УДК 681.3 DOI: 10.18372/2073-4751.71.16999

**Мелешко М.А.**, к.т.н.,
orcid.org/0000-0002-3889-2062,
**Ракицький В.А.**

# ВИКОРИСТАННЯ PL-БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ В КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

**Національний авіаційний університет**
mma.nau@ukr.net

## *Вступ*

З нашої точки зору, значні потенційні можливості мають цифрові системи, які використовують представлення сигналів системою базисних функцій. Тому подальші міркування будуть направлені на обґрунтування доцільності їх використання в інженерних розробках. Використання базисних перетворень в реальних системах цифрової обробки сигналів – головна тема досліджень.

PL-функції, як і функції Шаудера [1,2], належать до базисів лінійно-незалежних неортогональних функцій.

## *Постановка задачі досліджень*

Найбільш вдале визначення PL-функцій, з погляду використання у цифрових системах, через відомі функції Уолша (рис. 1).

$$\mathrm{PL}_k(t) = \mathrm{PL}_{mn}(t) = \begin{cases} 1, & k = 0, \quad t \in [0,T] \\ \frac{2^m}{T}\int_0^t Wal_k(t)dt, & k = 1,2 \ldots, \quad t \in [0,T] \\ 0, & t \notin [0,T] \end{cases} \qquad (1)$$

де $Wal_k$ – k-я функція Уолша; m – номер групи PL-функції (він також номер групи функцій Уолша), пов'язаний з k співвідношенням $k = 2^{m-1} + n; m = 1,2 \ldots, M; n = 1,2, \ldots 2^{m-1}$, (n – номер функції Уолша у m-й групі).

У порівнянні з функціями Шаудера PL-функції менш досліджені. У той же час, вони можуть бути ефективними при побудові цифрових систем стиснення даних.

На відміну від функцій Шаудера, PL-функції неперервні на відрізку [0, T], тому можливе забезпечення неперервності відновленого сигналу за допомогою обмеженого числа коефіцієнтів розкладу. Вказані властивості доцільно попередньо дослідити шляхом моделювання процесів обчислення коефіцієнтів. Більш зручне визначення функцій можна отримати на основі функцій Уолша, заданих матрицею Адамара.

$$\mathrm{Pl_k(t)} = \frac{1}{\mathrm{p}}\left[\sum_{\mathrm{h=1}}^{\mathrm{H}} \mathrm{had_{kh}} + \left(\frac{\mathrm{Wt}}{\mathrm{T}} - \mathrm{H}\right)\mathrm{had_{k(h+1)}}\right], \mathrm{k} = 1,2,\ldots, t \in [0,T] \qquad (2)$$

де $P = \frac{N}{2*2^{E\{\log_2 n\}}}$ – кількість сусідніх елементів одного символу в k-му рядку матриці; $H = E\{\frac{t}{T}2^M\}$ – ціла частина; n – число змін знаків у k-му рядку матриці Адамара. Встановимо зв'язок між системою функцій Шаудера та PL-функцій.

Відомо, що функції Уолша та Хаара, з урахуванням, що $\mathrm{had_{nj}}$ – елемент матриці Адамара порядку $2^{m-1}$, пов'язані співвідношенням:

$$Wal_{mn}(t) = 2^{-\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \mathrm{had_{nj}} x_{mj}(t), \qquad m = 1,2,\ldots \qquad (3)$$

Проінтегруємо обидві частини:

$$\int_0^t Wal_{mn}(t)dt = 2^{-\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \mathrm{had_{nj}} \int_0^t \mathrm{x}_{mj}(t)dt \qquad (4)$$

