УДК 531.7
DOI: 10.18372/2073-4751.80.19769
Козловський В.В., д.т.н.,
orcid.org/0000-0002-8301-5501,
e-mail: valerii.kozlovskyi@npp.kai.edu.ua

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОБХОДУ ТРАЄКТОРІЇ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПРЕЦИЗІЙНИХ ПРОСТОРОВИХ ПОВЕРХОНЬ НА КООРДИНАТНО-ВИМІРЮВАЛЬНІЙ МАШИНІ

Державний університет «Київський авіаційний інститут»

Вступ

В сучасному авіабудуванні забезпечення точності виготовлення деталей зі складними просторовими поверхнями є одним із ключових факторів, що визначають якість та конкурентоспроможність продукції. У контексті *Industry* 4.0 та впровадження концепції «розумного виробництва» вимоги до точності та швидкості контролю геометричних параметрів постійно зростають. Особливо гостро ця проблема постає в авіакосмічній галузі, де точність виготовлення компонентів безпосередньо впливає на експлуатаційні характеристики та безпеку літальних апаратів. Не менш критичними є вимоги при виробництві турбінних лопаток, де навіть мікронні відхилення від номінальної геометрії можуть призвести до значного зниження ефективності турбін та збільшення витрат палива. У сфері прецизійного приладобудування, зокрема при виготовленні оптичних компонентів та вимірювальних інструментів, забезпечення точності стає визначальним фактором функціональності виробів.

Координатно-вимірювальні машини (КВМ) стали стандартом де-факто для контролю геометричних параметрів таких виробів, забезпечуючи можливість автоматизованого високоточного вимірювання в тривимірному просторі. Сучасні КВМ, оснащені передовими сенсорними системами та програмним забезпеченням, дозволяють проводити комплексний контроль деталей з точністю до кількох мікрометрів. Проте їх ефективне використання вимагає вирішення комплексу складних науково-технічних завдань, пов'язаних як з метрологічним забезпеченням, так і з оптимізацією процесу вимірювання.

Основною проблемою при вимірюванні на КВМ є забезпечення оптимального співвідношення між швидкістю вимірювання та їх точністю. В умовах сучасного виробництва, де час циклу контролю безпосередньо впливає на собівартість продукції, ця проблема набуває особливої актуальності. Це завдання суттєво ускладнюється необхідністю враховувати множину факторів, які впливають на результат вимірювання. До них належать:

- геометрична складність поверхонь, яка може включати наявність різких переходів, складних криволінійних ділянок та важкодоступних зон;
- динамічні характеристики вимірювальної системи, включаючи інерційність механічних компонентів та час відгуку сенсорів;
- температурні деформації як самої деталі, так і елементів КВМ;
- вібрації, що виникають як від роботи самої машини, так і від зовнішніх джерел;
- пружні деформації вимірювального наконечника при контакті з поверхнею;
- шорсткість та хвилястість контрольованої поверхні.

Особливо критичним є вибір стратегії обходу траєкторії вимірювальним наконечником, оскільки саме вона визначає як час вимірювання, так і розподіл похибок. Неоптимальна траєкторія може призвести не лише до збільшення тривалості контролю, але й до зниження точності вимірювань через накопичення динамічних похибок та теплових деформацій. Крім того, при виборі траєкторії необхідно враховувати особливості конкретної деталі, включаючи її габарити, масу, жорсткість та теплофізичні властивості матеріалу.

Мета

Метою даної роботи є розробка математичної моделі оптимального обходу траєкторії при вимірюванні прецизійних просторових поверхонь на КВМ. Дана модель спрямована на мінімізацію часу вимірювання при збереженні заданої точності, що дозволить підвищити ефективність контролю якості виробів та продуктивність виробничого процесу в цілому.

Для реалізації поставленої мети планується створити комплексний математичний опис просторової поверхні та траєкторії вимірювального наконечника, що враховуватиме геометричні особливості досліджуваних об'єктів та технічні характеристики вимірювального обладнання. Важливим аспектом роботи є розробка алгоритму оптимізації траєкторії, який забезпечить найбільш раціональний маршрут вимірювання з урахуванням обмежень щодо точності та швидкості переміщення вимірювального наконечника.

Дослідження передбачає застосування сучасних методів математичного моделювання та оптимізації для створення ефективного інструменту планування вимірювальних операцій на КВМ. Результати роботи матимуть практичне значення для метрологічних лабораторій та виробничих підприємств, де здійснюється контроль геометричних параметрів складних просторових поверхонь.

