УДК 621.391.26

Визор Я.Е., канд. техн. наук
Чичирин Е.Н., канд. техн. наук
Семотюк М.В., канд.техн. наук

ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ УОЛША ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Рассмотрены вопросы эффективного формирования совокупности функций Уолша, произвольным образом распределенных по каналам прикладной многоканальной системы. Предложена вычислительная структура формирователя для многоканальных систем реального времени, основанная на шифрации состояний аргумента функций, отличающаяся предельно низкой емкостной и временной сложностью реализации и равномерной шкалой отсчетов генерируемых функций

Введение

Многочисленные исследования функций Уолша и связанных с ними теоретических и практических вопросов, в частности, задачи эффективного их формирования, обусловлены широким спектром областей применения указанных функций.

Функции Уолша используются в спектральной обработке сигналов, при построении специализированных вычислительных устройств для кодировании и сжатии аудио- и видео-данных, в многоканальных системах тестирования и диагностирования цифровых устройств и логических структур большой степени интеграции [1 - 4].

Применение указанных функций в качестве ортогональных несущих в многоканальных системах связи и передачи данных, обеспечивает преимущества кодированного разделения сигналов в системах цифровой сотовой связи 3-го и 4-го поколений над частотным и временным разделением, применяемым ранее [5].

Постановка задачи

Анализ требований предъявляемых к формирователям функций Уолша со стороны вышеперечисленных прикладных систем показал, что наибольшей функциональностью должны обладать формирователи, используемые для тестирования и организации ортогональной синхронизации в многоканальных системах динамического контроля современных цифровых структур.

Для достижения необходимых фазовых и частотных характеристик системы подобного класса не имеют промежуточного кросса, и все их функциональные возможности обеспечиваются перепрограммированием электроники на каждом из нескольких сотен контактов объекта тестирования. Поэтому важной характеристикой многоканальной системы является возможность произвольного распределения номеров генерируемых функций по ее каналам.

Одним из основных требований со стороны систем реального времени и, прежде всего, систем многоканальной кодовой связи является ортогональность фактически генерируемой совокупности сигналов. Ортогональность обеспечивается за счет равномерного шага формирования отсчетов функций и минимальной величины отклонения моментов их перехода через нуль от нормированного временного растра [5]. Отсюда следует необходимость сосредоточения комбинационной логики генератора, вносящей основной вклад в разброс времени переключения формируемых функций до его синхронизирующих цепей. То есть, алгоритм генерации должен хорошо вписываться в структуру автомата Мили.

Математическая модель процесса формирования функций Уолша

Рассмотрим систему 2^m функций Уолша $wal(w,x) \in \{1,-1\}$, упорядоченных по числу знакоперемен на интервале определения $[0, 2^m - 1]$,

где $x{=}x(t){=}\, x_{m-1}x_{m-2}...x_0 = \overline{0,2^m-1}$ – аргумент функции Уолша, а $w{=}\, w_{m-1}w_{m-2}...w_0 = \overline{0,2^m-1}$ и m – ее двоичный номер и порядок.

Известно [6], что данные функции, а также функции в системах Уолша-Пэли $pal(p,x)$ и Уолша-Адамара $had(h,x)$ можно представить в виде произведения функций Радемахера i-го порядка $r_i(x) = -1^{x_i} = cos\,\pi x_i$:

$$wal(w,x){=}pal(p,x){=}had(h,x){=}$$
$$= r_1(x)^{p_0}\, r_2(x)^{p_1} ... r_m(x)^{p_{m-1}},$$

где $p{=}\, p_{m-1}p_{m-2}...p_0$ и $\mathrm{h}{=}\, h_{m-1}h_{m-2}...h_0$ – двоичные эквиваленты номера w функции Уолша в коде Грея и инверсном коде Грея, определяющие номер данной функции соответственно в системах Уолша-Пэли и Уолша-Адамара: $p_i = w_{i+1} \oplus w_i$, $h_i = w_{m-i} \oplus w_{m-i-1}$, $i = \overline{0, m-1}$, $w_m{=}\,0$.

Заменяя значения 1 и -1 рассматриваемых функций соответственно на 0 и 1, получаем $r_i(x) = x_{m-i}$, и соотношения, связывающие однополярные функции, называемые в дальнейшем также функциями Уолша, принимают вид:

$$W(w,x){=}P(p,x){=}H(h,x){=}$$
$$= x_{m-1}p_0 \oplus x_{m-2}p_1 \oplus ... \oplus x_0 p_{m-1}. \quad (1)$$

С учетом симметричности функций Уолша относительно параметров w,p,h и x аналогичные соотношения (но уже с минимально изменяемыми на каждом шаге алгоритма генерации) разрядами аргумента $x{=}x(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned}&W(w,x){=}P(p,x){=}H(h,x){=}\\&w_{m-1}y_0(x) \oplus w_{m-2}y_1(x) \oplus ...\\&... \oplus w_0 y_{m-1}(x)\end{aligned}, \quad (2)$$