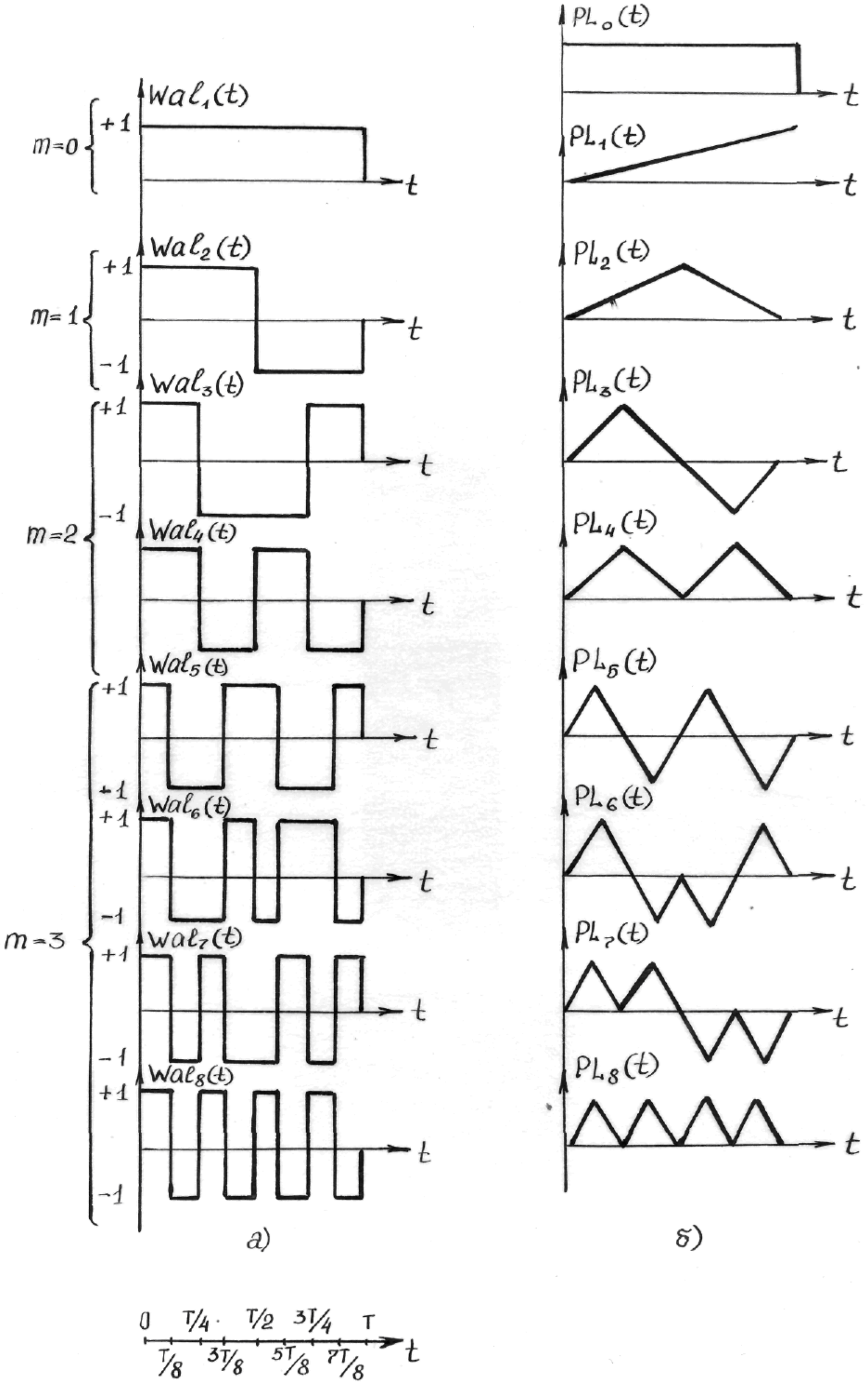


Рис. 1. Система базисних функцій Уолша (а) та PL-функцій (б)

З урахуванням визначення функцій Шаудера та PL-функцій отримаємо:

$$Pl_{mn}(t) = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \mathrm{had_{nj}} \int_0^t x_{mj}(t)dt\,, (5)$$

Або в матричній формі:

$$[Pl_{mn}(t)] = H_{2^{m-1}}[e_{mj}(t)], \quad (6)$$

де $m = 1,2, \ldots$ ; $[e_{mj}(t)]$ – функціональна матриця-стовпець функцій Шаудера m-ї групи; $[Pl_{mn}(t)]$ функціональна матриця стовпець PL-функцій m-ї групи; $H_{2^{m-1}}$ матриця Адамара порядку $2^{m-1}$.

