УДК 004.942 (045)

Гузий Н.Н., канд. техн. наук
Игнатов В.А., д-р техн. наук

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛЬНО-ИЗБЫТОЧНЫХ СИСТЕМ

Институт компьютерных технологий
Национального авиационного университета

Обосновано использование метода ZG – преобразований для решения задач анализа, синтеза и оптимизации фрактально-избыточных систем. Основные теоретические положения проиллюстрированы типовыми примерами

Введение

Развитие современных информационных технологий, компьютерных систем и сетей следующего поколения (*Next Generation Network – NGN*) неизменно сопровождается ростом требований к надежности и качеству обслуживания (*QoS*) [1, 2]. Проблемы обеспечения этих требований особо актуальны для систем реального времени [3, 4].

Основным средством предупреждения появления и развития критических ситуаций, связанных с отказами систем ответственного назначения и несанкционированными воздействиями на них, является использование различного вида избыточных ресурсов [5].

При системном подходе к выбору способов применения избыточности и построении надежных систем решают три проблемы [6]. Первой из них является выбор альтернативных принципов действия, структур и элементов («проблема структурного и параметрического синтеза»). Второй является проблема анализа эффективности альтернативных систем по выбранным критериям. Третья проблема – это проблема подготовки и принятия оптимального решения.

Цель данной работы заключается в разработке теоретических основ построения фрактально–избыточных систем на основе метода *ZG* – преобразования [8]. В дальнейшем они сокращенно обозначены как *ZG*ФИС. Принципиальной отличительной особенностью таких систем является высокий удельный вес использования цифровой передачи сигналов.

В известных на сегодня работах выполнено теоретическое обоснование отдельных способов и технологий введения избыточности, разработаны методы оценивания эффективности избыточных систем, предложены методы контроля, диагностирования и прогнозирования качества функционирования систем, обоснованы методы оптимального управления качеством на всех стадиях жизненного цикла систем.

В то же время остаются недостаточно изученными актуальные проблемы диагностирования *ZG*ФИС по невязкам и по интегральным критериям качества, самодиагностирования *ZG*ФИС в процессе функционирования в штатном режиме; автоматического самовосстановления требуемого качества функционирования без вмешательства обслуживающего персонала, адаптивной реконфигурации архитектуры и структуры *ZG*ФИС при обнаружении отказавших элементов, построения интеллектуальных и экспертных систем обеспечения заданного качества *ZG*ФИС и другие.

Разработанные нами теоретические положения позволяют устранить ряд недостатков известных решений.

Постановка задачи. Предположим, что известна $(n+m)\times m$ – матрица A прямого *ZG* – преобразования, характеризующая ориентацию в $(n+m)$ – ом пространстве проекций n-вектора Z, так, что $(n+m)$ – вектор

$$X = A \cdot Z. \tag{1}$$

По умолчанию рассматриваются только те матрицы A, ранг которых равен n, а любая комбинация из n строк такой матрицы также есть $n \times n$ – матрица ранга n. Предполагается, что при выполнении основных функций системой составляющие вектора X могут искажаются случайными воздействиями и помехами ΔX. Будем различать два вида искажений: малые искажения и выбросы. К малым искажениям отнесем реальные погрешности каналов, функционирующих в номинальном режиме. Выбросы (отказы, несанкционированные воздействия, организованные помехи и т.п.) по величине многократно превышают погрешности каналов при функционировании в номинальном режиме.

На основе метода ZG – преобразования требуется определить такую диагностическую процедуру, которая обеспечивает идентификацию координаты выброса и нейтрализацию этого выброса при оптимальном по методу наименьших квадратов оценивании вектора Z по искаженному вектору

$$Y = AX + \Delta X. \tag{2}$$

Теоретические основы построения ZGФИС базируется на следующих четырех теоремах.

Теорема 1 о существовании и единственности оптимального обратного преобразования избыточного векторного сигнала в векторный сигнал основного ортогонального базиса.

Оптимальное по методу наименьших квадратов обратное преобразование избыточного $n+m$ мерного векторного сигнала в векторный сигнал n -мерного базиса может быть выполнено на основе расширенной псевдоматрицы

$$D = [BA]^{-1} B, \tag{3}$$

где определенный выбор из конечного множества $n \times m$-матрицы B ранга n для заданной $m \times n$ – матрицы A делает оптимальное преобразование единственным.

