УДК 519.612.2

**Глазок О.М.,** канд. техн. наук

# РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ СИНТЕЗУ ЗАКОНУ КЕРУВАННЯ ЛІТАЛЬНИМ АПАРАТОМ З УРАХУВАННЯМ НЕСТАЦІОНАРНОСТІ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

**Інститут комп'ютерних технологій**
**Національного авіаційного університету**

*Запропоновано метод чисельного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, породжених задачами керування нестаціонарним рухом літального апарату, з використанням допоміжної функції, значення якої є мірою нев'язки отриманого наближеного розв'язку. Для введеної допоміжної функції задається диференціальне рівняння, що визначає її поведінку в процесі розв'язку*

## Вступ

Багато наукових та прикладних задач, зокрема – задач аеро- та гідродинаміки, зводяться до чисельного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорія отримання точних та наближених розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь є досить старою і дослідженою галуззю обчислювальної математики. Існує обширна література, присвячена методам прикладної лінійної алгебри, і програмні продукти, що реалізують найбільш популярні алгоритми обчислювальної лінійної алгебри.

## Наукова проблема, на розв'язання якої спрямовано дослідження

Цілий ряд задач керування рухом літальних апаратів вимагають урахування нестаціонарності аеродинамічних характеристик об'єктів керування. Застосування спрощених аеродинамічних моделей призводить в таких випадках до неадекватних результатів. А використання повних моделей утруднене через високу розмірність систем рівнянь задачі; при цьому виникає ряд проблем, що не дозволяють ефективно використати можливості сучасної обчислювальної техніки. Серед них – обмеженість оперативної пам'яті ЕОМ та значна тривалість розрахунків. Розмірність задач, а відтак і обсяг даних, що необхідно зберігати та обробити при їх розв'язанні, зростають швидше, ніж обсяг оперативної пам'яті доступних обчислювальних машин, і швидше, ніж їх швидкісні характеристики. До того ж було б бажано розв'язувати задачі керування літальним апаратом на його бортових обчислювальних засобах, можливості яких дещо обмежені.

В значній мірі обмеження на розмірність систем можна б було зняти, якщо використовувати для зберігання елементів матриці зовнішні запам'ятовуючі пристрої. Однак швидкість обміну даними з ними невисока, тому в цьому випадку суттєво зростають як витрати машинного часу, так і складність відповідних алгоритмів.

## Сучасний стан проблеми. Існуючі дослідження та невирішені питання

В згаданому вище програмному забезпеченні, як правило, використовуються алгоритми прямого розв'язання задачі, орієнтовані на розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь невеликих чи середніх розмірів (до кількох сотень чи тисяч рівнянь), в той час як сучасні прикладні задачі в результаті апроксимації неперервного функційного рівняння кінцево-різницевою задачею нерідко породжують системи, розмірність яких може складати сотні тисяч чи навіть мільони, і потреби практики в розв'язанні задач все більшої розмірності зростають.

Вказані протиріччя мотивують дослідників пропонувати нові методи розв'язання таких задач. Так, для ряду часткових випадків систем з розрідженою матрицею було створено економні прямі методи розв'язання [1, 2]. Було також розроблено ряд ітеративних методів; зокрема, суттєвим кроком вперед стали метод підпросторів Крилова та інші подібні градієнтно-орієнтовані методи, що використовують спряжені підпростори [3, 4]. Однак залишається і ряд невирішених проблем. Зокрема, більшість запропонованих методів розв'язання таких систем розроблено в припущенні, що матриця системи має стрічкову структуру, і ширина стрічки значно менша порядку матриці. Однак це припущення виконується не для всіх задач. Крім того, запропоновані методи дозволяють збільшити порядок розв'язуваної системи лише за умови відповідного нарощування обсягу ресурсів, що мають бути використані обчислювальною системою для її розв'язання.

Ітераційні методи застосовують головним чином для розв'язання задач великої розмірності, коли використання прямих методів неможливе через названі вище обмеження. Не вдається до таких задач застосувати і методи з виключенням, оскільки при їх використанні велике число нульових елементів перетворюється на ненульові і матриця втрачає властивість розрідженості. Важливою перевагою ітераційних методів є те, що в ході ітераційного процесу матриця не міняється, і вона, природно, залишається розрідженою. Висока ефективність ітераційних методів в порівнянні з прямими методами тісно пов'язана з можливістю істотного використання розрідженості матриць. Можна зробити висновок, що актуальним є пошук нових ітераційних методів розв'язання названих задач, орієнтованих на роботу з системами рівнянь великої розмірності. Перспективним напрямком такого пошуку виглядає застосування методу функцій Ляпунова. Теорія першого та другого методів Ляпунова продовжує активно розвиватися, зокрема в застосуваннях до розв'язання задач, в яких описується чи визначається поведінка систем з розподіленими параметрами [5, 6].

