УДК 681.516.75 DOI: 10.18372/2073-4751.72.17456

Антонов В.К., д.т.н.,
orcid.org/0000-0001-7201-2877

СТАБІЛІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Національний авіаційний університет

_o0@ukr.net

Теорія автоматичного управління об’єднує риси і ознаки фундаментальної і прикладної дисципліни (в техніці – більше прикладної) [1-3]. Саме прикладний характер зумовлений суб’єктивністю вимог до рукотворних об’єктів, створених людиною. У разі, коли йдеться про будову матерії, часу і простору – об’єктів пізнання, що на сучасному (і на перспективу – майже назавжди) рівні за уявленнями є принципово не керованими, йдеться про фундаментальні речі, до яких вдається наблизитись тільки розумінням. Суспільній практиці тут не місце (і не зараз). Про технології не йдеться, найвищим результатом є досягнення розуміння (в межах можливості), і «ніколи» (історично – на коротку перспективу) не «впровадження». Ситуацію прояснює порівняння розвитку електродинаміки від спостереження блискавки древньою людиною до винаходу електродвигуна. Сьогодні наш стан по суті первинний. Ми не маємо надії побачити двигун, що спрямовує силу ваги у напрямку заданого руху, або використовує квантову заплутаність для реалізації руху поза часових, дистанційних і координатних просторових обмежень.

Навіть порівняно просту задачу розуміння мови тварин за допомогою штучного інтелекту ми не ставимо.

При побудові систем, наприклад і насамперед авіаційного призначення, суттєвим є уявлення про систему як лінійну чи нелінійну. Лінійна система із змінними параметрами однозначно відповідає деякій нелінійній системі, відносно якої вимоги про вичерпний аналітичний аналіз ми не ставимо. При цьому ми впевнено уходимо від самої думки про аналітику, всіляко покладаючись на комп’ютерний аналіз. Прикладом є розгляд впливу запізнення скосу потоку від крила на стабілізатор, і врешті на продовжній момент по тангажу, що описується похідною за похідною від кута атаки від коефіцієнта поздовжнього обертального моменту $m_z^{\vec{\alpha}}$. Це визначення спрощує обчислення, але формально суперечить визначенню моменту як зумовленого саме затримкою на час руху потоку від крила до стабілізатора. Це програмно легко реалізується на моделі обертального руху. Операція затримки має принципово логічний характер, і не зводиться до неперервних перетворень. Але система при цьому стає логіко-динамічною, тобто «гіршою» нелінійної. Розкладання функції затримки в ряд із підвищенням розмірності збережує аналітичність. Далі слідує аналіз неперервної системи із змінними параметрами.

Ще один авіаційний приклад вертольота, несучий гвинт якого може розглядатися як: – джерело постійної підйомної сили; – нелінійно залежної від фазових координат, – лінійної функції, що входить в рівняння руху із змінним у часи (за обертання) коефіцієнтом.

Саме ці випадки ми обираємо предметом нашої уваги.

Система описується лінійним звичайним диференційним рівнянням і є керованою

$$\dot{X} = A(t)X(t) + B(t)u(t)$$
чи
$$\dot{X}^T = X^T(t)A^T(t) + u^T(t)B^T, \quad (1)$$

де T – символ транспонування; X – фазовий вектор розмірності n; $A(t)$ – $n \times n$ квадратна матриця, елементи якої змінюються у часі; $B(t) - n \times m$ прямокутна матриця, теж змінна у часі; $u(t) - m$ вектор управління. Крапкою, як зазвичай, позначено операцію диференціювання по часу. Ми використаємо метод порівняння, згідно якому слід задати допоміжну функцію порівняння, що є носієм інформації про зв'язок між координатами досліджуваної системи на керованих рухах. Також треба задати допоміжне диференційне рівняння, якому підпорядковується поведінка у часі функції порівняння.

Допоміжну функцію порівняння задамо у вигляді

$$V(t) = X^T(t)QX(t) + \dot{X}^T(t)P\dot{X}(t), \qquad (2)$$

де Q і $P - n \times n$ додатньо визначені квадратні матриці, можливо із постійними елементами. Систему порівняння задамо у вигляді:

$$\dot{V}(t) + cV(t) = 0, \qquad (3)$$

де с – заданий додатній показник експоненціального затухання функції порівняння. Визначення (2) і (3) визначають весь об'єм подальших дій.