Доказательство. Подставим значение (1) в матричное уравнение (2), получим

$$Z = [BA]^{-1} BAY = DX + D\Delta X,$$

отсюда следует, что

$$Z_{opt} = DX, \tag{4}$$

то-есть D является обратным преобразованием для искаженного вектора Y, которое дает оптимальную по методу максимального правдоподобия оценку Z_{opt}, погрешность которой

$$\Delta Z = D\Delta X. \tag{5}$$

Другими словами, преобразованию (1) соответствует обратное преобразование (4) с псевдоматрицей D (3), которое при конкретно выбранной матрице B дает единственную оптимальную оценку вектора Z , что и требовалось доказать.

Обозначим вектор истинного значения Z в расширенном пространстве сигналов через X^0 и введем квадратную проверочную матрицу S размерности n x n такую, что

$$SX^0 = 0, \tag{6}$$

а также вектор полной погрешности

$$\Delta X = \Delta X_c + \Delta X_{\hat{e}}, \tag{7}$$

ортогональные составляющие которого ΔX_c и $\Delta X_к$ назовем соответственно синхронной и квадратурной погрешностями. Вектор синхронной составляющей ΔX_c совпадает по направлению с вектором X^0, а вектор квадратурной погрешности $\Delta X_к$ является вектором, ортогональным к вектору X^0. Формальное определение векторных погрешностей можно выразить так

$$\Delta X_c = \hat{e} X^0, \quad x\ {}^0 \Delta X_{\hat{e}} = 0, \tag{8}$$

где $к$ – константа преобразования погрешности.

Использование проверочной матрицы S и условий (6) и (8) позволяет получить основное неравенство для диагностирования и реконфигурации ZGФИС. Модуль произведения проверочной матрицы на избыточный искаженный вектор

$$\left|S(X^0+\Delta X)\right| = \left|S(X^0+\Delta X_c+\Delta X_{\hat{e}})\right| = \left|S\Delta X_{\hat{e}}\right| > 0. \tag{9}$$

Отказ или несанкционированное воздействие на отдельный канал проявляется в существенном увеличении погрешности, включая её квадратурную составляющую. При нормальном функционировании системы для модуля вектора $S\Delta X_к$ имеется некоторый допустимый интервал значений, за который он выходит только в случае выброса сигнала в одном или нескольких каналах.

Преобразование (9) превращает синхронную погрешность в нулевой вектор и выделяет линейно преобразованный вектор квадратурной погрешности, поэтому за критерий отказа примем условие

$$\left\|S\Delta X_{\hat{e}}\right\| > \varepsilon, \tag{10}$$

где ε – допустимое значение нормы $||S\Delta X_к||$ вектора $S\Delta X_к$ для номинального режима функционирования системы.

При построении алгоритмов диагностики и реконфигурации с применением критерия (10), используем проверочную матрицу вида

$$S = AD - E, S = AD - E, \tag{11}$$

где E – единичная матрица.

Нетрудно убедиться, что матрица (3) удовлетворяет условию (11).

Для использования в дальнейшем докажем следующие утверждения.

Теорема 2 о существовании оптимальной максимально правдоподобной оценки.

Если при построении ZGФИС выполнены два условия:

2.1. A есть $(n+m)\times n$-матрица ранга n такая, что любая комбинация из n строк этой матрицы есть $n\times n$-матрица ранга n.

2.2. $X=AZ$, то есть представляет собой результат линейного преобразования с помощью $(n+m)\times n$-матрицы A ранга n вектора Z ранга n в $(n+m)$ – вектор X, то всегда имеет место обратное преобразование

$$Z = [BA]^{-1}BX, \tag{12}$$

для любой $n\times(n+m)$- матрицы B ранга n.

Доказательство. Подставим в (12) значение $X=AZ$, получим тождество $Z=Z$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Для $B=A^T$ матрица D в (12) является псевдообратной матрицей [4].

Следствие 2. Для преобразования (11), выполняемого с матрицей A, числовые значения элементов которой получены экспериментально, использование произвольной определенной матрицы B предпочтительнее из-за уменьшения погрешности, вносимой многократным использованием в преобразовании данных о матрице A.