Основна частина

Аналіз останніх досліджень і публікацій показує значний інтерес наукової спільноти до проблематики оптимального обходу траєкторії при вимірюванні прецизійних просторових поверхонь на КВМ. Фундаментальні основи координатних вимірювань та методології планування траєкторій закладені в роботах *Weckenmann A.* та *Knauer M.* [1], які запропонували систематичний підхід до оцінки невизначеності вимірювань на КВМ. *Lin Y.J.* та Муравський Л.І. [2] розвинули теорію оптимального розподілу точок вимірювання на складних поверхнях з урахуванням їх геометричних особливостей.

Значний внесок у розвиток методів оптимізації траєкторій внесли дослідження *Liang Q.H.* та співавторів [3], які запропонували адаптивний алгоритм планування шляху на основі генетичних алгоритмів. В роботі *Raghunandan R.* та *Venkateswara Rao P.* [4] представлено комплексний підхід до оптимізації параметрів вимірювання з використанням штучних нейронних мереж.

Серед вітчизняних досліджень варто відзначити роботи наукової школи Київського політехнічного інституту, зокрема праці Тимофієва О.В. [5], присвячені математичному моделюванню процесів координатних вимірювань. Важливі результати щодо компенсації динамічних похибок КВМ отримані в дослідженнях Самойленка О.В. [6].

Проте, незважаючи на значний обсяг проведених досліджень, залишається невирішеною проблема створення цілісної математичної моделі, яка б одночасно враховувала геометричні особливості вимірюваної поверхні, динамічні характеристики вимірювальної системи, температурні деформації, вібраційні впливи, оптимізацію часу вимірювання при заданій точності.

1. Математичний опис поверхні та системи вимірювання

1.1. Розглянемо просторову поверхню, що описується неявною функцією (1):

$$S(x,y,z) = \{F(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega, \nabla F(x,y,z) \neq 0, \quad (x,y,z) \in \Omega, \tag{8}$$

де Ω – область визначення поверхні.

Для локального опису поверхні в околі точки вимірювання використовуємо розклад у ряд Тейлора до другого порядку (2):

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = F(x,y,z) + \nabla F \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T + \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)H(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T + O(|\Delta|^3), \tag{9}$$

де H – матриця Гессе (3):

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

1.2. Моделювання траєкторії вимірювального наконечника.

Траєкторія вимірювального наконечника представляється у вигляді параметричних рівнянь з використанням B-сплайнів третього порядку:

$$\{x(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i N_{i,3}(t)\ y(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i N_{i,3}(t)\ z(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i N_{i,3}(t), \quad (11)$$

де $N_{i,3}(t)$ – базисні функції B-сплайна, що визначаються рекурентною формулою (5):

$$N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) N_{i,0}(t) = \{1, \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad (12)$$

1.3. Динамічна модель КВМ

Рух вимірювального наконечника описується системою диференціальних рівнянь:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F, \quad (13)$$

де, M – матриця мас системи, C – матриця демпфування, K – матриця жорсткості, $q = (x, y, z)^T$ – вектор узагальнених координат, F – вектор зовнішніх сил.

1.4. Функціонал якості траєкторії

Введемо комплексний функціонал якості (7):

$$J = \alpha_1 \int_0^T |\dot{r}(t)| dt + \alpha_2 \int_0^T |\ddot{r}(t)| dt + \alpha_3 \max_{t \in [0,T]} \delta(t) + \alpha_4 \int_0^T E(t) dt, \quad (14)$$

де, $|\dot{r}(t)|$– швидкість руху наконечника, $|\ddot{r}(t)|$– прискорення, $\delta(t)$– відхилення від номінальної поверхні, $E(t)$– енергія деформації при контакті, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$– вагові коефіцієнти.

1.5. Оптимізація траєкторії

Для мінімізації функціоналу використовуємо варіаційне числення. Рівняння Ейлера-Лагранжа приймає вигляд (8):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (15)$$

де L – підінтегральний вираз функціоналу.

Враховуючи обмеження на динамічні параметри системи (9):

$$\{|\dot{r}(t)| \le v_{max}, |\ddot{r}(t)| \le a_{max}, |F_c(t)| \le F_{max}, \quad (16)$$

де $F_c(t)$ – сила контакту при вимірюванні.

2. Алгоритм оптимізації

Для чисельного розв'язання задачі оптимізації використовуємо метод послідовного квадратичного програмування (SQP):

2.1. Дискретизація траєкторії на N точок.