Підставимо (1) і (2) в (3).

$$\dot{X}^T(t)QX(t) + X^T(t)Q\dot{X}^T(t) +$$
$$+ \ddot{X}^T(t)P\dot{X}(t) + \dot{X}^T(t)P\ddot{X}(t) +$$
$$+ c\left(X^T(t)QX(t) + \dot{X}^T(t)P\dot{X}(t)\right) = 0. \quad (4)$$

При подальшому виводі одержимо одне диференційне рівняння із одною векторною невідомою змінною – управлінням. Рівняння одне, а складових у векторі управління m. Тому для довизначення задачі потрібні додаткові кроки. У нас повинно бути декілька рівнянь, число яких дорівнює кількості компонент у векторі управління. Ми виконаємо цю вимогу одним із двох шляхів. Перший – будемо включати рівняння для управління в керованій системі (1) по черзі, і окремо послідовно знайдемо всі управління. Другий – задамо декілька допоміжних відмінних функцій і декілька (теж, можливо, відмінних) систем порівняння. І в цьому разі одержуємо визначену систему рівнянь для управління.

В (4) похідні від фазового вектора визначимо в силу (1).

$$[X^T(t)A^T(t) + u^T(t)B^T(t)]QX(t) +$$
$$+X^T(t)Q[A(t)X(t) + B(t)u(t)] +$$
$$+\big[X^T(t)\dot{A}^T(t) + \big(X^T(t)A^T(t) + u^T(t)B^T(t)\big)A^T(t) + u^T(t)\dot{B}^T(t) + \dot{u}^T(t)B^T(t)\big] \times$$
$$\times P[A(t)X(t) + B(t)u(t)] +$$
$$+[X^T(t)A^T(t) + u^T(t)B^T(t)]P \times$$
$$\times \big[\dot{A}(t)X(t) + A(t)(A(t)X(t) + B(t)u(t)) + \dot{B}(t)u(t) + B(t)\dot{u}(t)\big] +$$
$$+c\left(X^T(t)QX(t) + \dot{X}^T(t)P\dot{X}(t)\right) = 0. \quad (5)$$

В (5) виконаємо множення:

$$X^TA^TQX + A^TB^TQX + X^TQAX + X^TQBU +$$
$$+\big(X^T\dot{A}^T + X^TA^TA^T + U^TB^TA^T + U^T\dot{B}^T + \dot{U}^TB^T\big)\cdot$$
$$\cdot(PAX + PBU) +$$
$$(X^TA^TB + U^TB^TB)\cdot$$
$$\cdot\big(\dot{A}X + AAX + ABU + \dot{B}U + B\dot{U}\big) +$$
$$+c\big(X^TQX + \dot{X}^TP\dot{X}\big) = 0. \, (6)$$

Останню формулу перепишемо:

$$X^TA^TQX + A^TB^TQX +$$
$$+ X^TQAX + X^TQBU +$$
$$+\big(X^T\dot{A}^T + X^TA^TA^T + U^TB^TA^T + U^T\dot{B}^T + \dot{U}^TB^T\big)\cdot$$
$$\cdot(PAX + PBU) +$$
$$(X^TA^TB + U^TB^TB)\cdot$$
$$\cdot\big(\dot{A}X + AAX + ABU + \dot{B}U + B\dot{U}\big) +$$
$$+c(X^TQX + (X^TA^T + U^TB^T)P(AX + BU)) = 0. \qquad (7)$$

Продовжимо перетворення:

$$X^TQBU +$$
$$+\big(X^T\dot{A}^T + X^TA^TA^T + U^TB^TA^T + U^T\dot{B}^T + \dot{U}^TB^T\big)\cdot$$
$$\cdot(PAX + PBU) +$$
$$+(X^TA^TB + U^TB^TB)\cdot$$

$$\cdot \left(\dot{A}X + AAXX^TA^TQX + A^TB^TQX + X^TQAX + +ABU + \dot{B}U + B\dot{U}\right) +$$

$$+\mathrm{c}(X^TQX{+}X^TA^TPAX + U^TB^TPAX{+}X^TA^TPBU + U^TB^TPBU) = 0. \quad (8)$$

Одержали диференційне рівняння (8) для вектора управління. Друга і третя строки є взаємно транспонованими і є скалярами. Тому можливо спрощення запису рівняння в двох еквівалентних варіантах: перший – напівсумма першої і четвертої строк в суммі із другою строкою дорівнює нулю; другий – напівсумма першої і четвертої строк в суммі із третьою строкою дорівнює нулю.