### *Ціль статті*

Метою даної статті є запропонувати новий метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, заснований на методі функцій Ляпунова, який, за умови його подальшого розвитку, дозволить подолати вказані проблеми.

### *Раціональна організація даних задачі*

В системах з великою кількістю елементів зв'язки між елементами найчастіше є локальними, і, відповідно, матриці систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що описують такі системи, найчастіше є розрідженими. Тому є можливість за рахунок раціональної організації обчислювального процесу добитися значного зменшення потреб у оперативній пам'яті для зберігання даних, оскільки немає потреби зберігати в пам'яті нульові елементи (яких у розрідженій матриці переважна більшість), а також зменшення тривалості обчислень – завдяки тому, що немає потреби виконувати над нульовими елементами арифметичні дії, результат яких заздалегідь відомий.

Оцінимо виграш, отриманий від відкидання нульових елементів для $m$-діагональної матриці розмірності $N$ (так, наприклад, для класичної різницевої схеми, що наближує диференційне рівняння другого порядку щодо функції однієї координати, $m=3$, а $N$ відповідає кількості вузлів сітки.) У головній діагоналі матриці (що містить ненульові елементи) міститься $N$ елементів, а інші ($m$–1) діагоналей з ненульовими елементами містять на один чи декілька елементів менше. Оцінимо кількість елементів в цих діагоналях зверху також величиною $N$. Таким чином, всього у матриці є менше ніж $m \times N$ елементів, що не є завідомо нульовими. А відносний вміст ненульових елементів менший, ніж $\frac{mN}{N^2}=\frac{m}{N}$. Решта елементів – більше ніж $N(N-m)$ елементів – нульові, а відносний вміст нульових елементів більший, ніж $\frac{N-m}{N^2}$. Величина $m$ відповідає кількості зв'язків одного елемента і в більшості задач, де зв'язки між елементами локальні, є невеликим числом. Розмірність задачі $N$ може сягати сотень тисяч і мільонів, отже, видно, що раціоналізація обчислень приносить значну економію. До цього слід додати, що, якщо в задачі задано крайові значення, то і в «ненульових» діагоналях частина елементів можуть виявитись нульовими, оскільки крайові значення враховуються у постійному векторі правих частин.

### *Ітераційний метод розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

Наступним кроком до зменшення апаратних вимог є застосування ітераційних методів розв'язання замість прямих.

Розглянемо задачу пошуку розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь, записаної у векторно-матричній формі як

$$AX=B, \tag{1}$$

де $A$ – задана постійна матриця, $B$ – заданий постійний вектор правих частин рівнянь, $X$ – вектор розв'язків, який необхідно знайти.

Щоб застосувати другий метод Ляпунова, визначимо скалярну допоміжну функцію, значення якої є мірою нев'язки отриманого наближеного розв'язку:

$$V(X) = (AX-B)^TQ(AX-B)= X^TA^TQAX - X^TA^TQB - B^TQAX + B^TQB, \tag{2}$$

де $Q$ – вагова матриця, $Q=Q^T$. Якщо $X=X_i$ (наближений вектор розв'язків, знайдений на $i$-й ітерації), то $AX-B$ – це вектор нев'язки знайденого розв'язку системи рівнянь (1), а значення функції $V(X)$ можна розглядати як квадратичну норму вектора нев'язки, знайдену з ваговою матрицею $Q$.

Далі для введеної допоміжної функції необхідно буде задати диференційне рівняння, що визначає бажану поведінку допоміжної функції в процесі розв'язку.

Розглянемо вектор $X$ як вектор-функцію часу $X(t)$, маючи на увазі мету організувати ітераційний процес так, щоб значення сходилися до точного розв'язку системи (1). Тоді і функція $V(X)$ змінюється в часі.

Нехай закон загасання допоміжної функції (2) в часі задано рівнянням

$$\dot{V} + cV = 0, \tag{3}$$

де $c$ – деяка постійна величина, значення якої можемо обрати довільно, таким чином визначаючи швидкість спадання норми нев'язки.