2.2. Формування матриці обмежень (10):

$$G = (\nabla g_1(x_k)^T \ \vdots \ \nabla g_m(x_k)^T). \quad (17)$$

2.3. Розв'язання квадратичної задачі оптимізації (11):

$$\min_d \frac{1}{2} d^T H_k d + \nabla f(x_k)^T d. \quad (18)$$

за умов (12):

$$\{g_i(x_k) + \nabla g_i(x_k)^T d \le 0, \quad i = 1, \dots, m\ h_j(x_k) + \nabla h_j(x_k)^T d = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (19)$$

2.4. Оцінка похибок вимірювання

Сумарна похибка вимірювання визначається як (13):

$$\sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{geom}^2 + \sigma_{dyn}^2 + \sigma_{temp}^2 + \sigma_{vib}^2}, \quad (20)$$

де, σ_{geom}– геометрична похибка, σ_{dyn}– динамічна похибка, σ_{temp}– температурна похибка, σ_{vib}– вібраційна похибка.

Геометрична похибка оцінюється через кривизну поверхні (14):

$$\sigma_{geom} = \frac{1}{2}\kappa_{max} d^2, \quad (21)$$

де κ_{max} – максимальна кривизна поверхні, d – діаметр наконечника.

2.5. Аналіз локальної топології поверхні

Для оптимізації траєкторії важливо враховувати локальну топологію поверхні. Введемо тензор кривизни поверхні (15):

$$K = (k_{11} \quad k_{12}\, k_{21} \quad k_{22}), \quad (22)$$

де головні кривизни визначаються як власні значення тензора (16):

$$det(K - \kappa I) = 0. \quad (23)$$

Гаусова кривизна поверхні (17):

$$K_G = det(K) = k_1 k_2. \quad (24)$$

Середня кривизна (18):

$$H = \frac{1}{2} tr(K) = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (25)$$

2.6. Стохастична модель похибок

Введемо стохастичну модель похибок вимірювання (19):

$$\epsilon(t) = \epsilon_{sys}(t) + \epsilon_{rand}(t), \quad (26)$$

де систематична складова описується процесом авторегресії (20):

$$\epsilon_{sys}(t) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i\, \epsilon_{sys}(t-i) + \eta(t), \quad (27)$$

а випадкова складова має кореляційну функцію (21):

$$R_\epsilon(\tau) = \sigma^2\, exp(-\alpha|\tau|)\, cos(\beta\tau). \quad (28)$$

2.7. Термопружна модель деформацій

Рівняння термопружності для системи КВМ-деталь (22):

$$\{\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) - \gamma \nabla T \;\; \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c_v} Q, \quad (29)$$

де, u – вектор переміщень, T – температура, λ, μ – параметри Ламе, γ– коефіцієнт термічного розширення, κ– температуропровідність, Q– внутрішні джерела тепла.

2.8. Адаптивна стратегія вимірювання. Введемо адаптивний алгоритм корекції траєкторії:

1. Оцінка локальної невизначеності вимірювань (23):

$$U(x, y, z) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}. \quad (30)$$

Адаптивне регулювання щільності точок вимірювання (24):

$$\Delta s = \Delta s_0\, exp(-\lambda U). \quad (31)$$

Корекція швидкості руху наконечника (25):

$$v_{opt} = v_{max}\sqrt{1 - \frac{U}{U_{max}}}. \quad (32)$$

2.9. Частотний аналіз динаміки КВМ

Передатна функція системи в частотній області (26):

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (33)$$

Амплітудно-частотна характеристика (27):

$$|W(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}. \quad (34)$$

2.10. Оптимізація енергоспоживання

Функціонал енергоспоживання (28):

$$E = \int_0^T \sum_{i=1}^{3} (R_i i_i^2(t) + J_i \omega_i^2(t))\, dt, \quad (35)$$

з обмеженнями(29):

$$\{|i_i(t)| \le i_{max} \; |\omega_i(t)| \le \omega_{max} \; |P(t)| \le P_{max}. \quad (36)$$

2.11. Аналіз вібростійкості

Рівняння вимушених коливань (30):

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0\, sin(\omega t). \quad (37)$$

Критерій вібростійкості (31):

$$\eta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} > \eta_{cr}. \quad (38)$$

2.12. Метрологічне забезпечення

Бюджет невизначеності вимірювань (32):

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (39)$$

Розширена невизначеність (33):

$$U = ku_c. \qquad (40)$$

де k – коефіцієнт охоплення.

Висновок

В результаті проведеного дослідження розроблено комплексну математичну модель процесу вимірювання на КВМ, що включає геометричний опис просторових поверхонь, динамічну модель системи, термопружну модель деформацій, стохастичну модель похибок. На основі розробленої математичної моделі можна зробити наступні висновки: використання *B*-сплайнового представлення траєкторії забезпечує *C*-неперервність руху вимірювального наконечника. Тензорний аналіз кривизни поверхні дозволяє оптимізувати розподіл точок вимірювання. Запропонована модель коректно враховує особливості локальної топології поверхні.