Очевидно, що для функцій, що знаходяться поза групами, виконується тотожність:

$$Pl_0(t) \equiv e_0(t); \quad Pl_1(t) \equiv e_1(t),$$

а кожна PL-функція групи m є лінійна комбінація функцій Шаудера тієї ж групи з тим же номером, і навпаки. Надані співвідношення можуть бути корисними для розробки простих цифрових пристроїв, що забезпечують генерування як функцій Шаудера так і PL-функцій, без істотної зміни структури схем.

Визначаємо властивості коефіцієнтів розкладання сигналів до ряду.

У разі визначення PL-функцій через відомі функції Уолша коефіцієнти розкладання сигналів обчислюються як:

$$a_k = \begin{cases} x(0), & k = 0 \\ 2^{-m}\int_0^T x(t)Wal'_k(t)dt, & k = 1,2,\ldots \end{cases} \quad (7)$$

З урахуванням наданих розрахунків формули для обчислення коефіцієнтів розкладання сигналів по системі PL-функцій приводяться до виду:

$$a_k = \frac{P}{2^M}\sum_{i=1}^{w+1} x\left[\frac{(i-1)T}{2^M}\right]W_{ki} \quad (8)$$

де $W_{ki}$ – вага дельта функцій i-го елемента k-го рядка матриці похідних функцій Уолша. Формування матриці похідних вихідної матриці Адамара показано на рис. 2. Встановимо зв'язок між коефіцієнтами розкладання сигналів за системою PL-функцій та системою функції Шаудера .

Продиференціюємо, домножимо на x(t) та проінтегруємо обидві частини:

$$\int_0^T \mathrm{x}(t)Wal'_{mn}(t)dt = 2^{-\frac{m-1}{2}}\sum_{j=1} \mathrm{had_{nj}} \int_0^t \mathrm{x}(t)x'_{mj}(t)dt, \quad (9)$$

З урахуванням попередніх розрахунків:

$$a_{mn} = 2^{1-m}\textstyle\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \mathrm{had_{nj}}\, \mathrm{C_{mj}} \quad (10)$$

або в матричній формі:

$$[a_{mn}] = 2^{1-m}[C_{mj}]H^T_{2^{1-m}}\,, \quad (11)$$

де m=1,2,… $[C_{mj}]$ – матриця-рядок коефіцієнтів розкладання по системі функцій Шаудера m-ї групи; $[a_{mn}]$ – матриця-рядок коефіцієнтів розкладання по системі функцій PL-функцій m-ї групи; T – символ транспонування матриці.

Розглянемо суму:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{2^{m-1}} a_{mn}\,\mathrm{PL_{mn}}(t) = [a_{mn}][PL_{mn}(t)] \quad (13)$$

Підставляючи (7) та (11) отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{2^{m-1}} a_{mn}\,\mathrm{PL_{mn}}(t) = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} C_{mj}\,\mathrm{e_{mj}}(t) \quad (14)$$

Враховуємо, що:

$$a_0 = c_0; \quad a_1 = c_1 \quad (12)$$

Таким чином, коефіцієнти розкладання системи PL–функцій є лінійна комбінація коефіцієнтів розкладання системою функцій Шаудера і навпаки. Покажемо, що апроксимуючі функції x (t) при розкладанні сигналів, що передаються по системі функцій Шаудера і PL-функцій збігаються.