Залежність $V(X)$ (2) визначає скалярну функцію $V$ багатовимірного вектора $X$, тому рівняння (3) не визначає вектор-функцію $X(t)$ однозначно, а лише задає один зв'язок між координатами вектора $X$. З метою визначення однозначного розв'язку системи (1) використаємо в якості додаткового зв'язку наступний закон руху $X$, виконання якого ми також будемо вимагати:

$$\dot{X} = -k\frac{\partial V}{\partial X}, \tag{4}$$

де $k$ – деяка (не довільна) величина, яку буде визначено нижче.

Використовуючи визначення (2), а також тривіальні співвідношення $\frac{\partial}{\partial X}\left(X^TC\right)=C$, $\frac{\partial}{\partial X}(SX)=S^T$, знайдемо похідну допоміжної функції за вектором $X$:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 2A^TQ(AX-B); \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial X^T} = \left[\frac{\partial V}{\partial X}\right]^T = 2(AX-B)^TQA. \tag{6}$$

Зокрема, в скалярному випадку (якщо $X$ є скалярною величиною) співвідношення (2) набуде вигляду:

$$v(x) = (ax-b)q(ax-b) = q(ax-b)^2,$$

а співвідношення (5) – вигляду:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = 2qa(ax-b).$$

Підставимо до рівняння (3) похідну $\dot{V}$, знайдену в силу $X$, при цьому використаємо співвідношення (6) і (4):

$$\dot{V}\Big|_{\dot{X}} + cV = \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T \dot{X} + cV =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T \left(-k\frac{\partial V}{\partial X}\right) + cV = 0 .$$

Тепер можна визначити значення $k$, при якому є сумісними рівняння (3) і (4):

$$k\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right) = cV; \quad k = \frac{cV}{\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)};$$

$$k = \frac{c(AX\text{-}B)^T Q(AX\text{-}B)}{\left(2A^TQ(AX-B)\right)^T\left(2A^TQ(AX-B)\right)} =$$

$$= \frac{c(AX\text{-}B)^T Q(AX\text{-}B)}{4(AX-B)^T QAA^TQ(AX-B)} = k(X) .$$

Як бачимо, вимога сумісності рівнянь (1)–(4) призвела до того, що величина $k$ виявилася функцією вектора стану.

Для того, щоб отримати вектор-функцію, яка збігається до точного розв'язку системи рівнянь (1), необхідно інтегрувати рівняння (4), у якому похідна $\frac{\partial V}{\partial X}$ задана співвідношенням (5):

$$\dot{X} = -k\frac{\partial V}{\partial X} =$$

$$= -\frac{c}{2}\cdot\frac{(AX\text{-}B)^T Q(AX\text{-}B)A^TQ(AX-B)}{(AX-B)^T QAA^TQ(AX-B)} . \quad (7)$$

### Висновки

На основі другого методу Ляпунова в статті запропоновано метод отримання розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1) як границі, до якої збігається розв'язок рівняння (7). Можна зробити висновок, що мети досягнуто: співвідношення (7) є диференційним рівнянням щодо вектор-функції $X$, яке не містить інших невідомих величин, і його легко розв'язати шляхом чисельного інтегрування на ЕОМ за одним з відомих методів, обравши деяке початкове наближення вектора $X$. Величина $c$, на яку не було накладено ніяких обмежень, може бути обрана довільно і визначатиме швидкість наближення послідовності отриманих значень до точного розв'язку.

### Перспективні напрямки подальших досліджень

Напрямки подальших досліджень наступні: вивчити умови збіжності алгоритму (7); вивчити можливості забезпечення чи пришвидшення збіжності за рахунок манiпулювання константою загасання $c$ та ваговою матрицею $Q$; з'ясувати, чи можливе застосування інших форм умов (3) і (4) і як це відіб'ється на вигляді розв'язку; з'ясувати питання обумовленості методу та можливий вплив похибок чисельного розв'язання на точність результату; порівняти обчислювальну ефективність запропонованого методу та існуючих на модельних аеродинамічних задачах.

### Список літератури

1. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

2. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 333 с.

3. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.

4. *Ерёмин М.А.* Определитель Ерёмина в линейной и нелинейной алгебре. Линейное и нелинейное программирование. – М: КомКнига, 2006. – 120 с.

5. *Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: КомКнига, 2007. – 320 с.

6. *Анашкин О.В.* Развитие второго метода Ляпунова в теории устойчивости дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений: Дис. д-ра физ.-мат. наук. – Симф., 2002. – 307 с.