Введем диагональную $(n+m)\times(n+m)$ – матрицу $G_{ij\ldots k}$, в которой i-й, j-й,…, k-й элементы нулевые, а все другие равны единице. Очевидно, что по определению матрицы $G_{ij\ldots k}$ индексы i, j,…, k не могут быть более чем $n+m$.

Будем рассматривать такие преобразования с $(n+m)\times(n+m)$-матрицами, для которых выполняется условие

$$n \geq m. \tag{13}$$

Это условие необходимо для того, чтобы любая комбинация из n строк $(n+m)\times(n+m)$ – матрицы, описывающей ориентацию каналов ZGФИС, имела детерминант, не равный нулю, или, другими словами, имела ранг, равный n.

Теорема 3 об инвариантности обратного ZG-преобразования относительно числа h индексов матрицы $G_{ij\ldots k}$, равных нулю.

Если число h индексов матрицы $G_{ij\ldots k}$, равных нулю, удовлетворяет условию

$$h \leq m, \tag{14}$$

где m – число избыточных каналов, то ZG-преобразование

$$Z = [BG_{ij\ldots k}\ A]^{-1} BG_{ij\ldots k}\ X, \qquad (15)$$

полученное из (3) путем подстановки в него матрицы $G_{ij\ldots k}$, инвариантно относительно числа h.

Доказательство. Так как произведение $G_{ij\ldots k}\ A$ представляет комбинацию из $n+m-h$ строк матрицы A, оно имеет при выполнении условия (14) теоремы ранг, равный n. Из этого следует инвариантность преобразования (15) относительно числа h, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Преобразование (15) названо обратным ZG-преобразованием для прямого преобразования (1).

Следствие 2. Вместе с прямым ZG-преобразованием (1) обратное преобразование (15) образует важную для задач анализа, синтеза и оптимизации ZGФИС пару ZG-преобразований.

Для практически важного случая мажоритарного резервирования при $n=m=3$, принципиально отличающегося от простого дублирования сигналов и каналов, докажем следующую теорему.

Теорема 4 об условиях сохранения ранга матрицы G_{ijk} в ZG-преобразовании (15).

Если:

4.1. Каждый столбец 6×3-матрицы A содержит не более двух нулей.

4.2. Каждая строка в этой матрице содержит не более одного нуля.

4.3. Любая комбинация трех строк этой матрицы имеет ранг 3;

то для 6×6-матрицы G_{ijk} преобразование (15) сохраняет ранг 3.

Доказательство. Произведение матриц BG_{ijk} содержит три нулевых столбца. Обозначим это произведение как B_{ijk}. Пусть в A содержится l-й столбец, заполненный нулями в i-й, j-й и k-й строках. Тогда 3×3-матрица $B_{ijk}A$ также содержит нулевой l-й столбец. Следовательно, в этом случае, не существует обратной матрицы и ZG-преобразование не выполняется. Для осуществления ZG-преобразования необходимо иметь хотя бы одно произведение строк матрицы B_{ijk} на l-й столбец, отличное от нуля, что выполняется при выполнении условий теоремы, что и требовалось доказать.

Рассмотрим модели системы, в которой ZG-преобразование используется для нейтрализации действия выбросов на выходной вектор системы и её реконфигурацию.

Пример 1. Модель функционирования ZGФИС представлена в среде *Excel* (табл. 1).

Вектор Z (верхний левый угол таблицы) является измеряемой физической величиной, которая порождающей избыточность матрицей A преобразуется в точное значение избыточного вектора AZ. Вычисляются вектор выбросов ΔX, значение искаженного выбросом в i-м канале значение избыточного вектора $AZ+\Delta X$. В правом верхнем углу показана матрица G. Восстановленный вектор показан в столбце с обозначением $Z_{\text{вост}}$. Обратная матрица BGA обозначена через *Обр*(BGA).

Пример 2. Случай, когда в ZGФИС имеются отказы. В этом эксперименте проверена работа модели ZGФИС при искажении избыточного сигнала. Для парирования отказа в матрице G элемент $g_3=0$. В результате выполняется правильное оптимальное восстановление базового вектора и $Z_{\text{вост}}=Z$.