где $y{=}y(x){=}\, y_{m-1}y_{m-2}...y_0$ – двоичное представление аргумента $x{=}x(t)$ функций Уолша в коде Грея:

$$y_i = y_{i+1} \oplus y_i,\ i = \overline{0, m-1},\ y_m{=}\,0.$$

Найдем сумму по модулю 2 двух последовательных значений функций Уолша

$$W(w,x) \oplus W(w,x{+}1){=}$$
$$= \sum_{i=0}^{m-1} w_{m-i-1}(y_i(x) \oplus y_i(x+1)) \bmod 2. \quad (3)$$

Учитывая, что соответствующие соседние значения кода Грея отличаются лишь в одном, например, в $\varphi = \varphi(x)$ разряде, получаем

$$W(w,x) \oplus W(w,x{+}1){=}\, w_{m-\varphi(x)-1}. \quad (4)$$

Отсюда следует рекурсивное отношение, представляющее математическую модель процесса формирования функций Уолша

$$W(w,x{+}1){=}W(w,x) \oplus w_{m-\varphi(x)-1},$$
$$x{=}\,\overline{0,2^m-1},\quad W(w,0){=}0. \quad (5)$$

Программная и аппаратная сложность реализации полученной модели определяется в основном способом получения последовательности значений величин $w_{m-\varphi(x)-1}$. В то же время из (5) видно, что выражение индекса не зависит от номера функции Уолша. Это позволяет уменьшить аппаратурные и временные затраты при формировании большого числа функций в многоканальных системах.

Многоканальный формирователь функций Уолша

В существующих решениях [7] для формирования программируемых функций Уолша порядка m предлагается использовать $(2^m - 1)$-разрядный сдвиговый регистр, в который предварительно записывается развернутый номер генерируемой функции, причем число повторений значений каждого из разрядов номера в последовательности равно 2. По другому способу при формировании каждого очередного значения функции вычисляется сумма (3), для чего формируется последовательность величин

$$z_i(x) = y_i(x) \oplus y_i(x+1),\, i = \overline{0,\ m-1}. \quad (6)$$

Очевидный недостаток этих способов – большие затраты при формировании большого числа функций Уолша, особенно в случае высокого их порядка.

С другой стороны, низкозатратные решения [5] не допускают возможности программирования номера генерируемой функции в каналах системы.

В предлагаемом решении параллельного формирования совокупности k функций Уолша элементы w_i их двоичных номеров выбираются из k-разрядного запоминающего устройства по адресам, представляющим последовательность значений $\varphi(x)$.

В свою очередь, последовательность $\varphi(x)$, определенная выше, как последовательность номеров изменяющихся разрядов кода Грея $y(x)$, задается при помощи логических выражений

$$\varphi_\nu(x) = \vee_{i=0}^{m-1} i_\nu z_i(x) = \vee_{i=0}^{m-1} i_\nu\ x_0 x_1 ... x_{i-1} \overline{x_i}\,, \quad (7)$$

где $\varphi_\nu(x)$ и i_ν – разряды двоичного представления соответственно величин $\varphi(x)$ и i, $\nu = 0,1,...,\rbrack\log_2 m\lbrack$, $z_i(x)$ – система взаимно-ортогональных функций:

$$z_0(x) = \overline{x_0}\,,$$
$$z_1(x) = x_0 \overline{x_1}\,,$$
$$z_i(x) = x_0 x_1 ... x_{i-1} \overline{x_i}\,,\quad i = \overline{0, m-1}\,,$$
$$z_0(x) + z_1(x) + \ldots + z_{m-1}(x) = 1,\ \ x = \overline{0, 2^m - 2}\,,$$
$$z_i(x)\ z_j(x) = 0, \quad i \neq j\,.$$

Данная система тождественна (6), но обладает тем преимуществом, что зависит только от текущего значения $x=x(t)$ и поэтому может быть реализована чисто комбинационной схемой. Дополняя ее недостающими функциями до ближайшего числа $m = 2^\mu$, получаем

$$\varphi_\nu(x) = \vee_{\rho=0}^{\alpha} \vee_{i=\beta}^{\beta+\gamma-1} z_i(x)\,,\ \nu = \overline{0, \mu - 1}\,, \quad (8)$$

где $\alpha = \mu - \nu - 1$, $\beta = 2^{\nu+\rho}$, $\gamma = 2^\nu$.

Система логических функций (8), решенных относительно $x=x(t)$ есть ни что иное, как система функций комбинационного двоичного шифратора с приоритетом, реализуемая рядом промышленных микросхем. При этом последовательность значений $\varphi(x)$ соответствует принятому в (5) способу нумерации функций Уолша.