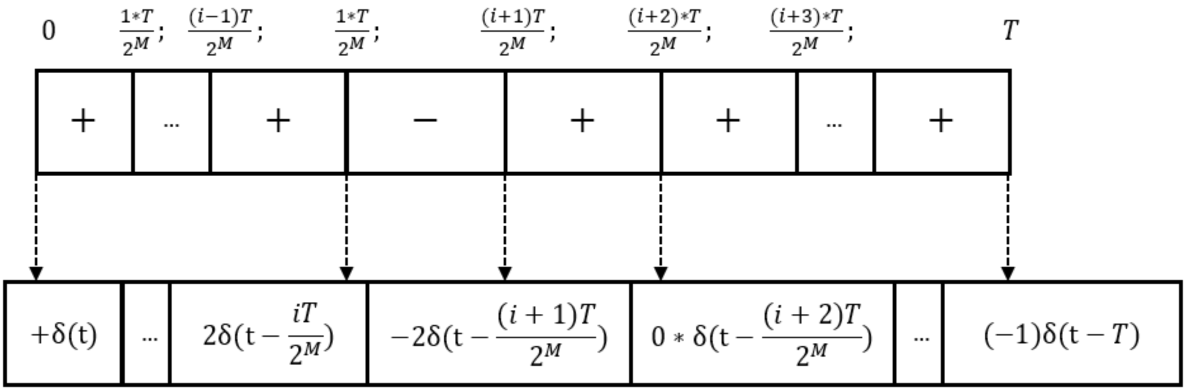


Рис. 2. Формування матриці похідних функцій Уолша з вихідної матриці Адамара

Так як $H^T_{2^{m-1}} H_{2^{m-1}} = 2^{m-1} I, m = 1,2,\dots,$ де I – одинична матриця порядку $2^{m-1}$ З урахуванням (8), (12), отримаємо функціональний зв’язок між перетворенням за системою базисних функцій Шаудера та PL:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k PL_k(t) = a_0 PL_0(t) + a_1 PL_1(t) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{2^{m-1}} a_{mn} PL_{mn}(t) =$$

$$= c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{mj} e_{mj}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e_k(t)\text{, де } \mathrm{M} = \log_2 N$$

Таким чином, для рівних N базиси Шаудера і PL еквівалентні) за точністю представлення сигналів. В той же час, при стисненні інформації, а саме при відборі інформативних коефіцієнтів, ситуація може бути відмінною, враховуючи, що функції Шаудера локальні на інтервалі [0,T], а PL-функції неперервні. Це питання для подальших досліджень за даною тематикою, наприклад, у формі моделювання.

### *Висновки*

За результатами попередніх досліджень проведено експериментальне комп’ютерне моделювання представлення фрагменту аудіо сигналу системою базисних PL-функцій. Попередньо оцифрована сигналограма сегментована на інтервали по 64 кодових комбінацій з подальшим обчисленням коефіцієнтів розкладу (пряме PL-перетворення). Сигналограми відновленого звукового фрагменту та їх спектральні зображення при використанні 64, 32, 16, 8, та 4 коефіцієнтів представлені на рис. 3 та рис. 4 відповідно.

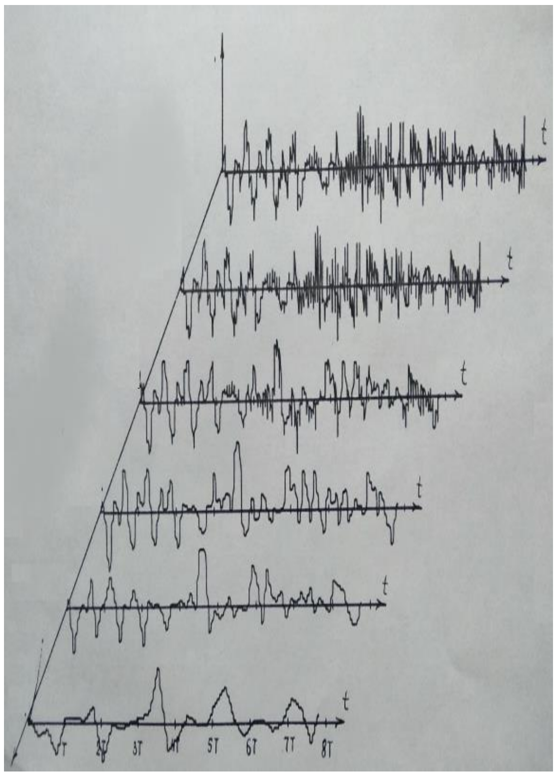

Рис. 3. Сигналограми вхідного та відновленого фрагменту по обчисленим 64, 32, 16, 8 та 4 коефіцієнтам за системою базисних PL-функцій.

