=(a,b)+C_1\cdot(-b,a)/d,\\ \bar{k}_3&=(-a,-b)+C_1\cdot(-b,a)/d,\\ \bar{k}_4&=(a,b)+(C_1+C_2)\cdot(-b,a)/d,\\ \bar{k}_2&=(-a,-b)+(C_1+C_2)\cdot(-b,a)/d. \end{aligned} \quad (25)$$

Все координаты векторов $\bar{k}_j$ – целые числа, а $L=(\bar{k}_1-\bar{k}_3)/2$. Поэтому числа a,b могут быть полуцелыми. Кроме того, коэффициенты C_1,C_2 могут быть рациональными со знаменателем $d=\gcd(a,b)$.

Итак, решение задачи можно представить в виде серии (25) з параметрами a,b,C_1,C_2. Заметим, что симметричные решения – серии (19)-(23) – частные случаи (25). Однако, серия (18), наиболее многочисленная, не сводится к серии (25). Поэтому для генерации симметричных решений достаточно реализовать только алгоритмы генерации (18) и (25).

Заключение

Описанный алгоритм генерации асимметричных решений реализован на *C*++ в среде *Visual C v*.7.0. В [5] приводятся результаты работы одной из первых версий программы, решающей описываемую задачу и реализованной в среде *VBA*. При $D_{\max} = 1000$ время ее работы составляло 4.5 мин. К сожалению, мы не имели возможности корректно сравнить эти результаты с нашими данными, поскольку технические характеристики процессора в [5] не были указаны. Однако, для тех же значений $D_{\max}$ наша программа решает задачу менее, чем за 10 сек. Практически программа пригодна для использования даже при $D_{\max} = 3000$.

Техника, используемая в этой работе, основана на построении и анализе группы симметрий модели (1)-(3). Она может использоваться для анализа и построения эффективных алгоритмов для других задач вычисления дисперсионных функций. Кроме того, основная идея пригодна и для анализа других дискретных моделей, обладающих нетривиальными группами симметрий.

Автор выражает благодарность проф. Е. Карташовой, научному руководителю проекта *CENREC* с австрийской стороны, за постановку задачи и полезные обсуждения, а также – А. Лаврику, реализовавшему описываемый алгоритм.

Список литературы

1. *Lvov M.* Austrian-Ukrainian Project CENREC as Example of Information Support of Activity of International Scientific Community / M. Lvov, E. Kartashova //Інформаційні технології в освіті: Зб. наук. праць. Вид. ХДУ, 2009. – №3. – С. 57–63.

2. *Львов М.* Концепция информационной поддержки учебного процесса и ее реализация в педагогических программных средах / М. Львов // Управляющие системы и машины. – 2009. – № 2. – С. 52–57, 72.

3. *Kartashova E.* Laminated Wave Turbulence/ E.Kartashova, A. Kartashov// Generic Algorithms II. Communications in computational physics. – 2007. – №2(4). – P. 783–794.

4. *Kartashova E.* Cluster formation in mesoscopic systems / E. Kartashova, G. Mayrhofer // Physica [A]. – 2007. – №385. – P. 527–542.

5. *Kartashova E.* Partitionig of ensembles of weakly interacting dispersing waves in resonators into disjoint classes / Kartashova E. // Physica [D]. – 1990. – V.46, I. 1. – P.43–56.

6. *E. Kartashova.* On properties of weakly nonlinear wave interactions in resonators/ E.Kartashova// Physica [D, Elsevier]. –1991. – V.54. – I.1–2. – P.125–134.

7. *Kartashova E.* Fast Computation Algorithm for Discrete Resonances among Gravity Waves/ E. Kartashova// Journal of Low Temperature Physics. – 2006. – V. 145. – P.1–4.

8. *Kartashova E.* Laminated Wave Turbulence: Generic Algorithms I. International Journal of Modern / E.Kartashova, A. Kartashov // Physics [C]. – 2006. – V.17. – №11. –P. 1579–1596.