Перший варіант:

$$\frac{1}{2}[X^TA^TQX + A^TB^TQX + X^TQAX + X^TQBU + \mathrm{c}(X^TQX{+}X^TA^TPAX + U^TB^TPAX{+}X^TA^TPBU + U^TB^TPBU)] +$$

$$+\left(X^T\dot{A}^T + X^TA^TA^T + U^TB^TA^T + U^T\dot{B}^T + \dot{U}^TB^T\right)\cdot$$

$$\cdot (PAX + PBU){=}0. \quad (9)$$

Другий варіант:

$$\frac{1}{2}[X^TA^TQX + A^TB^TQX + X^TQAX + X^TQBU + \mathrm{c}(X^TQX{+}X^TA^TPAX + U^TB^TPAX{+}X^TA^TPBU + U^TB^TPBU)] +$$

$$+(X^TA^TB + U^TB^TB)\cdot$$

$$\cdot \left(\dot{A}X + AAX + ABU + \dot{B}U + B\dot{U}\right) = 0. \quad (10)$$

На початку динамічного процесу час дорівнює нулю. Розв’язуємо рівняння (9) чи (10) відносно швидкості зміни управління, наприклад випадковим способом. Робимо крок інтегрування і рухаємось по траєкторії, повторюючи обчислення. Для пришвидчення використовуємо дані попередніх кроків.

Пеша похідна від фазового вектора задається вихідною системою (1). друга похідна визначається як похідна від першої похідної вихначеної в силу вихідної систем.

$$\ddot{X}(t) = \dot{A}(t)X(t) + +A(t)\dot{X}(t) + +\dot{B}(t)u(t) + +B(t)\dot{u}(t),$$

$$\ddot{X}(t) = \dot{A}(t)X(t) + +A(t)\big(A(t)X(t) + +B(t)u(t)\big) + +\dot{B}(t)u(t) + +B(t)\dot{u}(t).$$

Транспонований вираз має вигляд

$$\ddot{X}^T(t) = X^T(t)\dot{A}^T(t) + +\big(X^T(t)A^T(t) + u^T(t)B^T(t)\big)A^T(t) + +u^T(t)\dot{B}^T(t) + +\dot{u}^T(t)B^T(t).$$

В стаціонарному режимі (за відсутності відхилень) управління дорівнює нулю. Рахунок можна починати при нульовому управлінні.

Викладений алгоритм легко програмується.

Література

1. *Сильвєстров А.М.* Системи автоматичного керування технологічними комплексами. Навчальний посібник. – К.: КПІ ім. Сікорського, 2022. – 466 с.
2. *Резнікова Н.Б.* Теорія автоматичного керування: класика і сучасність: підр. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 328 с.
3. *Островерхов М.Я., Сильвєстров А.М., Зеленський К.Х.* Методи дослідження електротехнічних систем і комплексів. – ТАЛКОМ, 2019. – 300 с.

Антонов В.К.

СТАБІЛІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Запропоновано алгоритм обчислення стабілізуючих управлінь для лінійних систем із змінними параметрами. Вихідна система записується в загальному векторному вигляді. Для неї задається система порівняння і функція порівняння. Функція порівняння містить суму двох квадратичних форм – квадратичної форми для фазових координат і квадратичної форми для похідних від фазових координат. Система порівняння конструюється як диференційне рівняння, що забезпечує експоненційне загасання функції порівняння. Елементарними обчисленнями одержується диференціальне рівняння для обчислення у часі управління. Алгоритм може використовуватись для обчислень в реальному часі і режимі попереднього синтезу системи автоматичної стабілізації. Алгоритм легко програмується.

Ключові слова*: система із змінними параметрами, стабілізація, метод порівняння.*

Antonov V.K.

STABILIZATION OF LINEAR SYSTEMS WITH VARIABLE PARAMETERS

An algorithm for calculating stabilizing controls for linear systems with variable parameters is proposed. The output system is written in general vector form. A comparison system and a comparison function are set for it. The comparison function contains the sum of two quadratic forms – the quadratic form for the phase coordinates and the quadratic form for the derivatives of the phase coordinates. The comparison system is constructed as a differential equation that provides exponential decay of the comparison function. Elementary calculations yield a differential equation for calculation in control time. The algorithm can be used for calculations in real time and in the mode of preliminary synthesis of the automatic stabilization system. The algorithm is easy to program.

Key words*: system with variable parameters, stabilization, comparison method.*