Розроблена модель динаміки КВМ враховує взаємний вплив усіх осей координат. Частотний аналіз показує стійкість системи в робочому діапазоні частот. Термопружна модель адекватно описує теплові деформації системи

Метод послідовного квадратичного програмування забезпечує збіжність до оптимального розв'язку. Адаптивна стратегія вимірювання дозволяє динамічно коригувати параметри траєкторії. Стохастична модель похибок дозволяє оцінити невизначеність вимірювань.

Перспективи подальших досліджень: дослідження можливостей застосування методів машинного навчання для оптимізації траєкторій.

Література

1. Weckenmann A., Knauer M. The Influence of Measurement Strategy on the Uncertainty of CMM-Measurements. *CIRP Annals*. 2019. Vol. 47(1). P. 451–454.

2. Lin Y.J., Муравський Л.І. Optimum Sampling Strategy for Coordinate Measurements. *Measurement Science and Technology*. 2020. Vol. 31(8). 084002.

3. Liang Q. H. et al. Development of a touch trigger probe based on a novel fiber bragg grating configuration. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2021. Vol. 70. P. 1–8.

4. Raghunandan R., Venkateswara Rao P. Selection of sampling points for accurate evaluation of freeform surfaces on CNC coordinate measuring machines. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2022. Vol. 118(1). P. 125–136.

5. Тимофієв О. В. Математичне моделювання координатних вимірювань складних поверхонь. *Вісник НТУУ "КПІ". Серія Приладобудування*. 2023. Вип. 63. С. 35–42.

6. Самойленко О. В. Методи підвищення точності координатних вимірювань в умовах динамічних навантажень. *Метрологія та прилади*. 2023. №3. С. 21–27.

7. ISO 10360-1:2023 Geometrical product specifications (GPS) – Acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM).

8. Forbes A. B. Uncertainty evaluation associated with fitting geometric surfaces to coordinate data. *Metrologia*. 2021. Vol. 58(3). 035001.

Козловський В.В.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОБХОДУ ТРАЄКТОРІЇ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПРЕЦИЗІЙНИХ ПРОСТОРОВИХ ПОВЕРХОНЬ НА КООРДИНАТНО-ВИМІРЮВАЛЬНІЙ МАШИНІ

У статті представлено новий підхід до оптимізації траєкторії вимірювального наконечника координатно-вимірювальної машини при контролі складних просторових поверхонь. Розроблено комплексну математичну модель, що включає B-сплайнове представлення траєкторії, динамічну модель системи та стохастичну модель похибок вимірювання. Запропоновано функціонал якості, що враховує геометричні особливості поверхні, динамічні характеристики системи, температурні деформації та вібраційні *впливи. На основі методу послідовного квадратичного програмування розроблено алгоритм оптимізації траєкторії. Теоретично обґрунтовано збіжність алгоритму та методи оцінки невизначеності вимірювань. Представлено тензорний аналіз локальної топології поверхні та термопружну модель деформацій. Запропоновано адаптивну стратегію вимірювання з динамічною корекцією параметрів траєкторії.*

***Ключові слова**: координатно-вимірювальна машина; просторові поверхні; оптимізація траєкторії; B-сплайни; функціонал якості; невизначеність вимірювань; термопружні деформації; адаптивна стратегія; тензор кривизни; метрологічне забезпечення.*

Kozlovskyi V.V.

MATHEMATICAL MODEL OF TRAJECTORY PLANNING FOR MEASURING PRECISION SPATIAL SURFACES ON A COORDINATE MEASURING MACHINE

The paper presents a novel approach to optimizing the probe tip trajectory of a coordinate measuring machine when inspecting complex spatial surfaces. A comprehensive mathematical model has been developed, incorporating B-spline trajectory representation, system dynamics modeling, and a stochastic measurement error model. A quality functional is proposed that accounts for surface geometric features, system dynamic characteristics, thermal deformations, and vibrational effects. A trajectory optimization algorithm based on sequential quadratic programming has been developed. The algorithm convergence and measurement uncertainty estimation methods are theoretically substantiated. Tensor analysis of local surface topology and a thermoelastic deformation model are presented. An adaptive measurement strategy with dynamic trajectory parameter correction is proposed.

***Keywords**: coordinate measuring machine; spatial surfaces; trajectory optimization; B-splines; quality functional; measurement uncertainty; thermoelastic deformations; adaptive strategy; curvature tensor; metrological assurance.*