Таким образом, задача формирования совокупности $\{W_j(w^{(j)}, x),$ $j = 1,2,...,k\}$ прямых и обратных функций Уолша в k-канальном формирователе сводится к нахождению векторных сумм

$$W_j(w^{(j)}, x+1) = W_j(w^{(j)}, x) \oplus w^{(j)}_{\varphi(x)}\,,$$
$$W_j(w^{(j)}, 0) = w^{(j)}_m\,, \quad j = 1,2,\ldots,k, \quad (9)$$
$$x = \overline{0, 2^m - 1}\,,$$

в соответствии с формируемой при помощи ν- выходного шифратора последовательностью значений

$$\varphi(x) = \varphi_{\mu-1}(x)\ \varphi_{\mu-2}(x) \ldots \varphi_0(x)\,.$$

При этом нулевое (единичное) состояние j-ой компоненты вектора начального состояния $w_m = w^{(1)}_m w^{(2)}_m ... w^{(j)}_m ... w^{(k)}_m$ является необходимым и достаточным условием формирования прямой (соответственно обратной) функции Уолша в j-ом канале формирователя.

Затраты оперативной памяти на реализацию предложенного алгоритма равны произведению числа каналов k на количество бит m порождающего кода плюс k бит необходимых формирования функций Уолша с обратной полярностью сигналов. Указанные затраты являются минимально необходимых для задания произвольно распределенного по каналам многоканального формирователя подмножества генерируемых функций

$$W_j(w^{(j)}, x) \subseteq \{W(w, x), w = \overline{0, 2^m - 1}\}\,.$$

То есть верхняя оценка mk емкостной сложности алгоритма совпадает с его нижней оценкой.

Временная сложность алгоритма при аппаратной и программно-аппаратной его реализации также имеет минимально возможное значение, равное одному такту, необходимому для выполнения простейшей векторной логической операции «сумма по $mod2$».

Структура многоканального формирователя с произвольным распределением по каналам генерируемых функций Уолша приведена на рис. 1.

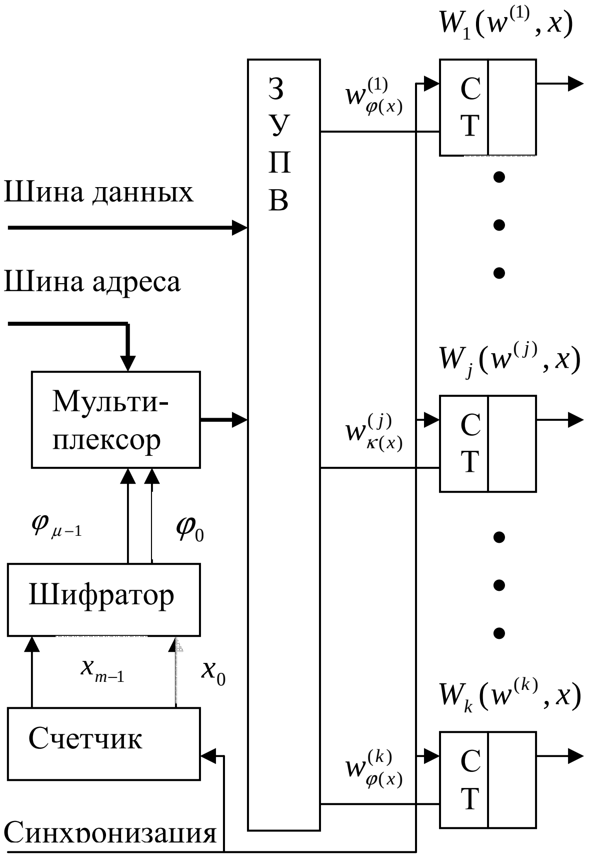

Рис. 1. Структура формирователя функций Уолша

Равномерность шкалы отсчетов генерируемых функций обеспечивается за счет постоянства временных затрат для получения вектора их очередных значений. Минимально возможный разброс времен переключения функций гарантирован использованием однотипных триггеров со счетным входом на выходе формирователя.

Шифратор последовательности адресов $\varphi(x)$ содержит $\log_2 m$ бинарных адресных функций и реализуется в любой программируемой матрице или 1-2 микросхемами средней степени интеграции.

Выводы

Предложенный подход обеспечивает возможность формирования по единому алгоритму произвольной совокупности функций Уолша, в том числе кодов Грея, прямых и обратных двоичных кодов в программируемых каналах многоканальных прикладных систем.

Реализуемая на основе данного алгоритма многоканальная система с произвольным канальным распределением формируемых функций основана на шифрации состояний аргумента функций и отличается быстродействием, экономичностью и равномерной шкалой отсчетов. В части указанных характеристик она имеет лучшее из возможных решений.

Полученные результаты могут быть использованы при спектральной обработке сигналов, в многоканальных системах передачи данных 3-го и 4-го поколений, а также для генерации испытательных сигналов в системах тестового контроля и диагностирования цифровых устройств.

Список литературы

1. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

2. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. – М.: Наука, 1987. – 344 с.

3. *Дядюнов Н.Г., Сенин А.И.* Ортогональные и квазиортогональные сигналы. – М.: Связь, 1977. – 224 с.

4. *Карповский М.Г., Москалев Э.С.* Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. – Ленинград: Энергия, 1973. – 142 с.

5. *Никитин Г.И.* Применение функций Уолша в сотовых системах связи с кодовым разделением каналов. – Санкт-Петербург: СПбГУАП, 2003. – 86 с.

6. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.

7. *Ен. К.* Функции Уолша и код Грея. – М.: Зарубежная радиоэлектроника, 1972. – С. 27–32.