По результатам исследований можно сделать следующие выводы:

1. Для диагностирования и реконфигурации ZGФИС предложено использовать миноритарный принцип «голосования меньшинством» для построения прямого $G_{ij\ldots k}\ A$ и обратного $[BG_{ij\ldots k}\ A]^{-1}BG_{ij\ldots k}$ ZG-преобразований с корректирующей порождающую матрицу A диагональной матрицей $G_{ij\ldots k}$.

2. Теоретической основой практического применения ZG-преобразований служат утверждения теорем 1-4, которые содержат условия существования и единственности оптимальных решений, условия существования оптимальной максимально правдоподобной оценки восстановленного не избыточного вектора, ус-

ловие инвариантности обратного *ZG*-преобразования .

Таблица 1. Модель ZGФИС в среде *Excel*

z		A				Az	Δx	Az+Δx				G		
1		1	0	0		1	0	1	1	0	0	0	0	0
7		0	1	0		7	0	7	0	1	0	0	0	0
3		0	0	1		3	0	3	0	0	1	0	0	0
		0,577	0,577	0,577		6,35	0	6,35	0	0	0	1	0	0
		0,408	-0,82	0,408		-4,08	0	-4,1	0	0	0	0	1	0
		-0,71	0	0,707		1,41	0	1,41	0	0	0	0	0	1
		D					Zвост					B		
0,82	0,121	-0,55	0,349	0,395	0,258		1		1	-1	1	1	1	0
1,81	3,864	-2,89	-1,03	2,781	3,323		7		1	1	-1	0	1	1
0,81	1,787	-0,76	-0,49	1,844	1,816		3		1	-1	-1	1	-1	-1
		AD										BG		
0,82	0,121	-0,55	0,349	0,395	0,258				1	-1	1	1	1	0
1,81	3,864	-2,89	-1,03	2,781	3,323				1	1	-1	0	1	1
0,81	1,787	-0,76	-0,49	1,844	1,816				1	-1	-1	1	-1	-1
1,99	3,333	-2,42	-0,67	2,898	3,116									
-0,8	-2,38	1,83	0,783	-1,357	-1,866					BGA				
-0	1,178	-0,15	-0,59	1,025	1,102				2	-1	2			
		S					SΔx		1	0	0			
-0,2	0,121	-0,55	0,349	0,395	0,258		0		2	0	-2			
1,81	2,864	-2,89	-1,03	2,781	3,323		0							
0,81	1,787	-1,76	-0,49	1,844	1,816		0			Обр(BGA)				
1,99	3,333	-2,42	-1,67	2,898	3,116		0		0	0	0			
-0,8	-2,38	1,83	0,783	-2,357	-1,866		-0		-1	3	-0			
-0	1,178	-0,15	-0,59	1,025	0,102		0		0	1	-1			

3. Модельные эксперименты и примеры самодиагностирования и реконфигурации ZGФИС наглядно иллюстрируют работу предлагаемых алгоритмов, разрабатываемых на основе *ZG*-преобразований.

Список литературы

1. *Бакланов И.Г.* NGN: принципы построения и организации. / Под ред. Ю.Н. Чернышева. – М.: Эко-Трендз, 2008. – 400 с.

2. *Хелд Д.* Технологии передачи данных. 7-е изд. / Г. Хелд: пер. с англ.. под общ. ред. А. Куленко. – СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 2006. – 720 с.

3. Задачі оптимального проектування надійних мереж. / За загальною редакцією Н.З.Шора. – К.: Наукова думка, 2005. – 230 с.

4. ISO/IEC 7498-2-89. Информационные технологии. Взаимосвязь открытых систем. Базовая эталонная модель. Архитектура информационной безопасности. 1989.

5. *Боголюбов Н.В., Игнатов В.А.* Управление информационной избыточностью систем диагностирования и контроля / Контроль и управление техническим состоянием авиационного и радиоэлектронного оборудования воздушных судов гражданской авиации. – К.: КИИГА, 1986. – С. 3–11.

6. *Игнатов В.А., Маньшин Г.Г., Трайнев В.А.* Статистическая оптимизация качества функционирования электронных систем. – М.: Энергия, 1974. – 264 с.

7. *Игнатов В.А.* Теория информации и передачи сигналов. 2-е издание. – М.: Сов. радио, 1990. – 280 с.

8. *Игнатов В.А., Захаренков В.В.* Мажоритарное устройство для выделения проекций векторной величины. А.С. СССР №782162. Б.И. СССР. – №6. – 1978.