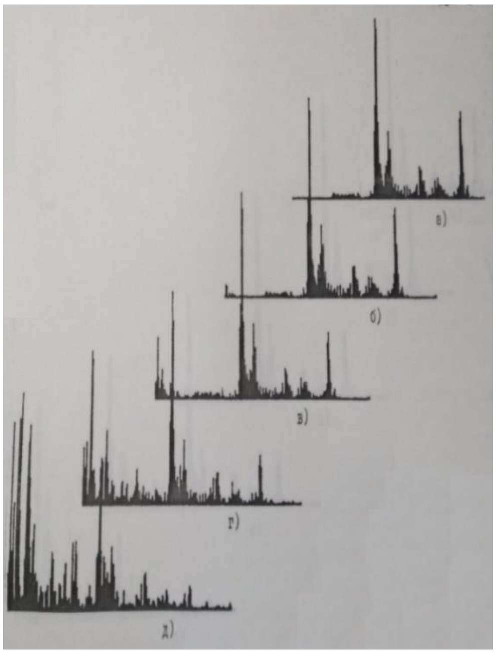

Рис. 4. Спектрограми відновленого фрагменту по обчисленим 64, 32, 16, 8 та 4 коефіцієнтам за системою базисних PL-функцій.


**Література**

1. *Геранин В.А., Мелешко Н.А. Овчарук М.Е. и др.* Среднеквадратическая погрешность представления стационарных случайных процессов в базисе PL-функций. Труды XI Всес. симпоз. "Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей" – Л., 1980. – С. 68-73.

2. *Геранин В.А., Мелешко Н.А., Середа Л.А. и др.* Среднеквадратическая погрешность представления стационарных случайных процессов в базисе функций Шаудера. Труды XI Всес. симпоз. "Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей" – Л., 1980. – С. 80-85.


**Мелешко М.А., Ракицький В.А.**

**ВИКОРИСТАННЯ PL-БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ В КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ**

Подано аналіз технічних можливостей використання системи базисних PL-функцій для представлення інформації в комп’ютерних системах та мережених засобах інформації. Проведено порівняльний аналіз з системою базисних функцій Шаудера. Показано, що при однакових параметрах розкладу сигналу при обчисленні коефіцієнтів отримуємо еквівалентні результати. При використанні даних базисних функцій, для стиснення інформації необхідно враховувати, що функції Шаудера локальні на інтервалі [0,T], а PL-функції – неперервні. На основі попередніх експериментальних досліджень надані рекомендації щодо використання PL-функцій для цифрової обробки, наприклад, аудіо інформації.

**Ключові слова**: представлення інформації, система базисних PL-функцій, цифрова обробка.

**Meleshko M.A., Rakytskyi V.A.**

**USE OF PL BASIC FUNCTIONS IN COMPUTER SIGNAL PROCESSING SYSTEMS**

*An analysis of the technical capabilities of using the system of basic PL-functions for the presentation of information in computer systems and network media is presented. A comparative analysis with Schauder's system of basis functions was carried out. It is shown that with the same parameters of the signal distribution, we obtain equivalent results when calculating the coefficients. When using these basis functions, to compress information, it is necessary to take into account that Schauder functions are local on the interval [0,T], and PL functions are continuous. On the basis of previous experimental studies, recommendations are provided for the use of PL-functions for digital processing, for example, of audio information.*

***Keywords**: information presentation, system of basic PL-functions, digital processing.*